

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. Соболева

На правах рукописи
УДК 519.21

БЫСТРОВ Александр Александрович

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
КАНОНИЧЕСКИХ СТАТИСТИК МИЗЕСА,
ПОСТРОЕННЫХ ПО ЗАВИСИМЫМ
НАБЛЮДЕНИЯМ**

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей и
математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2006

Работа выполнена в Институте математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор И. С. Борисов

Официальные оппоненты:
д.ф.-м.н., доцент Ф. С. Насыров
к.ф.-м.н., доцент А. П. Ковалевский

Ведущая организация:
Механико-математический факультет Санкт-Петербургского
государственного университета

Защита состоится
31 мая 2006 г. в ____ часов на заседании диссертационного со-
вета Д 003.015.01 в Институте математики им. С. Л. Соболева
СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. акад. Коптюга,
4, к.417.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.01 при Институте
математики СО РАН
д. ф.-м. н.

Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации предложена схема построения стохастических интегралов от неслучайных функций по неортогональным шумам. Эта конструкция позволяет описывать предельные распределения для *канонических* (вырожденных) статистик Мизеса произвольной размерности, построенных по слабо зависимым стационарно связанным наблюдениям.

Исследование предельного поведения статистик Мизеса (их нередко называют V -статистиками), а также U -статистик, которые по структуре близки к V -статистикам (и, как правило, к ним сводятся), имеет богатую историю, ведущую свой отсчет с классических работ Р. Мизеса [14] и В. Хёфдинга [11]. Для U и V -статистик, построенных по независимым наблюдениям, предельная теория разработана достаточно полно (см., например, [3] – [5], [9], [11], [13], [14] и др.).

В предельной теории для указанных статистик (как для независимых, так и для зависимых наблюдений) можно выделить два направления: асимптотический анализ *невыврожденных* и *вырожденных* U и V -статистик. В силу известного *представления Хёфдинга* главная часть любой невырожденной U или V -статистики представляет собой сумму одного и того же детерминированного преобразования от рассматриваемых наблюдений (независимых или зависимых), что по сути позволяет сводить задачу к соответствующей проблеме классической теории суммирования. При этом следующие по порядку члены в упомянутом разложении Хёфдинга уже будут вырожденными статистиками (как, впрочем, и суммы *центрированных* случайных величин). Так что асимптотический анализ невырожденных U и V -статистик нередко сводится к соответствующему анализу вырожденных статистик. Именно поэтому последние и называются *канонически-*

ми. Всюду в дальнейшем мы изучаем предельное поведение только таких статистик.

В случае слабо зависимых наблюдений нам известна лишь работа [10], в которой описано предельное распределение для двумерных вырожденных U -статистик, построенных по стационарно связанным наблюдениям с условием равномерно сильного перемешивания.

Упомянем также работу [8], в которой исследовались предельные распределения для вырожденных U -статистик от специально построенных наблюдений – детерминированного преобразования стационарно связанных сильно зависимых (т. е. без условий перемешивания) *гауссовских* величин. Так что в рамках достаточно частной конструкции в [8] изучаются совершенно иные эффекты, нежели в диссертации.

В некоторых упомянутых выше работах в случае независимых наблюдений предельный элемент, первоначально описанный в терминах полиномов Чебышева–Эрмита от независимых стандартных нормальных величин, интерпретируется как некоторый стохастический интеграл от ядра рассматриваемой статистики (см. [5], [9], [8]). Обычно это классический кратный интеграл Винера–Ито или его детерминированное преобразование, а также близкие к ним конструкции (см., например, [5]). Попытка переноса этой техники на случай *зависимых* наблюдений привела к необходимости построения кратного стохастического интеграла от неслучайной функции по *неортогональным* элементарным стохастическим мерам (неортогональным шумам). В отличие от теории интегрирования неслучайных функций по ортогональным шумам, разработанной в классических работах Н. Винера, А. Н. Колмогорова, Г. Крамера, К. Ито и др., и наиболее полно изложенной в монографиях [2] и [12], интегрированию по неортогональным шумам посвящено не так много работ. Кратный стохастический интеграл по приращениям

