На правах рукописи

Мищенко Алексей Александрович

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ И АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Омск 2009

Работа выполнена в лаборатории комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики
Омского филиала Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
В.Н. Ремесленников

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Е.И. Тимошенко

кандидат физико-математических наук,
доцент
М.А. Шевелин

Ведущая организация: Алтайский государственный университет.

Защита диссертации состоится 24 декабря 2009 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "__"ноября 2009 г.

Ученый Секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, А.Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интерес к частично коммутативным группам вызван многими замечательными свойствами этих групп. К этим свойствам можно отнести удобные нормальные формы, разрешимость большинства алгоритмических проблем, богатую подгрупповую структуру. Частично коммутативные группы естественным образом возникают во многих разделах математики, в частности в компьютерных науках. Хорошим введением в теорию частично коммутативных групп могут служить статьи обзорного характера [26, 19].

Частично коммутативная группа полностью определяется заданием конечного неориентированного графа Γ (без петель и кратных ребер) с множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством ребер $E(\Gamma)$ с помощью порождающих и определяющих соотношений. Графу Γ соответствует свободная частично коммутативная группа F_Γ, которая имеет представление

$$F_\Gamma = \langle X \mid x_i x_j = x_j x_i \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in E(\Gamma)\rangle,$$

то есть, соотношение коммутативности между порождающими элементами имеет место тогда и только тогда, когда вершины x_i и x_j соединены ребром в графе Γ. Свободную частично коммутативную группу часто также называют частично коммутативной группой.

Частично коммутативные группы линейны [29]. В [21] доказано, что частично коммутативные группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их графы. В [33] найдено множество порождающих для группы автоморфизмов частично коммутативной группы. В [22] описаны централизаторы элементов в частично коммутативных группах. В [25] введены понятия параболической и квазипараболической подгрупп, и на этом языке описаны централизаторы частично коммутативных групп. В [24] построена теория ортогональности для частично коммутативных групп. С помощью этой теории получено много результатов, описывающих структуру частично коммутативных групп.

Понятие частично коммутативной группы можно ввести в многих многообразиях алгебраических систем, в частности в многообразии нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп фиксированной ступени нильпотентности, где $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. В настоящей работе частично коммутативные группы определяются и исследуются в многообразии нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп ступени нильпотентности 2. Как и в многообразии всех групп, частично коммутативные группы в многообразии двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп полностью определяются заданием конечного неориентированного графа Γ, а потому соответствующую группу мы будем обозначать G_Γ.

В данной диссертации для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп решаются две основные задачи: первая из них связана с созданием основ алгебраической геометрии для данного многообразия групп, а вторая связана с проблемой универсальной эквивалентности для этих групп (решение проблемы В.Н. Ремесленникова, формулировку проблемы смотри ниже).

Многие связи между подмножествами элементов фиксированной алгебраической системы A можно выразить на языке систем алгебраических уравнений над A. В классическом случае, когда A является полем, раздел математики, изучающий такого рода связи, называется алгебраической геометрией. Ведущей проблемой алгебраической геометрии над фиксированным полем является проблема классификации алгебраических многообразий. В наиболее сильной форме она предполагает классификацию всех алгебраических многообразий с точностью до изоморфизма.

Алгебраическая геометрия над произвольными алгебраическими системами (не обязательно полями) — это новое направление в математике. На сегодняшний день оно представлено работами в основном по алгебраической геометрии над группами, где получены хорошие результаты. Основы алгебраической геометрии над группами были заложены в работах Г. Баумслага, А. Г. Мясникова, В.Н. Ремесленникова [14], А.Г. Мясникова, В.Н. Ремесленникова [35] и Б.И. Плоткина [38, 39], в которых были интерпретированы главные идеи алгебраической геометрии в ее алгебраическом и логическом аспектах для случая групп.

Перечислим наиболее яркие успехи алгебраической геометрии
над группами. Прежде всего, достаточно хорошо решена основная проблема алгебраической геометрии о классификации координатных групп и алгебраических множеств в случае свободной группы, причем, классификация координатных групп дана на языке свободных конструкций. Это достигнуто благодаря работам многих специалистов в теории групп, отметим среди них работы Р. Линдона [34], К.И. Аппеля [12], Р. Брайнта [16], Г.С. Маканина [2], А.А. Разборова [4, 40], В.Н. Ремесленникова [5], Р.И. Григорчука и П.Ф. Курчанова [27], З. Селы [43], А. Мясникова, В. Ремесленникова и Д. Сербина [36, 37]. Завершающий результат был получен в замечательных работах О. Харлампович и А. Мясникова [30, 31, 32].

Достаточно серьезные результаты по алгебраической геометрии над свободной метабелевой группой получены в работах О. Шапю [18], В.Н. Ремесленникова [6], В. Ремесленникова и Р. Штёра [41, 42], В.Н. Ремесленникова и Н.С. Романовского [7, 8], В.Н. Ремесленникова и Е.И. Тимошенко [9].

Проблема классификации групп с точностью до универсальной эквивалентности стала весьма популярной в последние годы. Отметим в этом направлении работы О. Шапю [18], В. Ремесленникова и Р. Штёра [41, 42], Н.С. Романовского [10, 11] и Ч.К. Гупты и Н.С. Романовского [28].

В.Н. Ремесленниковым была сформулирована следующая проблема. Пусть заданы два конечных графа Γ_1 и Γ_2 и частично коммутативные группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} в некотором многообразии групп. По произвольному конечному простому графу T определяется экзистенциальная формула $\phi(T)$ (определение формулы смотри в параграфе 1.1). Если фиксирован граф Γ, то обозначим

$$\Phi(\Gamma) = \{\phi(T) |\ \phi(T) \text{ выполняется на } G_\Gamma\}.$$

Проблема В.Н. Ремесленникова состоит в следующем: группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2)$.

