

Подзоров Сергей Юрьевич

**Верхние полурешётки арифметических нумераций и
арифметических m -степеней**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2010

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН
Гончаров Сергей Савостьянович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Морозов Андрей Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Корольков Юрий Дмитриевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Добрица Вячеслав Порфирьевич

Ведущая организация:

Казанский государственный университет

Защита состоится 17 июня 2010 г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан “____” _____ 2010 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.003.015.02
кандидат физико-математических наук

А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Нумерацией непустого не более чем счётного семейства $\mathcal{F}$ называется произвольное сюръективное отображение натурального ряда на $\mathcal{F}$. Если ν — нумерация $\mathcal{F}$ и $\nu n = f \in \mathcal{F}$ для $n \in \mathbb{N}$, то число n называется ν -номером объекта f . Для нумераций ν и μ мы говорим, что ν сводится к μ и пишем $\nu \leq \mu$, если существует всюду определённая вычислимая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что $\nu = \mu \circ f$.

Фактически нумерация — это система имён для элементов $\mathcal{F}$. Хорошо известно, что для теории вычислимости нет принципиальной разницы между словами конечного алфавита и натуральным рядом, поскольку между этими двумя типами объектов существует вычислимое взаимно однозначное соответствие. В связи с этим натуральные числа, являющиеся номерами объектов, могут восприниматься как слова-имена. Нумерация назначает каждому объекту из $\mathcal{F}$ одно или несколько имён, которые могут служить входными данными для алгоритмов, в связи с чем появляется возможность говорить о вычислимости на $\mathcal{F}$ вне зависимости от того, какую природу имеют элементы этого семейства. Сводимость нумераций означает наличие эффективной процедуры трансляции, позволяющей переводить одни имена в другие.

Отношение сводимости на множестве всех нумераций семейства $\mathcal{F}$ является предпорядком. Ассоциированный с ним частичный порядок является верхней полурешёткой, которая обозначается $\mathcal{R}(\mathcal{F})$.

Допустим теперь, что у нас есть некое "универсальное" семейство $\mathcal{S}$ и нас интересуют нумерации подсемейств этого семейства. Предположим также, что уже имеется некоторая "естественная" система имён для $\mathcal{S}$; то есть задан эффективный язык L , слова которого являются именами объектов из $\mathcal{S}$, и отображение $d : L \rightarrow \mathcal{S}$, сопоставляющее именам объекты с этими именами. Тогда для $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ нумерация ν семейства $\mathcal{F}$ называется вычислимой относительно L , если существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow L$, такая что $\nu = f \circ d$, то есть если по каждому ν -номеру объекта из $\mathcal{F}$ можно вычислить его "естественное" имя (имя в языке L). Множество всех вычислимых относительно L нумераций семейства $\mathcal{F}$ задаёт идеал в полурешётке $\mathcal{R}(\mathcal{F})$, который обозначается $\mathcal{R}_L(\mathcal{F})$.

Первую идею о систематическом изучении нумераций и нумерованных множеств в России высказал А. Н. Колмогоров в середине 50-ых годов XX столетия. Развитие этой идеи, приведшее к созданию теории нумераций, принадлежит В. А. Успенскому (основные результаты

см. в [32]). Параллельно ряд зарубежных математиков (Райс, Деккер, Майхил, Фридберг, Лахлан, Роджерс) изучали схожие структуры, связанные с нумерациями семейств вычислимо функций и вычислимо перечислимых множеств. Впоследствии академик А. И. Мальцев синтезировал советское и зарубежное направление исследований, сформировав теорию нумераций в современном виде и задав основные направления исследований на десятилетия вперёд (см. обзор [28], после этого обзора выходили также другие статьи А. И. Мальцева, посвящённые нумерациям).

Работы Мальцева привели к тому, что начиная с 60-ых годов прошлого века основной интерес у исследователей стал вызывать случай, когда S равно семейству всех вычислимо перечислимых множеств, а "естественными" именами этого семейства, образующими язык L , являлись описания алгоритмов, эффективно перечисляющих множества. Нумерации, вычисляемые относительно этого языка, назывались просто вычислимыми; другими словами, исторически термин "вычислимая нумерация" применялся к нумерациям семейств вычислимо перечислимых множеств, для которых существовала эффективная процедура, перечисляющая множество по его номеру. В конце 60-ых – начале 70-ых годов прошлого столетия были опубликованы десятки статей, посвящённых полурешёткам вычислимых нумераций (достаточно подробная библиография того, что было опубликовано к середине 70-ых годов, есть в монографии академика Ю. Л. Ершова [23], посвящённой теории нумераций).