броуновского моста, по-видимому, впервые изучался в работе А. А. Филипповой [5] при исследовании предельного поведения функционалов (статистик) Мизеса. Однако схема задания интеграла в [5] легко может быть сведена к построению кратного стохастического интеграла по приращениям винеровского процесса, и эта конструкция будет близка к схеме задания кратного интеграла Винера – Ито. В работе С. Камбаниса и С. Т. Хуанга [7] была рассмотрена схема построения кратного стохастического интеграла по приращениям *произвольного* гауссовского процесса. При этом использовался математический аппарат тензорных произведений некоторых евклидовых ядерных пространств, построенных по исходному гауссовскому процессу. Однако при таком задании кратных стохастических интегралов остается невыясненным вопрос касательно их стохастической непрерывности на пространстве ядер, снабженном удобной для анализа топологией. Именно это свойство является ключевым при доказательстве предельных теорем для V -статистик. Отметим также, что в последнее время вышел ряд работ, посвященных интегрированию по приращениям так называемого фрактального броуновского движения.

Цель работы. Основной целью работы является построение стохастического интеграла от неслучайных функций по неортогональным шумам (не обязательно гауссовским), заданным на произвольных измеримых пространствах, а также применение этого математического аппарата для асимптотического анализа канонических статистик Мизеса, построенных по стационарно связанным слабо зависимым наблюдениям.

Научная новизна. В диссертации предложена конструкция *абстрактного* стохастического интеграла от неслучайной функции по *произвольным гильбертовым шумам*, включающая в себя конструкции как одномерных, так и кратных

стохастических интегралов по приращениям случайных процессов на прямой. С использованием этих результатов получено конструктивное представление предельного распределения канонических статистик Мизеса произвольной размерности, построенных по стационарно связанным наблюдениям с условием ψ -перемешивания.

Апробация работы. Все результаты докладывались на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на четырех международных конференциях: “8-я Вильнюсская международная конференция по теории вероятностей и математической статистике” (2002 г.), “6-й Всемирный Конгресс Общества им. Я. Бернулли по теории вероятностей и математической статистике” (г. Барселона, 2004 г.), “4-я Азиатская Математическая Конференция” (Сингапур, 2005 г.), 4-я Международная конференция по многомерным распределениям (г. Санта Фе, США, 2005 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [18] – [19].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Объем диссертации – 63 страницы.

Краткое содержание работы

Во Введении дается обзор работ по теме исследований и обсуждается содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена построению абстрактного стохастического интеграла от неслучайной функции по произвольной гильбертовой элементарной стохастической мере (или

шуму), определенной на полукольце подмножеств произвольного непустого множества.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathcal{L}_2$ — гильбертово пространство всех случайных величин с конечными вторыми моментами и стандартным скалярным произведением, порождающим соответствующую евклидову норму, $\mathfrak{X}$ — некоторое множество и $\mathfrak{M}$ — полукольцо подмножеств $\mathfrak{X}$ с единицей, т. е. $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно операции “ $\cap$ ”, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$ и теоретико-множественная разность двух любых элементов из $\mathfrak{M}$ представима в виде конечного объединения элементов из $\mathfrak{M}$. Предположим, что на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан случайный процесс $\{\mu(A); A \in \mathfrak{M}\}$, для которого $\mu(A) \in \mathcal{L}_2$ (такие процессы иногда называют *гильбертовыми*) и

(M1) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ п. н.,
если только $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ и $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$.

Определение 1. Гильбертов случайный процесс $\{\mu(A); A \in \mathfrak{M}\}$, удовлетворяющий условию (M1), называется элементарной стохастической мерой или шумом. Если дополнительно $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ п. н. для всех несовместных $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то шум называется ортогональным.

Пусть μ — произвольный гильбертов шум. Определим на канонических прямоугольниках $A \times B$ декартова квадрата $\mathfrak{X}^2$, где $A, B \in \mathfrak{M}$, следующую функцию множества:

$$m(A \times B) := \mathbf{E}\mu(A)\mu(B).$$

Мы рассматриваем m как функцию множества, заданную на полукольце подмножеств $\mathfrak{M}^2 := \{A \times B; A, B \in \mathfrak{M}\}$ с элементом $\mathfrak{X}^2$ в качестве единицы. Эта функция (вообще говоря, знакопеременная) аддитивна в следующем смысле: если $A = \bigcup_{i \leq n} A_i$ и $B = \bigcup_{j \leq r} B_j$, причем $A, B, A_i, B_j \in \mathfrak{M}$ и каждый из конечных наборов $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$ состоит из попарно

непересекающихся подмножеств, то $m(A \times B) = \bigcup_{i,j} m(A_i \times B_j)$. Кроме того, функция m обладает очевидной симметрией: $m(A \times B) = m(B \times A)$.