Одним из основных результатов данной диссертации является положительное решение данной проблемы в классе двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп. Для решения этой проблемы понадобилось развить комбинаторную технику связанную с графами. Эта техника излагается в главе 1 диссертации.

Цель работы. Две основные цели были сформулированы выше, конкретизируем цели более детально. В данной работе мы ставим перед собой задачи: описать формулы выполняющиеся на частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-группах, описать структуру централизаторов для этих групп, определить понятия алгебраической геометрии над частично коммутативными двуступенно нильпотентными $\mathbb{Q}$-группами, классифицировать координатные группы и алгебраические множества, доказать необходимое и достаточное условие универсальной эквивалентности.

Методика исследования. В качестве методов исследования использовались методы теории графов, методы алгебраической геометрии над алгебраическими системами и методы теории нильпотентных групп.

Научная новизна работы. Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные результаты диссертации в порядке появления их в работе:

1. Для фиксированной частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы G_Γ описаны специальные экзистенциальные формулы, выполняющиеся на этой группе. Случай, когда граф Γ имеет общий вид непосредственно следует из разбора двух специальных случаев, когда Γ – линейный граф и когда Γ – k-циклический граф. Результаты, касающиеся случая, когда Γ – линейный граф, принадлежат автору диссертации, а результаты, касающиеся k-циклического графа принадлежат А.В. Трейеру.

2. Описана структура централизатора произвольного множества элементов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы на языке параболических и квазипараболических подгрупп. Результаты, касающиеся описание централизаторов одного элемента группы получены А.В. Трейером.

3. Доказан критерий универсальной эквивалентности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп.

4. Получено описание алгебраических множеств для систем уравнений от одной переменной и для невырожденных систем уравнений для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп.

5. Доказано, что любые две неабелевые частично коммутативные двуступенно нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы геометрически эквивалентны.

Теоретическая значимость. Исследована структура централизаторов, получено описание алгебраических множеств для систем уравнений от одной переменной и для невырожденных систем уравнений для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп. Также для этих групп доказан критерий универсальной эквивалентности, решена проблема геометрической эквивалентности и проблема универсальной геометрической эквивалентности.

Практическая ценность. Работа имеет теоретический характер.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международной математической конференции "Мальцевские чтения"(г. Новосибирск, 2006г. и 2008г.), международной математической конференции "Эйлер и современная комбинаторика"(г. Санкт-Петербург, 2007г.), международной школе-семинаре "Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических системах"(г. Омск, 2009г.), а также на заседаниях Омского Алгебраического Семинара.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [45, 46, 47, 48, 49]. Работы [47, 48, 49] выполнены совместно с Александром Викторовичем Трейером при равном вкладе соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 109 страницах, состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы, большая часть параграфов структурирована по разделам. Список литературы содержит 49 наименований.

Диссертация начинается с небольшого предварительного параграфа, где вводятся основные определения. Основное содержание диссертации разделено на три главы.

В **первой главе** по любой n-ке элементов группы мы определяем так называемый граф коммутативности T, и по этому графу T в параграфе 1.1 естественным образом определяется экзистенциальная формула $\phi(T)$. Первая глава посвящена решению следующей проблемы. Пусть задан граф Γ, по графу Γ строится частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа G_Γ. Нас интересует вопрос: для какого графа T формула $\phi(T)$ выполнятся на группе G_Γ? Для решения этой задачи вводятся три специальные операции на графах, удовлетворяющие следующему свойству: если применяя данные операции к графу T_1 мы получаем граф T_2, то формула $\phi(T_1)$ выполняется на группе G_Γ тогда и только тогда, когда формула $\phi(T_2)$ выполняется на группе G_Γ.

С помощью этих операций задача решается последовательно: сначала для случая, когда граф Γ является линейным графом, затем для случая когда граф Γ является циклом длинны k без диагоналей ($k > 3$), и в конце задача решается для произвольного графа Γ. Результаты данной главы являются существенным шагом для доказательства гипотезы В.Н. Ремесленникова об универсальной эквивалентности - *теорема 3.3*.

Во **второй главе** мы решаем проблему описания централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы. Для этого, следуя статье [25], вводятся понятия параболической и квазипараболической подгрупп, понятие блокового разложения элемента и некоторые операции ортогональности в графах, с помощью которых вводится решетка замкнутых множеств $CS(X)$ для графа. Основной результат формулируется в этих терминах в *теореме 2.1*.

В случае свободных частично коммутативных групп централизаторы одного элемента были описаны Серватиусом [44]. Централизаторы нескольких элементов описываются в статье [25].

Третья глава диссертации посвящена проблемам алгебраической геометрии над частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группой. Основы алгебраической геометрии изложены в работах [14, 20, 35]. Следуя этим работам, в третьей главе мы вводим соответствующие определения в нашей категории групп. Прежде всего мы решаем проблему классификации алгебраических множеств для систем уравнений от одной переменной и невырожденных систем уравнений от нескольких переменных. Данные результаты формулируются в *теореме 3.7* для систем уравнений от одной переменной, и в *теореме*

3.8 для систем невырожденных уравнений.

Б.И. Плоткин ввел понятие геометрической эквивалентности двух алгебраических систем. Неформально две алгебраические системы геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые алгебраические геометрии. В общем случае проблема Плоткина геометрической эквивалентности для групп была решена в статье А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова [35]. Тем не менее, в каждом конкретном классе групп эта проблема конкретизируется и требует решения, учитывая индивидуальные особенности групп из данного класса.

Если мы рассмотрим не все алгебраические множества, а только неприводимые алгебраические множества, то по аналогии с проблемой Плоткина формулируется проблема универсальной геометрической эквивалентности. В диссертации по этому направлению получены следующие две теоремы. *Теорема 3.5*, в которой говорится об геометрической эквивалентности двух неабелевых частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, и *теорема 3.6*, формулирующая необходимое и достаточное условие универсальной геометрической эквивалентности двух групп из данного класса.