В 80-ых годах интерес к вычислимым нумерациям пошёл на спад, несмотря на то, что в теории вычислимых нумераций оставалось множество открытых проблем. Однако этот интерес снова возродился в середине 90-ых благодаря работе Гончарова и Сорби [18]. В этой работе, фактически, была предложена концепция вычислимости относительно "естественного" языка, описанная выше, и было показано, что классическое понятие вычислимой нумерации является частным случаем нумерации, вычислимой относительно языка. Поскольку термин "вычислимая нумерация" к тому времени уже устоялся, Гончаров и Сорби предложили термин "обобщённо вычислимая нумерация". В этой статье был дан старт к изучению обобщённо вычислимых нумераций; в первую очередь нумераций, вычислимых относительно одной из известных иерархий (разностная иерархия или иерархия Ершова, арифметическая иерархия, аналитическая иерархия). Мы не будем приводить здесь подробные определения, данные Гончаровым и Сорби, отметим

лишь, что вычислимость в каждой из этих иерархий может рассматриваться как вычислимость относительно некоторого эффективно заданного языка, естественного для этой иерархии. Кроме того, в случаях с разностной и арифметической иерархиями вычислимость нумерации относительно начального уровня этих иерархий равносильна вычислимости нумерации в классическом смысле.

После доклада С. С. Гончарова на международной конференции в г. Боулдер (США) в июне 1999 года (тезисы доклада см. в [3]) тема получила широкий резонанс среди мировой научной общественности. Вычислимые нумерации стали изучать в Новосибирске (Россия), Алма-Ате (Казахстан), Сиене (Италия), Гейдельберге (Германия).

Одним из основных направлений исследований стали нумерации, вычислимые в арифметической иерархии. Дадим точные определения, касающиеся этого важного для нас случая. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_{n+1}^0$ и ν — нумерация семейства $\mathcal{F}$. Эта нумерация называется Σ_n^0 -вычислимой, если множество $\{\langle x, y \rangle : x \in \nu y\}$ принадлежит классу Σ_{n+1}^0 . Это равносильно тому, что по ν -номеру множества из $\mathcal{F}$ можно эффективно вычислить Σ_{n+1} -формулу языка арифметики первого порядка, выделяющую это множество на стандартной модели арифметики. Таким образом, Σ_{n+1}^0 -вычислимость нумерации является частным случаем вычислимости относительно языка. Идеал в полурешётке нумераций $\mathcal{F}$, образованный Σ_{n+1}^0 -вычислимыми нумерациями, обозначается $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{F})$ и называется полурешёткой Роджерса (Σ_{n+1}^0 -вычислимых нумераций семейства $\mathcal{F}$). В случае $n = 0$ полурешётка Роджерса $\mathcal{R}_1^0(\mathcal{F})$ совпадает с классической полурешёткой вычислимых нумераций.

Алгебраические и теоретико-модельные свойства полурешёток Роджерса Σ_{n+2}^0 -вычислимых нумераций (неклассический случай, классический случай — это полурешётка $\mathcal{R}_1^0(\mathcal{F})$) стали темой множества публикаций. Помимо работ автора, посвящённых этой теме, можно отметить работы [1, 2, 3, 11, 13, 12, 4], уже упоминавшуюся работу [18] и ряд других, не вошедших в список литературы. Все эти работы перекликаются с четвёртой главой диссертации, более того, в четвёртой главе решается ряд вопросов, поставленных в перечисленных работах.

Результаты, касающиеся арифметических нумераций, имеют обширные приложения в теории конструктивных моделей [19]. Это одно из основных направлений современной теории вычислимости, имеющее большую популярность среди исследователей как в России, так и за рубежом. О приложениях арифметических нумераций к конструктивным моделям смотри конструкции в книге [19], а также [5, 6, 4, 7].

Исследования полурешёток Роджерса со временем привели автора диссертации к исследованию арифметических m -степеней. Эти степени и связанная с ними m -сводимость — один из основных объектов теории вычислимости, введённый Постом в 40-ых годах XX столетия. Они упоминаются во всех классических монографиях по теории вычислимости (см., например, [10, 30, 31]), им посвящены сотни статей различных авторов. Из наиболее фундаментальных результатов, полученных в разное время предшественниками автора диссертации и связанных с m -степенями, можно назвать следующие четыре:

- (1) В 1972 году Лахлан описал типы изоморфизма главных идеалов полурешётки вычислимо перечислимых m -степеней [9, 10, 23];
- (2) В 1975 Ершов и Палютин дали описание полурешётки всех m -степеней с точностью до изоморфизма в терминах c -универсальных полурешёток [27, 10, 23];
- (3) В 1978 Денисов дал характеристику типа изоморфизма полурешётки всех вычислимо перечислимых m -степеней [20, 10];
- (4) В 1980 Нероуд и Шор показали, что теория первого порядка полурешётки m -степеней вычислимо изоморфна арифметике второго порядка [10].