Основное предположение. Функция множества $m(\cdot)$ — конечная σ -аддитивная знакопеременная мера (заряд) на $\mathfrak{M}^2$, т. е. указанное выше свойство аддитивности имеет место и для любых счетных семейств подмножеств $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$.

Замечание 1. Так же, как и в классической теории интегрирования, нижеследующие результаты могут быть переформулированы на случай σ -конечной меры m .

В силу классической теоремы о продолжении меры конечный заряд m при выполнении основного предположения может быть продолжен на $\sigma(\mathfrak{M}^2)$ — минимальную σ -алгебру, содержащую все канонические прямоугольники пространства $\mathfrak{X}^2$. Этот заряд будем называть *ковариационной мерой*. Введем в рассмотрение следующее пространство $\sigma(\mathfrak{M})$ -измеримых функций:

$$S := \left\{ f : \int_{\mathfrak{X}^2} f(t) f(s) m(dt, ds) < \infty \right\}.$$

Кроме того, введем в рассмотрение заданный на S^2 билинейный функционал

$$(f, g) := \int_{\mathfrak{X}^2} f(t) g(s) m(dt, ds),$$

для которого выполнены все аксиомы скалярного произведения за исключением одной: уравнение $(f, f) = 0$ имеет, вообще говоря, не единственное решение. Так что функционал $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ образует в S *полунорму*. Однако, если провести факторизацию S по множеству корней уравнения

$\|f\| = 0$, то можно говорить об $\|\cdot\|$ как о норме. Именно это в дальнейшем мы и будем иметь в виду, называя $\|\cdot\|$ нормой.

Далее, обозначим через $\mathcal{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ следующий класс простых функций $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k I_{A_k}(x), \quad (1)$$

где $\{A_k\}$ – произвольное конечное разбиение $\mathfrak{X}$, n – любое натуральное число, c_k – произвольные числа, а $I_A(x)$ – индикатор множества A . Определим стохастический интеграл от функции $f(x) \in \mathcal{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ по элементарной стохастической мере $\mu(\cdot)$ формулой

$$\eta(f) := \int f(x) \mu(dx) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k). \quad (2)$$

Нетрудно также установить, что замыкание в норме $\|\cdot\|$ в S линейной оболочки $\mathcal{L}_0\{\mathfrak{M}\}$ совпадает с S , но при этом S может не быть полным.

Теперь рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}_0\{\mu\}$ уже введенного семейства случайных величин $\{\mu(A); A \in \mathfrak{M}\}$, т. е. множество случайных величин, представимых в виде (2), и пространство $\mathcal{L}_2\{\mu\}$, являющееся замыканием $\mathcal{L}_0\{\mu\}$ в гильбертовом пространстве случайных величин $\mathcal{L}_2$. Заметим, что если S не полно, то пространства $(S, \|\cdot\|)$ и $\mathcal{L}_2\{\mu\}$ не являются изометричными, а наличие такой изометрии является ключевым аргументом в работах, связанных с построением стохастических интегралов по ортогональным шумам.

Теорема 1. Пусть $\{f_n\}$ – последовательность функций вида (1), сходящаяся к $f \in S$ в норме $\|\cdot\|$.

Тогда для последовательности случайных величин $\{\eta(f_n)\}$ вида (2) существует $\mathcal{L}_2$ -предел $\eta(f)$, который не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

Определение 2. Назовем предельную случайную величину $\eta(f) \equiv \int f(t) \mu(dt)$ из теоремы 1 стохастическим интегралом функции f по мере μ .

Теорема 1 представляет собой основной результат первой главы диссертационной работы.

Зададим теперь на отрезке $[0, T]$ центрированный гильбертов (не обязательно гауссовский) процесс $\xi(t)$. Далее в первой главе рассматриваются интегралы по шумам двух типов: $\mu(dt) := d\xi(t)$ и $\tilde{\mu}(dt_1 \times \dots \times dt_d) := d\xi(dt_1) \dots d\xi(dt_d)$. Изучаются несколько достаточно широких классов интегрирующих процессов с неортогональными приращениями и приводятся достаточные условия принадлежности ядер пространству S как для одномерных, так и для кратных стохастических интегралов, определенных в теореме 1. В случае кратного интеграла по приращениям *гауссовского* процесса $\xi(t)$ эти условия совпадают с условиями из [7].