Содержание работы

Диссертация начинается с небольшого параграфа «Предварительные сведения», в котором мы вводим основной объект данной работы частично коммутативную двуступенно нильпотентную $\mathbb{Q}$-группу. Сформулируем основные определения.

Определение 1. *Произвольную коммутативную область целостности содержащую $\mathbb{Z}$ как подкольцо, назовём биномиальным кольцом R, если для каждого элемента $\lambda \in R$ и любого натурального числа n, кольцу R принадлежит следующий биномиальный коэффициент:*

$$C_\lambda^n = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}.$$

Определение 2. *Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется R-группой (здесь R – биномиальное кольцо), если для любого $\lambda \in R$ и $x \in G$ единственным образом определён элемент $x^\lambda \in G$, и для всех элементов группы G и кольца R выполнены следующие аксиомы $(x, y, x_1, \dots, x_n \in G, \lambda, \mu \in R)$:*

1. $x^1 = x,\ x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu},\ (x^\lambda)^\mu = x^{\lambda\mu}.$

2. $y^{-1}x^{\lambda}y = (y^{-1}xy)^{\lambda}$.

3. $x_1^{\lambda} \dots x_n^{\lambda} = (x_1, \dots x_n)^{\lambda} \tau_2^{C_{\lambda}^2}(X) \dots \tau_m^{C_{\lambda}^m}(X)$, *где* $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\tau_i(X)$ – *i-ое слово Петреску. Напомним читателю, что для любого натурального* i, i*-ое слово Петреску рекурсивно определяется следующей формулой:*

$$x_1^i \dots x_n^i = \tau_1^{C_i^1}(X)\tau_2^{C_i^2}(X) \dots \tau_{i-1}^{C_i^{i-1}}(X)\tau_i^{C_i^i}(X)$$

в свободной группе F *с порождающими* $x_1, \dots, x_n$, *в частности,* $\tau_1(X) = x_1x_2 \dots x_n$, $\tau_2(X) = \prod_{i<j,\ i,j=1}^{n} [x_i, x_j] \, mod \, \gamma_3(F)$, *где* $\gamma_3(F)$ – *третий элемент нижнего центрального ряда группы* F.

В данной работе мы будем использовать нильпотентные группы ступени $m = 2$. Всюду далее, коммутатор двух элементов $x, y \in G$ будем обозначать через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, через G' – коммутант группы G и через $Z(G)$ – центр группы G.

Определение 3. *Многообразие двуступенно нильпотентных групп* $\mathfrak{N}_2$ *определяется следующим тождеством:*

$$G \in \mathfrak{N}_2 \text{ если } \forall x, y, z \in G \ [x, y, z] = [[x, y], z] = 1.$$

В многообразии $\mathfrak{N}_2$ третья аксиома в *определении 2* R-группы выглядит следующим образом:

3′. $x_1^{\lambda} \dots x_n^{\lambda} = (x_1, \dots x_n)^{\lambda} \tau_2^{C_{\lambda}^2}(X)$, *где* $\tau_2(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{i<j,\\ i,j=1}}^{n} [x_i, x_j]$.

Класс двуступенно нильпотентных R-групп будем обозначать через $\mathfrak{N}_{2,R}$. Класс $\mathfrak{N}_{2,R}$ является многообразием в языке $L_R = L_{gr} \cup \{f_{\lambda} \mid \lambda \in R\}$, где L_{gr} – стандартный групповой язык, f_{λ} – унарная алгебраическая операция, которая интерпретируется в некоторой алгебраической системе G данного языка следующим образом

$$f_{\lambda}(x) = x^{\lambda}, \text{ где } x \in G.$$

Будем называть алгебраические системы языка L_R R–группами, если в них выполнены аксиомы группы и аксиомы $1, 2$ из *определения 2*, и нильпотентными R-группами, если G – нильпотентная группа и в ней выполнены аксиомы $1, 2, 3$.

Введём основное понятие данной работы – частично коммутативную двуступенно нильпотентную R-группу, где R–биномиальное кольцо, используя то, что в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$, как и в других многообразиях, определена теория определяющих соотношений. Пусть $F_{n,R}$ – свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_{2,R}$, с базой $V = \{a_1, \dots, a_n\}$. Пусть Γ – конечный простой граф (неориентированный граф без кратных рёбер и петель мы называем простым) с множеством вершин $V(\Gamma) = V$ и множеством рёбер $E(\Gamma)$. Определим частично коммутативную двуступенно нильпотентную R-группу соответствующую графу Γ с помощью порождающих и определяющих соотношений в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$:

$$G_\Gamma = \langle V | R_\Gamma \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}}, \text{ где } R_\Gamma = \{[a_i, a_j] = 1 | \ (a_i, a_j) \in E(\Gamma)\}.$$

В данной работе в качестве кольца R будет использоваться поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Таким образом, везде далее за G_Γ мы будем обозначать частично коммутативную двуступенно нильпотентную $\mathbb{Q}$-группу.

В параграфе 1.1 первой главы по конечному неориентированному графу T вводятся формулы специального вида $\phi(T)$ следующим образом: каждой вершине графа T ставится в соответствие одна из букв $z_1, \dots, z_n$ формулы $\phi(T)$, где $|V(T)| = n$. Тогда формула будет иметь вид

$$\phi(T) = \exists z_1 \dots z_n (\bigwedge [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_i z_i \neq 1),$$

где $[z_i, z_j] = 1$ тогда и только тогда, когда вершины, соответствующие z_i и z_j в графе T, соединены ребром, и $[z_k, z_l] \neq 1$ если вершины, соответствующие z_k и z_l в графе T, не соединены ребром.

В первой главе описываются все такие графы T для которых формула $\phi(T)$ выполняется на группе G_Γ для фиксированного графа Γ. Для этого в параграфе 1.2 вводятся специальные операции на графах, называемые раздутием и сжатием первого, второго и третьего рода, удовлетворяющие следующему очень важному свойству: применение данных операций к графу T сохраняет выполнимость формулы на группе G_Γ. Иными словами, если граф T_1 получен из графа T_2 раздутием или сжатием первого, второго или третьего рода, то формула $\phi(T_1)$ выполняется на группе G_Γ тогда и только тогда, когда формула $\phi(T_2)$ выполняется на группе G_Γ.