В третьей главе диссертации первый и третий результат из этого списка получили дальнейшее развитие. Характеризация Лахлана [9] обобщена на произвольные уровни арифметической иерархии, найдены новые примеры введённых Денисовым [20] универсальных полурешёток.

Лахлановское описание [9] задаёт полурешётки, изоморфные главным идеалам вычислимо перечислимых m -степеней довольно сложным образом. Они представлены в виде прямого предела последовательности конечных дистрибутивных решёток, удовлетворяющей списку из нескольких свойств (подробности в [9, 23, 10] и в первой главе диссертации). Позднее такие полурешётки были названы лахлановскими. Анализируя определение лахлановской полурешётки, можно заметить, что каждая лахлановская полурешётка является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, имеющей Σ_3^0 -представление. Вопрос о том, верно ли обратное, занимал умы многих исследователей, однако оставался открытым на протяжении более 30 лет. Отдельные частные случаи (ограниченные дистрибутивные решётки с Σ_3^0 -представлениями, конструктивизируемые ограниченные дистрибутивные полурешётки), для которых доказательства в обратную сторону были найдены, использовались Ершовым в [23], однако общий случай оставался открытой проблемой.

Автор решает этот вопрос во второй главе диссертации, давая на него положительный ответ. Результат доказывается сразу для обобщённого случая n -лахлановских полурешёток.

Цель работы.

Работа посвящена исследованию алгебраических и алгоритмических свойств таких дистрибутивных верхних полурешёток, как полурешётки арифметических m -степеней и полурешётки Роджерса арифметических нумераций, а также вообще полурешёток и решёток, имеющих арифметические представления различных типов.

Основные результаты.

В работе получены следующие основные результаты:

- (1) Установлен ряд фактов, касающихся арифметических представлений полурешёток: доказано, что n -лахлановские полурешётки — это, в точности, ограниченные дистрибутивные полурешётки, обладающие Σ_{n+3}^0 -представлением; построен пример дистрибутивной решётки, конструктивизируемой как частичный порядок, но не конструктивизируемой как верхняя полурешётка; доказано, что каждый $\mathbf{0}'$ -конструктивизируемый локально решёточный частичный порядок имеет позитивное представление.
- (2) Описаны типы изоморфизма главных идеалов в полурешётках арифметических m -степеней: получена полная локальная характеристика полурешёток арифметических m -степеней; доказано, что полурешётки гиперпростых, простых и принадлежащих классу Δ_2^0 m -степеней, а также полурешётки Роджерса Σ_2^0 -вычислимых нумераций конечного семейства, состоящего из попарно не сравнимых по включению множеств, изоморфны универсальной лахлановской полурешётке без наибольшего элемента.
- (3) Исследованы типы изоморфизма главных идеалов в полурешётках Роджерса арифметических нумераций: доказано сильное достаточное условие на вложимость дистрибутивной полурешётки в арифметическую полурешётку Роджерса в качестве идеала; получена полная локальная характеристика полурешёток Роджерса арифметических нумераций конечных семейств;
- (4) усилен результат Бадаева, Гончарова и Сорби о различии типов изоморфизма полурешёток Роджерса на разных уровнях

арифметической иерархии, разрыв между уровнями сокращён с 3 до 2;

- (5) получен ряд достаточных условий существования минимальных накрытий в полурешётках Роджерса арифметических нумераций, полностью решён вопрос о минимальных накрытиях в полурешётках Роджерса арифметических нумераций конечных семейств.

Основные методы.

В работе использовались как общие методы теории решёток и теории вычислимости (в частности, методы приоритета с конечными и бесконечными нарушениями), так и специальный метод, основанный на конструкциях, использующих каркасы и башни. Этот метод был изобретён Лахланом [9] и впоследствии усовершенствован Денисовым [20], Ершовым [25], а также автором в ряде работ из списка диссертации.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области теории вычислимости вообще и теории нумераций в частности, при исследовании структуры полурешётки m -степеней и полурешёток степеней относительно других типов алгоритмической сводимости, а также для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в указанных областях.

Научная новизна работы.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Апробация результатов работы.