Во второй главе диссертационной работы исследуется предельное поведение вырожденных статистик Мизеса, построенных по стационарно связанным наблюдениям с условием ψ -перемешивания.

Пусть $\{X_i; i \in \mathbb{Z}\}$ стационарная (в узком смысле) последовательность случайных величин со значениями в произвольном измеримом пространстве $\{\mathfrak{X}, \mathcal{A}\}$ и маргинальным распределением P . Рассмотрим измеримую функцию $f(t_1, \dots, t_d) : \mathfrak{X}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Определим статистику *Мизеса* (или V -статистику) по формуле

$$M_n := n^{-d/2} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_d \leq n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $d \geq 2$, индексы суммирования i_k пробегают независимо друг от друга все значения от 1 до n , а функция f удовле-

творяет условию вырожденности

$$\mathbf{E}f(t_1, \dots, t_{k-1}, X_k, t_{k+1}, \dots, t_d) = 0$$

при всех $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{X}$ и $k = 1, \dots, d$. Функция f называется ядром статистики Мизеса.

Обозначим через $\mathcal{F}_j^k$ сигма-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, \dots, X_k$, $j \leq k$. Для $m \geq 1$ определим следующий коэффициент перемешивания:

$$\psi(m) := \sup_k \sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^k, B \in \mathcal{F}_{k+m}^\infty} \left\{ \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \right| ; \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0 \right\}. \quad (4)$$

Стационарная в узком смысле последовательность случайных величин называется последовательностью с ψ -перемешиванием, если $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(m) = 0$. Такие условия зависимости впервые были исследованы в [6].

Введем основные ограничения на параметры рассматриваемой задачи, которые всюду в дальнейшем будут предполагаться выполненными:

I. $\mathfrak{X} = [0, 1]$.

II. Последовательность случайных величин $\{X_i; i \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию ψ -перемешивания, причем

$$\sum_{k \geq 1} \psi(k) k^{2d-2} < \infty.$$

III. Случайная величина X_0 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, и при всех $k \geq 1$ функции совместного распределения $F_k(t, s)$ пар (X_0, X_k) имеют плотности $p_k(t, s)$, которые в силу (4) равномерно ограничены на квадрате $[0, 1]^2$.

Рассмотрим центрированный гауссовский процесс $Y(t)$ с ковариационной функцией

$$\mathbf{E}Y(t)Y(s) = \min(t, s) - ts + \sum_{k \geq 1} (F_k(t, s) + F_k(s, t) - 2ts), \quad (5)$$

где $t, s \in [0, 1]$. Отметим, что условие суммируемости коэффициентов $\psi(k)$ (которое, очевидно, следует из II) обеспечивает абсолютную сходимость функционального ряда в правой части (5) и его равномерную ограниченность на $[0, 1]^2$.

Гауссовские процессы с ковариацией (5) возникают как слабые пределы для последовательности классических эмпирических процессов при выполнении определенных условий зависимости случайных величин $\{X_k\}$. В частности, данная сходимость будет иметь место, если последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ -перемешивания (что слабее условия ψ -перемешивания) при менее ограничительных, чем в II, условиях на скорость убывания соответствующего коэффициента (см., например, [1]).

Напомним, что диагональное подпространство в $\mathfrak{X}^d$ задается соотношением

$$D_{i^*} := \{(t_1, \dots, t_d) : t_{i_1} = t_{i_2} \dots = t_{i_{q_1}}, \dots, t_{i_{q_{r-1}+1}} = t_{i_{q_{r-1}+2}} \dots = t_{i_{q_r}}\},$$

где $q_1 \geq 2$, $q_{i+1} - q_i \geq 2$ при $i \geq 1$, $\sum q_i \leq d$;
 $i^* := (i_1, i_2, \dots, i_{q_1}, \dots, i_{q_{r-1}+1}, i_{q_{r-1}+2}, \dots, i_{q_r})$ – вектор с попарно различными целочисленными координатами из набора $\{1, \dots, d\}$.
В дальнейшем вместо векторного индекса i^* диагональных подпространств нам будет удобнее использовать скалярную величину (скажем, i), перенумеровав эти подпространства натуральными числами произвольным образом. Подпространство в $\mathfrak{X}^d$, определяемое попарно различными t_i , назовем *главным подпространством* и обозначим через D_0 .