Задача определения выполняется ли формула $\phi(T)$ на группе G_Γ для заданных графов T и Γ решается последовательно в три этапа:

1. Рассматривается случай, когда граф Γ — линейный граф (параграф 1.3);

2. Рассматривается случай, когда граф Γ является циклом длинны $n \geqslant 4$ без диагоналей (параграф 1.4);

3. Рассматривается случай, когда граф Γ произвольный (параграф 1.5).

Доказательство основано на тщательном разборе первых двух случаев, на базе которых достаточно быстро получается общий случай. Случай п.1 разобран автором диссертации, случай п.2 разобран А.В. Трейером. Для удобства читателя мы приводим в диссертации доказательства результатов, полученных А.В. Трейером. К тому же, критерий выполнимости формулы на группе G_Γ можно существенно уточнить, используя структуру графа Γ, поэтому п.1 и п.2 рассматриваются отдельно.

Под линейным графом длинны $n-1$ мы понимаем граф с вершинами $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $n-1$ ребром, которые соединяют вершины с соседними номерами. Группу G_Γ, построенную по графу Γ, в данном случае обозначим G_n. На рисунке 1 изображен линейный граф длинны 5, по которому строится группа G_6.

Рис. 1: Линейный граф длинны 5, $Path_6$

Линейный граф длинны $n-1$ будем обозначать $Path_n$. Обозначим за $\overline{Path_k}$ класс деревьев, полученных из $Path_k$ добавлением висячих вершин к не висячим вершинам.

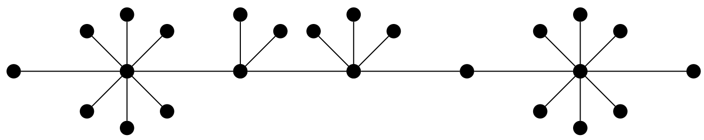

Рис. 2: Граф из класса $\overline{Path_k}$

Обозначим за Cyc_n – цикл длины n без диагоналей.

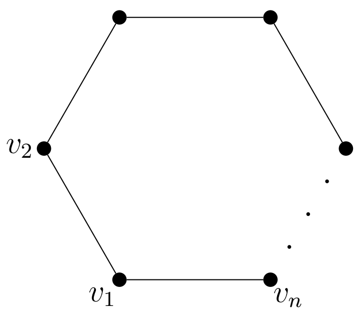

Рис. 3: Граф Cyc_n

Определение. *Конечный граф T назовем k-циклическим графом, если в графе T есть только один цикл длины k без диагоналей.*

Определение. *Обозначим за* $\overline{Cyc_n}$ *класс* n*-циклических графов, полученных из* Cyc_n *добавлением висячих вершин к не висячим вершинам. (См. Рис. 4).*

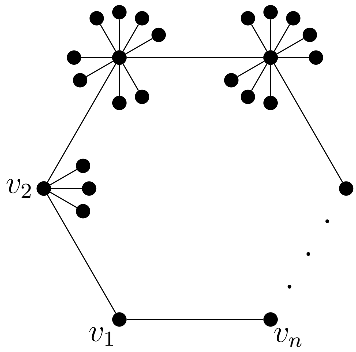

Рис. 4: Граф из класса $\overline{Cyc_n}$

Результаты первой главы можно сформулировать в следующей серии теорем.

Теорема 1.1. *Если* $\phi(T)$ *выполняется на* G_n*, где* T *– дерево, то найдется* $k < n$*, такое, что* $T \in \overline{Path_k}$*.*

Теорема 1.2. *Формула* $\phi(T)$ *выполняется на группе* G_n *для произвольного графа* T*, тогда и только тогда, когда* $T' \in \overline{Path_k}$ *для некоторого* $k < n$*, где* T' *получается из* T *полным сжатием первого и второго рода.*

Следующие три теоремы (*теорема 1.3*, *теорема 1.4* и *теорема 1.5*) принадлежат А.В. Трейеру.

Теорема 1.3. *Если* $\phi(T)$ *выполняется на* G_{Cyc_n}*, где* T *– дерево, то найдется* $k \leq n$*, такое, что* $T \in \overline{Path_k}$*.*

Теорема 1.4. *Если* $\phi(T)$ *выполняется на* G_{Cyc_n}*, где* T *–* n*-циклический граф, то* $T \in \overline{Cyc_n}$*.*

Теорема 1.5. *Формула* $\phi(T)$ *выполняется на группе* G_{Cyc_n} *для произвольного графа* T*, тогда и только тогда, когда* $T' \in \overline{Path_k}$ *или* $T' \in \overline{Cyc_n}$*,* $k \leq n$*, где* T' *получается из* T *полным сжатием первого и второго рода.*

Теорема 1.6. *Формула* $\phi(T)$ *выполняется на группе* G_Γ *для произвольных графов* T *и* Γ*, тогда и только тогда, когда существует граф* Γ_0 *– полученный из* Γ *последовательностью элементарных раздутий и сжатий первого, второго и третьего рода, такой, что* T *полный подграф* Γ_0*.*

Во второй главе диссертации, следуя идеям статьи [25], мы описываем структуру централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы на языке параболических и квазипараболических подгрупп.

Структура централизаторов для свободной частично коммутативной группы описана в работе [25]. Следует отметить, что формулировки результатов, описывающие структуру централизаторов в случае частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп и свободных частично коммутативных групп, весьма схожи, но доказательства этих результатов различаются.