Результаты работы были представлены автором в пленарных докладах на международных конференциях "Мальцевские чтения" (2005, 2006 и 2008 гг., Новосибирск), а также в секционных докладах международных конференций "Logic Colloquium" (2004, Турин; 2006, Наймеген) и "Computability in Europe" (2007, Сиена; 2008, Афины).

По теме диссертационной работы автором был сделан ряд докладов на общепланетарном семинаре Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также на научных семинарах Новосибирского государственного университета, Московского государственного университета,

Казанского государственного университета и Казахского национального университета им. Аль-Фараби в г. Алма-Ата (Казахстан). Результаты, доложенные на общеинститутском семинаре института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, трижды признавались одними из лучших научных достижений института (2001, 2006 и 2008 гг.) Нарботанная в ходе получения результатов диссертации техника использовалась при чтении основного спецкурса "Дополнительные главы теории вычислимости" на кафедре ДМИ Новосибирского государственного университета.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в журналах [34, 35] и [38 – 42], входящих в список ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора наук. Результаты, также представленные в диссертации, но не являющиеся основными, опубликованы в [36, 37].

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Утверждения нумеруются тремя цифрами: первая обозначает номер главы, вторая — номер параграфа в главе, а третья — номер утверждения в параграфе. Список литературы содержит 42 наименования. Объём диссертации составляет 118 страниц (112 страниц без оглавления и вводной части).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации носит вспомогательный характер. В ней вводятся все определения и обозначения, необходимые для изложения результатов основной части. Глава разбита на шесть тематических параграфов. В первом содержатся общие сведения по теории вычислимости, во втором — сведения из общей теории решёток. В третьем вводятся различные типы алгоритмических представлений дистрибутивных верхних полурешёток, исследованию которых посвящена вторая глава диссертации. В четвёртом присутствует всё необходимое, касающееся m -степеней, в пятом — сведения из теории нумераций. Наконец, в шестом параграфе вводятся такие элементы алгоритмических конструкций, как спектры, каркасы и башни, присутствующие в доказательствах ряда теорем из третьей главы.

Вторая глава посвящена изучению свойств различных алгоритмических представлений ограниченных дистрибутивных полурешёток, которые вводятся в третьем параграфе предыдущей главы. Результаты этой главы существенно используются в последующих главах.

Глава разбита на пять параграфов. Первый параграф содержит один из основных результатов диссертации, в нём решается остававшийся несколько десятилетий открытым вопрос о характеристизации лахлановских представлений верхних полурешёток. Этот результат сформулирован в диссертации как следствие из доказанной ранее теоремы 2.1.1

Следствие 2.1.1. *Если ограниченная (то есть имеющая наибольший и наименьший элементы) дистрибутивная полурешётка имеет Σ_{n+3}^0 -представление, то она имеет n -лахлановское представление, причём первое из этих представлений эффективно сводится ко второму.*

Отсюда, в частности, следует, что лахлановские полурешётки (то есть полурешётки, введённые в работе [9] и согласно этой же работе изоморфные полурешёткам вычислимо перечислимых m -степеней, есть, в точности, ограниченные дистрибутивные полурешётки, обладающие Σ_3^0 -представлением.

Следующий, второй параграф второй главы, очень короток. Его основной результат носит более технический характер, однако оказывается полезным при исследовании m -степеней и связанных с ними арифметических нумераций. В диссертации он сформулирован как следствие из теоремы 2.2.1.

Следствие 2.2.1. *Если полурешётка имеет предлахлановское представление, в котором тернарное отношение, задающее предпорядки на последовательности конечных дистрибутивных предрешёток, принадлежит классу Π_{n+2}^0 арифметической иерархии, то она имеет n -лахлановское представление, к которому сводится исходное представление.*

Отсюда можно, в частности, заключить, что класс полурешёток, с которыми работает Ю. Л. Ершов в статье [25], совпадает с классом лахлановских полурешёток.

Третий параграф главы посвящён исследованию конструктивных дистрибутивных решёток. В контексте диссертации он носит вспомогательный характер, хотя его основной результат представляет самостоятельную ценность для теории конструктивных моделей. Основным результатом этого параграфа (являющийся одним из основных результатов диссертации) сформулирован в диссертации в виде следствия:

Следствие 2.3.2. *Для каждого из трёх перечисленных ниже случаев существует дистрибутивная решётка $\mathcal{L}$, конструктивизируемая как частичный порядок, такая что*

- (1) $\mathcal{L}$ конструктивизируема как нижняя полурешётка, но не конструктивизируема как верхняя полурешётка;
- (2) $\mathcal{L}$ конструктивизируема как верхняя полурешётка, но не конструктивизируема как нижняя полурешётка;
- (3) $\mathcal{L}$ не конструктивизируема ни как нижняя полурешётка, ни как верхняя полурешётка.