Рассмотрим функциональное пространство

$$S_0 := \{f : \sum \int_{D_i} f^2(t_1, \dots, t_d) dt_{i_{q_1}} \dots dt_{i_{q_r}} < \infty\},$$

где сумма берется при всех $i \geq 0$, т. е. по главному и всем диагональным подпространствам $\mathfrak{X}^d$.

Сформулируем основной результат второй главы:

Теорема 2. Пусть выполнены условия I – III. Тогда для любого ядра $f \in S_0$ при $n \rightarrow \infty$

$$M_n \xrightarrow{d} \int_{\mathbb{X}^d} f(t_1, \dots, t_d) dY(t_1) \dots dY(t_d), \quad (6)$$

где интеграл в правой части (6) определен в теореме 1, а символ “ $\xrightarrow{d}$ ” обозначает слабую сходимость соответствующих распределений.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю И. С. Борисову за постановку задачи, ценные советы и внимание к работе.

Список литературы

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971.
3. Королюк В. С., Боровских Ю. В. Теория U -статистик. Киев: Наукова Думка, 1989.
4. Никитин Я. Ю., Поникаров Е. В. Большие отклонения черновского типа для U - и V - статистик. // Доклады РАН, 1999, т.369, №1, с. 10-12.
5. Филиппова А. А. Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения // Теория вероятностей и ее применения, 1962, т.7, №1, с. 26-60.

6. *Blum J. R., Hanson D. L., Koopmans L. H.* On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes // Z. Wahrscheinlich. und verw. Geb., 1963, v.2 №1, p. 1-11.
7. *Cambanis S., Huang S. T.* Stochastic and multiple Wiener integrals for Gaussian processes — Ann. Probability, 1978, v.6, p. 585-614.
8. *Dehling H., Taqqu M. S.* The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to U -statistics // Ann. Statist., 1989, v.17, №4, p. 1767-1783.
9. *Dynkin E. B., Mandelbaum A.* Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals // Ann. Statist., 1983, v.11, №3, p. 739-745.
10. *Eagleson G.K.* Orthogonal expansions and U -statistics // Austral. J. Statist., 1979, v.21, №3, p. 221-237.
11. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948, v. 19, p. 293-325.
12. *Major P.* Multiple Wiener-Ito integrals — Lecture notes in Mathematics, Springer, 1981, v. 849.
13. *Rubin H., Vitale R. A.* Asymptotic distribution of symmetric statistics // Ann. Statist., 1980, v.8, №1, p. 165-170.
14. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions // Ann. Math. Statist., 1947, v. 18, p. 309-348.

Публикации по теме диссертации

15. Быстров А. А. Обобщение классической конструкции стохастического интеграла. // Труды XXXIX Международной студенческой конференции, Новосибирский государственный университет, 2001, с. 246-252.
16. *Borisov I. S., Bystrov A. A.* An extension of the classical stochastic integral construction for nonrandom kernels. // 8th Vilnius Conference on Probability Theory, 2002, Vilnius University, Abstracts of Comm., p. 47-48.
17. *Borisov I. S., Bystrov A. A.* L_2 -construction of stochastic integrals of nonrandom kernels for nonorthogonal stochastic measures. // 6th Bernoulli Congress on Probab. and Math. Stat., 2004, Univer. Barcelona, Abstracts of Comm., p. 73.
18. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Построение стохастического интеграла от неслучайной функции без условия ортогональности интегрирующей меры. // Теория вероятностей и ее применения, 2005, т.50, №1, с. 52-80.
19. *Borisov I. S., Bystrov A. A.* Stochastic integrals of nonrandom kernels for nonorthogonal noises and asymptotic analysis of canonical von Mises statistics of dependent observations. // 4th Asian Math. Conference, 2005, National University of Singapore, Abstracts of Comm. p. 11-12.

Быстров Александр Александрович

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАНОНИЧЕСКИХ
СТАТИСТИК МИЗЕСА, ПОСТРОЕННЫХ ПО
ЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать

Офсетная печать. Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск-90, пр. Лаврентьева, 6.