В параграфе 2.2 описывается структура централизатора произвольного элемента группы G_Γ. Результаты параграфа 2.2 принадлежат А.В. Трейеру, но для полноты изложения и удобства читателя мы приводим в диссертации доказательства этих результатов. В параграфе 2.3 вводятся понятия параболической и квазипараболической подгруппы для группы G_Γ. И наконец, в параграфе 2.4 сформулирован и доказан главный результат данной главы – необходимое и достаточное условие, когда произвольная подгруппа группы G_Γ является централизатором некоторого множества элементов (*теорема 2.1*).

Введем основные определения второй главы.

Пусть элемент группы $g \in G_\Gamma$ имеет вид $g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}}$, тогда обозначим

$$\overline{g} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Заметим, что $g = \overline{g} \prod y_{kl}^{\beta_{kl}}$, и для любого элемента группы $w \in G_\Gamma$ выполнено равенство $[w, g] = [w, \overline{g}]$. Для произвольного элемента $g \in G_\Gamma$ определим множество $\alpha(g) \subset X$ – множество всех образующих группы G_Γ входящих в запись $\overline{g}$.

Рассмотрим граф Δ – двойственный к графу Γ, $V(\Delta) = V(\Gamma) = X$ и вершины x_i и $x_j \in V(\Delta)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда x_i и x_j не соединены ребром в графе Γ. Легко заметить, что если $\Delta = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k$, где $I_1, \ldots, I_k$ – компоненты связности графа Δ, то для любых $x_1 \in I_i$ и $x_2 \in I_j$, $i \neq j$ имеем $[x_1, x_2] = 1$. Для элемента $g \in G_\Gamma$ обозначим $\Delta(\alpha(g))$ – максимальный подграф графа Δ на множестве вершин $\alpha(g)$.

Элемент $g \in G_\Gamma$ называется *блоковым*, если $\Delta(\alpha(g))$ – связный граф.

Пусть $g \in G_\Gamma$ и $\Delta(\alpha(g)) = J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_l$, где $J_1, \ldots, J_l$ – компоненты связности графа $\Delta(\alpha(g))$. Тогда $\overline{g}$ можно записать в виде $\overline{g} = w_1 \dots w_l$, где $\Delta(\alpha(w_i)) = J_i$. Назовем $w_1 \dots w_l$ *блоковым разложением* элемента g. Пусть $x \in X$, напомним, что $x^\perp$ мы обозначаем следующее множество $\{y \in X \mid (yx) \in E(\Gamma)\} \cup \{x\}$. Для $Y \subset X$ будем обозначать $Y^\perp = \bigcap\limits_{y \in Y} y^\perp$.

Пусть $Y \subset X$, тогда замыкание множества Y обозначим $cl(Y) = (Y^\perp)^\perp$. Подмножество $Y \subset X$ называется *замкнутым* в X, если $Y = cl(Y)$. Обозначим $CS(X)$ – множество замкнутых в X подмножеств.

Такие же определения введены в [23] для свободной частично коммутативной группы.

Пусть $Y \subset X$, $\Gamma(Y)$ – максимальный подграф графа Γ на вершинах Y, тогда за $\langle Y \rangle$ будем обозначать подгруппу группы G_Γ с множеством порождающих Y

и определяющими соотношениями построенными по графу $\Gamma(Y)$.

Пусть $w \in G_\Gamma$, обозначим за $A(w) = \langle Y \rangle$, где $Y = \alpha(w)^\perp$.

Для произвольного $w \in G_\Gamma$ обозначим за $C(w) = \{g \in G_\Gamma | [g, w] = 1\}$ централизатор элемента w. В параграфе 2.2 описываются множества $C(w)$ для произвольного элемента w группы G_Γ.

Если $|\alpha(w)| = 0$, то $\overline{w} = 1$, и элемент w принадлежит коммутанту. Следовательно, его централизатор совпадает со всей группой G_Γ. Если $|\alpha(w)| = 1$, то легко заметить, что $C(w) = A(w) \cdot G'_\Gamma$.

Теперь рассмотрим случаи, когда $|\alpha(w)| > 1$. Следующая лемма описывает централизатор элемента w в случае если он является блоковым.

Лемма 2.1. *Пусть $w \in G_\Gamma$ блоковый элемент, причем $|\alpha(w)| > 1$. Тогда*

$$C(w) = (\langle \overline{w} \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma$$

В случае, когда w произвольный элемент группы G_Γ, имеем следующее описание централизатора $C(w)$.

Лемма 2.2. *Пусть $w \in G_\Gamma$ и $\overline{w} = w_1 \dots w_k$ – блоковое разложение элемента w, тогда*

$$C(w) = (\prod_{|\alpha(w_i)|>1} \langle w_i \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma.$$

В параграфе 2.3 вводятся понятия параболической и квазипараболической подгрупп. Пусть $Y \subset X$, $\Gamma(Y)$ – максимальный подграф графа Γ на вершинах Y, тогда $G_{\Gamma(Y)} = G_\Gamma(Y) = \langle Y \rangle$ – *каноническая параболическая подгруппа* группы G_Γ.

Определение. *Пусть $G_\Gamma(Y)$ – некоторая каноническая параболическая подгруппа, тогда подгруппу $P(Y) = G_\Gamma(Y) \cdot G'_\Gamma$ назовем параболической подгруппой.*

Лемма 2.5. *Пусть P_1 и P_2 – параболические подгруппы. Тогда $P = P_1 \cap P_2$ также является параболической подгруппой.*

Следствие 2.1. *Пересечение произвольного конечного количества параболических подгрупп также является параболической подгруппой.*

Пусть, как и ранее, Γ – конечный неориентированный граф с множеством вершин X, G_Γ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа соответствующая графу Γ. Пусть $\overline{w} = w_1 \dots w_k$ – блоковое разложение элемента $w \in G_\Gamma$. Введем понятие квазипараболической подгруппы.