В четвёртом параграфе исследуются позитивные представления так называемых локально решёточных частичных порядков. Основным результатом имеет ценность для теории конструктивных моделей и формулируется в следующей теореме.

Теорема 2.4.1. *Всякий локально решёточный $\mathbf{0}'$ -конструктивизируемый частичный порядок имеет позитивное представление.*

Эта теорема также относится к основным результатам диссертации.

Пятый, заключительный параграф второй главы подводит своеобразный итог исследованиям, результаты которых изложены в двух предыдущих параграфах. Основным утверждением этого короткого параграфа является следующее следствие, имеющее непосредственное отношение к теме всей второй главы и хорошо вписывающееся в контекст диссертации.

Следствие 2.5.1. *Для каждого натурального n существует ограниченная верхняя дистрибутивная решётка, имеющая Σ_n^0 -представление как частичный порядок, но не имеющая Σ_n^0 -представления как верхняя полурешётка.*

Из него, в частности, видно, что класс лахлановских полурешёток не совпадает с классом ограниченных дистрибутивных полурешёток, имеющих Σ_{n+3}^0 -представление как частичные порядки.

Третья глава диссертации посвящена изучению полурешёток, возникающих в арифметических m -степенях. Она содержит три параграфа, имеет наибольший объём и является наиболее сложным с технической точки зрения фрагментом работы.

Первый параграф третьей главы довольно короткий. В нём сформулированы две теоремы и следствие из них, дающее локальную характеризацию полурешётки арифметических m -степеней (один из основных

результатов диссертации, имеющий несколько интересных приложений в теории нумераций). Полная формулировка результата такова.

Следствие 3.1.1. *Для не более чем счётной верхней полурешётки $\mathcal{L}$ и произвольного натурального n следующие условия эквивалентны.*

- (1) $\mathcal{L}$ является ограниченной дистрибутивной полурешёткой, имеющей Σ_{n+3}^0 -представление;
- (2) $\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу полурешётки m -степеней, порождённого когипериммунным Σ_{n+1}^0 -множеством;
- (3) $\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу полурешётки m -степеней, порождённого гипериммунным Π_{n+1}^0 -множеством;
- (4) $\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу полурешётки m -степеней, порождённого произвольным Δ_{n+2}^0 -множеством.

Результат напрямую следует из теорем 3.1.1 и 3.1.2. Теорема 3.1.1 довольно проста и доказывается тут же, в первом параграфе. Теорема 3.1.2, напротив, весьма сложна с технической точки зрения. Она требует отдельного доказательства для случая $n = 0$ и случая $n > 0$. Доказательству случая $n > 0$ целиком посвящён второй параграф третьей главы диссертации, занимающий 10 страниц. Случай $n = 0$ следует из результатов третьего параграфа (исторически он был доказан на два года ранее, чем результаты третьего параграфа, однако, поскольку он может быть получен в качестве простого следствия из более поздних работ, ранние работы в тексте диссертации не отражены; см. [38] и [41]).

Третий параграф третьей главы занимает 25 страниц и содержит доказательство наиболее сложного с технической точки зрения основного результата диссертации. Этот результат сформулирован в виде следующего утверждения.

Следствие 3.3.1. *Следующие верхние полурешётки изоморфны:*

- (1) полурешётка всех гиперпростых m -степеней;
- (2) полурешётка всех простых m -степеней;
- (3) полурешётка всех вычислимо перечислимых m -степеней с удалённым наибольшим элементом;
- (4) полурешётка Роджерса Σ_2^0 -вычислимых нумераций конечного семейства, состоящего из попарно не сравнимых по включению множеств.

Другими словами, тип изоморфизма всех этих полурешёток совпадает с типом изоморфизма введённой и изученной в работе Денисова [20] универсальной лахлановской полурешётки с удалённым наибольшим

элементом. Если в четвертом пункте взять полурешётку Роджерса двух-элементного семейства, то, как несложно вывести, будем иметь полурешётку всех m -степеней, составленных из Δ_2^0 -множеств (следствие 3.3.2 в тексте диссертации). Тот факт, что такая полурешётка изоморфна полурешётке всех вычислимо перечислимых не креативных m -степеней, был анонсирован Денисовым в 1978 году в уже упомянутой работе [20], однако доказательство так и не было опубликовано.

В четвёртой, последней, главе диссертации содержатся результаты из теории нумераций. Они касаются строения полурешёток Роджерса Σ_{n+1}^0 -вычислимых нумераций для различных натуральных n , главным образом для $n > 0$. Случай $n = 0$ является классическим для теории нумераций; ему, начиная с конца 60-ых годов прошлого века, посвящено множество работ самых различных авторов. Случай $n > 0$ сравнительно новый; он активно изучается лишь в последнее десятилетие.

Глава разбита на два параграфа. В первом параграфе представлены результаты, касающиеся локального строения (то есть типов изоморфизма главных идеалов) полурешёток Роджерса. Дается полная локальная характеристика типов изоморфизма полурешёток Роджерса арифметических нумераций конечных семейств. Для бесконечных семейств доказывается некое довольно сильное достаточное условие вложимости ограниченной верхней полурешётки в полурешётку Роджерса в качестве идеала. На основании всего этого доказывается теорема о различии типов изоморфизма нетривиальных полурешёток Роджерса разных уровней арифметической иерархии в случае, когда разрыв между уровнями составляет 2 или более. Кратко эти результаты могут быть сформулированы следующим рядом теорем (формулировки которых входят в число основных результатов диссертации).

Теорема 4.1.1. *Пусть полурешётка $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ не тривиальна (то есть семейство $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ не одноэлементно и имеет хотя бы одну Σ_{n+2}^0 -вычислимую нумерацию) и $\mathcal{L}$ — произвольная ограниченная дистрибутивная полурешётка, имеющая Σ_{n+3}^0 -представление. Тогда в полурешётке Роджерса $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ существует идеал, изоморфный:*

- (1) $\mathcal{L}$, если $\mathcal{F}$ конечно;
- (2) $\mathcal{L}$ без наименьшего элемента, если $\mathcal{F}$ бесконечно.

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — конечное непустое семейство Σ_{n+2}^0 — множеств. Тогда имеет место один из следующих трёх случаев:*

- (1) семейство $\mathcal{F}$ одноэлементно и полурешётка $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ тривиальна (т.е. одноэлементна);

- (2) $\mathcal{F}$ не одноэлементно, состоит из попарно несравнимых по включению множеств и главные идеалы в $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешётки, имеющие Σ_{n+3}^0 -представление;
- (3) $\mathcal{F}$ содержит пару различных вложенных друг в друга множеств и главные идеалы в $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешётки, имеющие Σ_{n+4}^0 -представление.

Теорема 4.1.3. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ таковы, что $n + 2 \leq m$. Если для некоторых семейств $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ полурешётки $\mathcal{R}_{n+1}^0(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R}_{m+1}^0(\mathcal{G})$ локально изоморфны, то они тривиальны.

Последнее утверждение усиливает ряд результатов, доказанных ранее Бадаевым, Гончаровым и Сорби.

Во втором параграфе четвёртой главы исследуются вопросы, связанные с минимальными и строго минимальными накрытиями в полурешётках Роджерса арифметических нумераций. Этих вопросов два: вопрос о существовании минимальных накрытий и вопрос о предельности наибольшего элемента полурешётки, то есть вопрос о том, может ли наибольший элемент (если он существует) являться минимальным накрытием другого элемента.

Наиболее правдоподобная в настоящий момент гипотеза гласит, что в нетривиальных полурешётках Роджерса арифметических нумераций строго минимальные накрытия есть у любого не наибольшего элемента. Этот факт, к сожалению, так и не был доказан и до сих пор остаётся гипотезой. Однако автором был получен ряд довольно сильных достаточных условий того, что у элемента полурешётки Роджерса имеется минимальное, а в некоторых случаях и строго минимальное накрытие. Условия могут быть представлены тремя утверждениями (составляющими в совокупности один из основных результатов диссертации).

Предложение 4.2.1. Если в полурешётке $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ элемент представлен некоторой нумерацией, для которой существует $\mathbf{0}^{(n+1)}$ -вычисляемая функция без неподвижной точки, то этот элемент имеет минимальное накрытие.

Следствие 4.2.3. Если семейство $\mathcal{F}$ содержит наименьший по включению элемент, то в полурешётке $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ каждый не наибольший элемент имеет строго минимальное накрытие.

Следствие 4.2.4. *Если семейство $\mathcal{F}$ конечно, то в полурешётке $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ каждый не наибольший элемент имеет минимальное накрытие.*

Перечисленные выше результаты доказаны в статье [34], написанной автором совместно с С. А. Бадаевым.