Определение. *Подгруппа $Q = (\langle w_1 \rangle \times \dots \times \langle w_k \rangle \times G_\Gamma(Z)) \cdot G'_\Gamma$, где $Z \subset X$, $[\alpha(w), Z] = 1$, $G_\Gamma(Z)$ – каноническая параболическая подгруппа, называется квазипараболической подгруппой.*

Предположим, что $\alpha(w_i) = 1$, для некоторого $i = 1 \ldots k$, то есть блок w_i состоит из одного символа x_t, тогда соответствующая квазипараболическая подгруппа Q допускает запись в более коротком виде: $Q = (\langle w_1 \rangle \times \ldots \times \langle w_{i-1} \rangle \times \langle w_{i+1} \rangle \times \ldots \times \langle w_k \rangle \times G_\Gamma(Z_1)) \cdot G'_\Gamma$, где $Z_1 = Z \cup \{x_t\}$. Мы можем продолжить процесс укорачивания записи подгруппы Q до тех пор, пока не останется блоков, состоящих из одной буквы. Таким образом, можно ввести понятие стандартной записи квазипараболической подгруппы.

Определение. *Квазипараболическая подгруппа $Q = (\langle w_1 \rangle \times \ldots \times \langle w_k \rangle \times G_\Gamma(Z)) \cdot G'_\Gamma$ записана в стандартной форме, если $|\alpha(w_i)| > 1$, $i = 1 \ldots k$.*

Стоит отметить, что запись квазипараболической подгруппы в стандартной форме является единственной.

Лемма 2.7. *Пересечение конечного числа квазипараболических подгрупп является квазипараболической подгруппой.*

В параграфе 2.4 формулируется и доказывается главная теорема второй главы – критерий, по которому можно определить является ли данная подгруппа централизатором некоторого множества элементов группы G_Γ или нет.

Теорема 2.1. *Подгруппа H группы G_Γ является централизатором тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *Подгруппа H – квазипараболическая.*
2. *Если квазипараболическая подгруппа $H = (\langle w_1 \rangle \times \ldots \times \langle w_k \rangle \times G_\Gamma(Y)) \cdot G'_\Gamma$ записана в стандартной форме, то $Y \in CS(X)$ и $Y \in CS(\alpha(w)^\perp)$.*

В разделе 3.1 третьей главы мы приступаем к доказательству гипотезы В.Н. Ремесленникова. Напомним, что В.Н. Ремесленниковым была сформулирована следующая гипотеза: пусть F_{Γ_1} и F_{Γ_2} – частично коммутативные группы, построенные по графам Γ_1 и Γ_2 соответственно, тогда группа F_{Γ_1} универсально эквивалентна группе F_{Γ_2} тогда и только тогда, когда $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2)$. За $\Phi(\Gamma)$ обозначено множество всех формул специального вида $\phi(\Gamma)$, выполненных на группе F_Γ. Определения формул смотри в параграфе 1.1. В разделе 3.1 эта гипотеза доказывается для частично коммутативных групп в многообразии двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, где $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел.

При доказательстве гипотезы использовался критерий универсальной эквивалентности из статьи Г. Баумслага, А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова [14] и результат, полученный в совместной работе с А.В. Трейером [49] – *теорема 1.6*.

Кроме самого критерия универсальной эквивалентности отметим еще один вспомогательный результат.

Теорема 3.2. *Пусть Γ_2 – элементарное раздутие первого, второго или третьего рода графа Γ_1. Тогда группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} – универсально эквивалентны.*

В параграфе 3.1.3 доказывается критерий универсальной эквивалентности, который формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть Γ_1 и Γ_2 – произвольные графы, G_{Γ_1} и G_{Γ_2} – частично коммутативные двуступенно нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы, построенные по графам Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда $G_{\Gamma_1} \equiv_\forall G_{\Gamma_2}$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2)$.*

В разделе 3.2 вводятся основные определения и обозначения алгебраической геометрии над частично коммутативными двуступенно нильпотентными $\mathbb{Q}$-группами.

Пусть G – двуступенно нильпотентная группа. Декартова степень $G^n = G \times \cdots \times G$ (n копий) называется *аффинным пространством над G*. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество букв, а $G[X]$ обозначает нильпотентное произведение $G *_{\mathfrak{N}_2} F(X)$, где $F(X)$ – свободная двуступенно нильпотентная группа с базой X. Система уравнений S над G есть подмножество из $G[X]$. Элемент $u \in S$ может рассматривается как некоммутирующий полином от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из G. Элемент $p = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ назовем *корнем полинома* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, если $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$ в группе G. Пусть S – подмножество $G[X]$, тогда p называется *корнем* S, если p является корнем для каждого $u \in S$. Подмножество V аффинного пространства G^n называется *алгебраическим множеством над* G, если V – множество всех решений системы уравнений $S \subseteq G[X]$. Для данного S через $V_G(S)$ обозначим алгебраическое множество всех решений системы S. Кроме того, для V и S таких, что $V = V_G(S)$, определим *радикал системы* S

$$\mathrm{Rad}_G(V) = \{u \in G[X] \mid u(p) = 1 \text{ для всех } p \in V_G(S)\}.$$

Группа $\Gamma(V) = G[X]/\mathrm{Rad}_G(V)$ называется координатной группой алгебраического множества V. Алгебраические множества и координатную группу аналогичным образом можно ввести и для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы G_Γ, построенной по графу Γ.

В параграфе 3.3 мы рассматриваем свойство геометрической эквивалентности для систем уравнений без коэффициентов. Пусть L – групповой язык без констант.

Определение. *Две группы A и B называются геометрически эквивалентными в языке L, если для любого натурального числа n и для любой системы уравнений S от n переменных имеет место равенство радикалов:*

$$\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S).$$

Другими словами геометрическая эквивалентность двух групп означает, что нахождение решений системы уравнений в одной группе и нахождение решений той же самой системы уравнений в другой группе – эквивалентные задачи.

Теорема 3.5. *Пусть G_{Γ_1} и G_{Γ_2} – две неабелевых частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-группы. Тогда G_{Γ_1} и G_{Γ_2} геометрически эквивалентны.*

Еще одним важным понятием является понятие универсальной геометрической эквивалентности.