Кроме перечисленных выше во втором параграфе представлены результаты, касающиеся предельности наибольшего элемента в полурешётках Роджерса арифметических нумераций. Из классической теории нумераций хорошо известна теорема Хуторецкого, следствием которой является утверждение о предельности наибольшего элемента в полурешётках вида $\mathcal{R}_1^0(\mathcal{F})$ (если он там существует). Для полурешёток вида $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ аналогичный вопрос, к сожалению, остаётся открытым. Автор не решает его полностью, однако доказывает, что в очень многих случаях наибольший элемент, если он существует, действительно предельен. Точная формулировка доказанного автором содержится в следующей теореме.

Теорема 4.2.3. *Если в полурешётке $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ существует наибольший элемент, то он является предельным в случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих четырёх условий:*

- (1) *семейство $\mathcal{F}$ содержит наименьший по включению элемент;*
- (2) *семейство $\mathcal{F}$ конечно;*
- (3) *семейство $\mathcal{F}$ содержит конечное множество;*
- (4) *семейство $\mathcal{F}$ обладает Σ_{n+1}^0 -вычислимой нумерацией.*

Теорема показывает, что контрпример с предельным наибольшим элементом, если он существует, должен выглядеть довольно замысловато; в частности, не должно выполняться ни одно из четырёх перечисленных в теореме условий. В настоящее время такой контрпример неизвестен.

В заключение отметим, что первый пункт этой теоремы является следствием теоремы 4.2.2. В теореме 4.2.2, в свою очередь, содержится одно любопытное утверждение о минимальных элементах полурешётки Роджерса, имеющее самостоятельную ценность.

Теорема 4.2.2. *Если семейство $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ содержит наименьший по включению элемент, то в полурешётке Роджерса $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{F})$ для каждого не наибольшего элемента найдётся несравнимый с ним минимальный элемент.*

Автор выражает глубокую признательность: Сергею Савостьяновичу Гончарову за всестороннюю помощь и поддержку, а также за постановку задач, инициировавших представленные в диссертации исследования; Юрию Леонидовичу Ершову за ряд ценных идей, которые помогли ему в доказательстве полученных результатов; Серикжану Агыбаевичу Бадаеву и Андреа Сорби, помогавшим автору в создании плодотворной рабочей обстановки и проявлявшим интерес к его исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A.* Completeness and Universality of Arithmetical Numberings. // in: *Computability and Models*. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 11 – 44.
- [2] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A.* Isomorphism Types and Theories of Rogers Semilattices of Arithmetical Numberings. // in: *Computability and Models*. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 79 – 91.
- [3] *Badaev S. A., Goncharov S. S.* Theory of Numbering: open problems. // *Contemporary Mathematics (AMS)*. 2000. vol. 257, pp. 23 – 38.
- [4] *Badaev S. A., Goncharov S. S.* Computability and Numberings. // *New Computational Paradigms, Changing Conceptions of what is Computable*, ed.: S. B. Cooper, B. Lowe, A. Sorbi. Springer Science + Business Media, LLC, New York. 2008. pp. 19 – 34.
- [5] *Goncharov S. S., Harizanov V., Knight J., McCoy Ch., Millar R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory. // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2005. vol. 136, № 3, pp. 219 – 246.
- [6] *Goncharov S. S., Chisholm J., Fokina E., Harizanov V., Knight J., Miller S.* Intrinsic bounds on complexity and definability at limit levels. // *Journal of Symbolic Logic*. 2009. vol. 74, № 3, pp. 1047 – 1060.
- [7] *Goncharov S. S.* Computable Numberings of Hyperarithmetical Sets and Complexity of Countable Models. // *Mathematical Theory and Computational Practice*, 5th Conf. On Computability in Europe, CiE 2009, Heidelberg, Germany (July 19-24), Univer. Of Heidelberg. 2009. pp 13 – 14.
- [8] *Lachlan A. H.* Two theorems on many-one degrees of recursively enumerable sets // *Алгебра и Логика*. 1972. Т. 11, № 2, С. 216 – 229.
- [9] *Lachlan A. H.* Recursively enumerable many-one degrees // *Алгебра и логика*. 1972. Т. 11, № 3. С. 326 – 358.
- [10] *Odifreddi P.* Classical recursion theory, volume II. Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [11] *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // *Алгебра и Логика*. 2001. Т. 40, № 5, С. 507–522.
- [12] *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Об элементарных теориях полурешёток Роджерса. // *Алгебра и логика*. 2005. Т. 44, № 3. С. 261 – 268.
- [13] *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Типы изоморфизма полурешёток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии // *Алгебра и логика*. 2006. Т. 45, № 6. С. 637 – 654.
- [14] *Вьюгин В. В.* Сегменты рекурсивно перечислимых m -степеней. // *Алгебра и Логика*. 1974. Т. 13, № 6, С. 635 – 654.