Определение. *Две группы A и B называются универсально геометрически эквивалентными в языке L, если для любого натурального числа n и для любой системы уравнений S от n переменных имеет место равенство радикалов:*

$$\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S),$$

и радикал $\mathrm{Rad}_A(S)$ неприводим над A тогда и только тогда, когда радикал $\mathrm{Rad}_B(S)$ неприводим над B.

Теорема 3.6. *Две частично коммутативные двуступенно нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2)$.*

Под основной задачей алгебраической геометрии над группой G мы понимаем задачу классификации всех алгебраических множеств над G. Так же, как и в алгебраической геометрии над полем, здесь справедлива теорема об эквивалентности категории алгебраических множеств и категории координатных групп. Этот результат является основанием для двух эквивалентных подходов к решению основной задачи алгебраической геометрии над G:

- Классификация алгебраических множеств над G;
- Классификация координатных групп над G.

В параграфе 3.4.1 мы получаем описание алгебраических множеств для систем уравнений от одной переменной. Данный результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть G_Γ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа, $X = \{x\}$ – множество переменных, и $S \subseteq G_\Gamma[X]$ - система уравнений от одной переменной. Тогда множество решений $V(S)$ системы S будет одним из следующих:*

1. $V(S) = \varnothing$;
2. $V(S) = G_\Gamma$;

3. $V(S) = \{g\}$, *где* $g \in G_\Gamma$;

4. $V(S) = \{gc \mid c \in C\}$, *где* $g \in G_\Gamma$, *а* C *– централизатор некоторого множества элементов группы* G_Γ.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество переменных, и G_Γ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа с множеством порождающих $\{a_1, \ldots, a_k\}$. И пусть $S \subseteq G_\Gamma[X]$ произвольная система уравнений. Систему S можно записать в общем виде следующем образом

$$\begin{cases} x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_n^{\alpha_{1n}} a_1^{\beta_{11}} \ldots a_k^{\beta_{1k}} \prod\limits_{i<j} [x_i, x_j]^{\gamma_{ij}^{(1)}} \prod\limits_{i,j} [x_i, a_j]^{\delta_{ij}^{(1)}} \prod\limits_{i<j} [a_i, a_j]^{\epsilon_{ij}^{(1)}} & = 1; \\ \ldots & \\ x_1^{\alpha_{m1}} \ldots x_n^{\alpha_{mn}} a_1^{\beta_{m1}} \ldots a_k^{\beta_{mk}} \prod\limits_{i<j} [x_i, x_j]^{\gamma_{ij}^{(m)}} \prod\limits_{i,j} [x_i, a_j]^{\delta_{ij}^{(m)}} \prod\limits_{i<j} [a_i, a_j]^{\epsilon_{ij}^{(m)}} & = 1, \end{cases}$$

где $[a_i, a_j] \neq 1$ в группе G_Γ, и $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}^{(t)}, \delta_{ij}^{(t)}, \epsilon_{ij}^{(t)} \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим матрицу коэффициентов при переменных из X

$$A(S) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}.$$

В параграфе 3.4.2 дается описание множества решений системы S, состоящей из m уравнений, от n переменных над частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группой в случае, когда матрица коэффициентов при переменных $A(S)$ имеет ранг m.

Теорема 3.8. *Пусть G_Γ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество переменных, и $S \subseteq G_\Gamma[X]$ – система из m уравнений от n переменных над группой G_Γ. Кроме того пусть матрица коэффициентов переменных $A(S)$ имеет ранг m. Тогда множество решений $V(S)$ системы S с точностью до изоморфизма будет одним из следующих:*

1. $V(S) = (g_1, \ldots, g_n) \in G_\Gamma^n$;

2. $V(S) = G_\Gamma^{(n-m)}$ *– аффинное пространство над группой G_Γ размерности* $n - m$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Владимиру Никаноровичу Ремесленникову за постановку задачи и внимательное отношение к идеям по ее решению, а также Эвелине Даniяровой за обсуждение результатов и конструктивные советы.

Список литературы

[1] Э.Ю. Даниярова. Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли // Вестник Омского Университета, специальный выпуск, С. 8–40, 2007.

[2] Г.С. Маканин. Уравнения в свободной группе // Изв. АН СССР, сер. мат., 46(6) С. 1199–1273, 1982.

[3] А.Г. Мясников, В.Н. Ремесленников. Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп // Докл. АН. СССР, 258(5), С. 1056–1059, 1981.

[4] А.А. Разборов. О системах уравнений в свободной группе // Изв. АН СССР, сер. мат., 48(4), С. 779–832, 1982.

[5] В.Н. Ремесленников. E-свободные группы // Сиб. мат. журн., 30(6), С. 153–157, 1989.

[6] В.Н. Ремесленников. Размерность алгебраических множеств над свободной метабелевой группой // Фундам. и прикл. мат., 7, С. 873–885, 2000.

[7] В.Н. Ремесленников, Н.С. Романовский. О метабелевых произведениях групп // Алгебра и логика, 43(3), С. 341–352, 2004.

[8] В.Н. Ремесленников, Н.С. Романовский. О неприводимых множествах в метабелевых группах // Алгебра и логика, 44(5), С. 601–621, 2005.

[9] В.Н. Ремесленников, Е.И. Тимошенко. О топологической размерности u-групп // Сиб. мат. журн., 47(2), С. 414—430, 2006.

[10] Н.С. Романовский. Делимые жёсткие группы // Алгебра и Логика, 47(6), С. 762—776, 2008.

[11] Н.С. Романовский. Нётеровость по уравнениям жёстких разрешимых групп // Алгебра и Логика, 48(2), С. 258–279, 2009.

[12] K.I. Appel. One-variable equations in free groups // Proc. Amer. Math. Soc., 19, pp. 912–918, 1968.

[13] C. Bates, D. Bundy, S. Perkins and P. Rowley. Commuting Involution Graphs for Symmetric Groups // J. Algebra, 266, pp. 133–153, 2003.

[14] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups. I. Algebraic set and ideal theory // J. Algebra, 219(1), pp. 16–79, 1999.

[15] R. Brauer and K.A. Fowler. On groups of even order // Ann. Math, 62, pp. 565–583, 1955.

[16] R. Bryant. The verbal topology of a group // J. Algebra, 48, pp. 340–346, 1977.

[17] C.C. Chang, H.J. Keisler. Model theory // North-Holland Publ. C., New York, 1973.

[18] O. Chapuis. ∀-free metabelian groups // J. Symbolic Logic, 62, pp. 159–174, 1997.

[19] R. Charney. An introduction to right-angled Artin groups // Geometriae Dedicata, 125, pp. 141–158, 2007.

[20] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra and Discrete Mathematics, 1, 2008.

[21] C. Droms. Isomorphisms of graph groups // Proc. Am. Math. Soc., 100, pp. 407–408, 1987.

[22] G. Dunchamp, D. Krob. Partially commutative Magnus transformations // Int. J. Algebra Comput., 3(1), pp. 15–41, 1993.

[23] A.J. Duncan, I.V Kazachkov, V.N. Remeslennikov. Centraliser dimension and universal classes of groups // Siberian Electronic Mathematical Reports, 3, 2006. http://semr.math.nsc.ru/2006/V3/p197-215.pdf.

[24] A.J. Duncan, I.V Kazachkov, V.N. Remeslennikov. Orthogonal systems in finite graphs // Siberian Electronic Mathematical Reports, 5, pp. 151–176, 2008.

[25] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov. Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups // J. Algebra, 318(2), pp. 918–932, 2007. www.arxiv.org/math.GR/0702431.

[26] E. Esyp, I. Kazachkov, V. Remeslennikov. Divisibility theory and complexity of algorithms for free partially commutative groups // Groups, Languages, Algorithms. Contemoprary Mathematics, 378, pp. 319–348, 2005.

[27] R.I. Grigorchuk, P.F. Kurchanov. On quadratic equations in free groups // Contemp. Math., 131(1), pp. 159–171, 1992.

[28] C.K. Gupta, N.S. Romanovskiy. The property of being equationally Noetherian for some soluble groups // Algebra and Logic, 46(1), pp. 28-36, 2007.

[29] T. Hsu, D. Wise. On linear and residual properties of graph products // Mich. Math. J., 46(2), pp. 251–259, 1999.

[30] O. Kharlampovich, A. Myasnikov. Irreducible affine vatieties over free group I: irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz // J. Algebra, 200, pp. 472–516, 1998.

[31] O. Kharlampovich, A. Myasnikov. Irreducible affine vatieties over free group II: systems in trangular quasi-quadratic form and description of residually free groups // J. Algebra, 200(2), pp. 517–570, 1998.

[32] O. Kharlampovich, A. Myasnikov. Algebraic Geometry over Free Groups: Lifting solutions into generic points // Contemp. Math., 378, pp. 213–318, 2005.

[33] M.R. Laurence. A generating set for the authomorphism groups of a graph group // J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 52(2), pp. 318–334, 1995.

[34] R.C. Lyndon. Groups with parametric exponents. // Trans. Amer. Math. Soc., 96, pp. 518–533, 1960.

[35] A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations. // J. Algebra, 234(1), pp. 225–276, 2000.

[36] A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov. Exponential groups 2: extension of centralizers and tensor completion of csa-groups // International Journal of Algebra and Computation, 6(6), pp. 687–711, 1996.

[37] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, D. Serbin. Regular free length functions on Lyndon's free $\mathbb{Z}(t)$-group $F^{\mathbb{Z}(t)}$ // Contemp. Math., 378, pp. 37–77, 2005.

[38] B. Plotkin. Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties // Siberian Advances in Math., 7(2), pp. 64–97, 1997.

[39] B. Plotkin. Varieties of algebras and algebraic varieties // Izrael J. Math., 96(2), pp. 511–522, 1996.

[40] A. Razborov. On systems of equations in a free groups // Combinatorial and geometric group theory, Edinburgh 1993, Cambridge University Press, pp. 269–283, 1995.

[41] V. Remeslennikov, R. Stöhr. On algebraic sets over metabelian groups // J. Group Theory, 8, pp. 491–513, 2005.

[42] V. Remeslennikov, R. Stöhr. On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group // Algebra Colloq., 11, pp. 191–214, 2004.

[43] Z. Sela. Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams // Publications Mathematiques de l'IHES, 93, pp. 31–105, 2001.

[44] H. Servatius. Automorphisms of Graph Groups // J. Algebra, 126(1), pp. 34–60, 1989.

Список работ автора

[45] А.А. Мищенко. Об универсальной эквивалентности частично коммутативных двуступенно нильпотентных Q-групп // Вестника Омского Университета специальное издание, С. 93–100, 2008.

[46] А.А. Мищенко. Структура координатных групп для алгебраических множеств в частично коммутативных нильпотентных группах // Алгебра и логика, 48(3), С. 378–399, 2009.

[47] А.А. Мищенко, А.В. Трейер. Выполнимость E-формул на частично коммутативных двуступенно нильпотечных Q-группах // Вестник Омского Университета. 1, С. 15–17, 2006.

[48] А.А. Мищенко, А.В. Трейер. Структура централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной Q-группы // Вестника Омского Университета спец. выпуск., С. 98-102, 2007.

[49] А.А. Мищенко, А.В. Трейер. Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных Q-групп // Siberian Electronic Mathematical Reports, 4, С. 460–481, 2007.

Мищенко Алексей Александрович

Теоретико-модельные и алгебро-геометрические задачи для нильпотентных частично коммутативных групп

Специальность
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 17.11.2009. Формат бумаги 60x84 1/16.
Печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 110 экз. Заказ 502.
Издательство ОмГУ
644077, г. Омск-77, пр. Мира 55-а.