- [15] Вьюгин В. В. О верхних полурешетках нумераций. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4, С. 749 – 751.
- [16] Гретцер Г. Общая теория решёток. М.: Мир, 1982.
- [17] Гончаров С. С. Счётные булевы алгебры и разрешимость. Научная книга, Новосибирск, 1996.
- [18] Гончаров С. С., Сорби А. Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса. // Алгебра и Логика. 1997. Т. 36, № 6, 621 – 641.
- [19] Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [20] Денисов С. Д. Строение верхней полурешётки рекурсивно перечислимых m -степеней и смежные вопросы. 1 // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 643 – 683.
- [21] Дёгтев А. Н. Рекурсивно перечислимые множества и сводимости табличного типа. Наука, Физматлит, Москва, 1998.
- [22] Ершов Ю. Л. Гипергиперпростые m -степени. // Алгебра и Логика. 1969. Т. 8, № 5, С. 523 – 552.
- [23] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [24] Ершов Ю. Л. Необходимые условия изоморфизма полурешеток Роджерса конечных частично упорядоченных множеств. // Алгебра и Логика. 2003. Т. 42, № 4, С. 413 – 421.
- [25] Ершов Ю. Л. Полурешётки Роджерса конечных частично упорядоченных множеств. // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 44 – 84.
- [26] Ершов Ю. Л., Лавров И. А. Верхняя полурешетка $L(\mathfrak{S})$. Алгебра и Логика. // 1973. Т. 12, № 2, С. 167 – 189.
- [27] Ершов Ю. Л. Верхняя полурешетка нумераций конечного множества. // Алгебра и Логика. 1975. Т. 14, № 3, С. 258 – 284.
- [28] Мальцев А. И., Конструктивные алгебры, 1. // Успехи Мат. Наук. 1961. Т. 16, № 3, С. 3 – 60.
- [29] Палютин Е. А. Дополнение к статье Ю. Л. Ершова "Верхняя полурешётка нумераций конечного множества". // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 3. С. 284 – 287.
- [30] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [31] Соар Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени. "Казанское математическое общество", Казань, 2000.
- [32] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, М., 1960.
- [33] Хуторецкий А. Б. О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций. // Алгебра и Логика. 1971. Т. 10, № 5, С. 561 – 569.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [34] Бадаев С. А., Подзоров С. Ю. Минимальные накрытия в полурешетках Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций. // Сиб. Мат. Ж. 2002. Т. 43, № 4, С. 769 – 778.
- [35] Подзоров С. Ю. Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций. // Алгебра и Логика. 2003. Т. 42, № 2, С. 211 – 225.

- [36] *Badaev S. A., Goncharov S. S., Podzorov S. Yu., Sorbi A.* Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings. // in: Computability and Models. 2003. Kluwer Academic/Plenum Publishers, P. 45 – 77.
- [37] *Подзоров С. Ю.* О предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса. // Матем. Труды. 2004. Т. 7, №. 2, С. 98 – 108.
- [38] *Podzorov S. Yu.* On the local structure of Rogers semilattices of Σ_n^0 -computable numberings. // Algebra and Logic. 2005. vol. 44, №. 2, pp. 82 – 94. (пер. *Подзоров С. Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций. // Алгебра и Логика. 2005. Т. 44, №. 2, С. 148 – 172.)
- [39] *Подзоров С. Ю.* Об определении лахлановской полурешетки. // Сиб. Мат. Ж. 2006. Т. 47, №. 2, С. 383 – 393.
- [40] *Podzorov S. Yu.* Numbered distributive semilattices. // Siberian Adv. in Math. 2007. vol. 17, №. 3, pp. 171 – 185. (пер. *Подзоров С. Ю.* Нумерованные дистрибутивные полурешетки. // Матем. Труды. 2006. Т. 9, №. 2, С. 109 – 132.)
- [41] *Podzorov, S. Yu.* The universal Lachlan semilattice without the greatest element. // Algebra and Logic. 2007. vol. 46, №. 3, pp. 163 – 187. (пер. *Подзоров С. Ю.* Универсальная лахлановская полурешетка без наибольшего элемента. // Алгебра и Логика. 2007. Т. 46, №. 3, С. 299 – 345.)
- [42] *Подзоров С. Ю.* Арифметические m -степени. // Сиб. Мат. Ж. 2008. Т. 49, №. 6, С. 1391 – 1410.