

На правах рукописи



МЕЛЬНИКОВ АЛЕКСАНДР ГЕННАДЬЕВИЧ

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ  
АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск

2011

Работа выполнена в Государственном образовательном  
учреждении высшего профессионального образования  
«Новосибирский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических  
наук, член–корреспондент РАН  
Гончаров Сергей Савостьянович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических  
наук, профессор  
Хисамиев Назиф  
Гарифуллинович

доктор физико–математических  
наук, профессор  
Добрица Вячеслав Порфирьевич

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Казанский  
(Приволжский) федеральный  
университет»

Защита состоится “ 26 ” января 2012 г. в 14.00 часов на  
заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Инсти-  
туте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения  
Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптю-  
га 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ново-  
сибирского государственного университета.

Автореферат разослан “ 19 ” декабря 2011 г.  
Ученый секретарь

диссертационного совета

кандидат физико-математических наук,  
доцент

А.Н.Ряскин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации изучаются эффективные свойства абелевых групп без кручения специального естественного класса: вполне разложимых абелевых групп. Впервые (классически) эти группы систематически изучались в работе Бэра [4]. Предложенные в диссертации результаты используют новые теоретико-групповые и теоретико-рекурсивные методы и продолжают традицию, заложенную еще в работах А.И. Мальцева [31], [30].

Объект исследования и актуальность темы. Объектом исследования в диссертации является класс вполне разложимых абелевых групп и его эффективные алгоритмические свойства. Класс вполне разложимых абелевых групп был введен Бэром [4]. Абелева группа называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму аддитивных подгрупп рациональных чисел. Напомним, что абелева группа без кручения - это такая коммутативная группа, у которой всякий элемент имеет бесконечный порядок. Класс вполне разложимых групп - это, пожалуй, единственный естественный класс абелевых групп без кручения, который имеет достаточно развитую структурную теорию [14].

В диссертации исследуются эффективные свойства вполне разложимых абелевых групп. Изучение эффективных процедур в теории групп предшествовало формальному определению алгоритма. Отправной точкой здесь можно считать работы Дена [8] и Хигмана [23], где изучались свойства конечно порожденных групп. Схожие по духу исследования велись и в других разделах алгебры: интуитивно эффективные процедуры применялись в теории полей, колец и других алгебра-

ических структур (см., например, ван дер Варден [44], Херрманн [21]). Современная теория вычислимых групп (не обязательно абелевых) берет своё начало в работах Рабина [39] и Мальцева [30], [31], где использовалось известное к тому времени формальное понятие алгоритма.

Мальцев был также первым, кто предпринял систематическое изучение вычислимых свойств абелевых групп [30], [31]. Вычислимые абелевы группы активно изучаются и представляют собой достаточно хорошо развитую теорию. Подробное изложение основ этой теории можно найти в обзорной статье Хисамиева [25] или в заключительной главе книги Доуни [9]. Последняя глава этой диссертации посвящена случаю, когда вполне разложимая группа является, кроме того, упорядоченной группой. Теория вычислимых линейно упорядоченных абелевых групп является сравнительно молодой, однако активно развивается. Основы этой теории достаточно подробно представлены в работе Гончарова, Лемппа и Соломона [20].

На сегодняшний день теория вычислимых и эффективно представимых абелевых групп является частью более общей теории вычислимых моделей (см. Ершов и Гончаров [18], Найт [3], Доуни [9]). Основными объектами этой теории являются вычислимые алгебраические структуры (или модели): это те алгебраические структуры, в которых множество элементов, операции и отношения заданы некоторыми равномерно вычислимыми процедурами. Если структура имеет вычислимую изоморфную копию, то говорят, что эта структура имеет вычислимое представление или конструктивизацию. Естественно также рассматривать вычислимые изомор-

физмы между вычислимыми структурами. Как было отмечено Мальцевым [31], две изоморфных вычислимых структуры не обязательно вычислимо изоморфны. По-видимому, первым естественным примером такой алгебраической структуры оказалась именно абелева группа. Мальцев построил две изоморфные вычислимые абелевы группы, которые не являются вычислимо изоморфными. В связи с этим было предложено понятие автоустойчивой структуры. Говорят, что вычислимо представимая структура автоустойчива, если любые ее два вычислимых представления вычислимо изоморфны [18]. Автоустойчивые структуры часто называют вычислимо категоричными [3].

Сформулируем две фундаментальных проблемы современной теории вычислимых моделей. Первая проблема - это проблема вычислимой представимости, а именно: Для данной структуры выяснить, имеет ли эта структура вычислимое представление. Более общо, описать все вычислимо представимые структуры в данном классе структур (например, в классе всех абелевых  $r$ -групп). Вторая проблема - это характеристизация вычислимой категоричности: Для данной структуры выяснить, является ли эта структура вычислимо категоричной. Более общо, описать все вычислимо категоричные структуры в данном классе структур (например, в классе всех булевых алгебр).

Нас интересуют эти проблемы для класса абелевых групп. Для других структур эти проблемы также активно изучались и изучаются (см., например, [18] и [16]). Заметим, что удовлетворительный ответ на любой из двух сформулированных выше проблем для некоторого данного класса структур,

как правило, возможен только в случае наличия подходящих удобных инвариантов в этом классе структур.

Что касается критерия вычислимой представимости, то для нас особый интерес представляют результаты в теории вычислимых абелевых групп. Мальцев [31] охарактеризовал вычислимо представимые аддитивные подгруппы рациональных чисел. Эта характеристика, несмотря на ее простоту, до сих пор играет фундаментальную роль в теории абелевых групп без кручения. Значительно более поздний результат - это описание вычислимо представимых абелевых  $p$ -групп конечной Ульмовой длины, полученное Хисамиевым [25]. Для этого описания Хисамиев ввел понятие монотонной вычислимой аппроксимации множества. Отметим, что понятие вычислимой монотонной аппроксимации нашло применение в других актуальных задачах теории вычислимых моделей ([27], [24], [6]), а также активно изучается с точки зрения чистой теории вычислимости ([13]). Еще один результат в этом направлении - это недавно полученная характеристика вычислимо представимых абелевых групп без кручения, являющихся прямыми суммами аддитивных групп локализаций целых чисел. Проблема характеристики таких групп была поставлена Хисамиевым в [26]. Хисамиев [26] также получил частичное решение этой проблемы для класса таких групп с некоторыми дополнительными условиями. Проблема была решена в [12]. Было показано, что такая группа имеет вычислимую копию тогда и только тогда, когда множество простых чисел, по которым берется локализация, принадлежит уровню  $\Sigma_3^0$  арифметической иерархии (см. [43]).

Заметим, что в предложенных нами выше результатах ис-

пользуются простые алгебраические инварианты, но каждая характеристика требует от соответствующего инварианта некоторого эффективного свойства. Классическая простота инварианта вовсе не означает, что доказательства тоже просты, поскольку эффективные свойства инварианта могут оказаться нетривиальными. Как следствие, наличие удовлетворительной классификации для богатых классов структур весьма редки. Например, хорошо известно, что (классически) абелевы  $p$ -группы описываются их Ульмовыми типами [14], причем этот факт нельзя назвать трудным. Однако обобщение результата Хисамиева [25] на случай бесконечной Ульмовой длины неизвестно и является открытой проблемой уже около 20 лет. Для более широких классов проблемы зачастую оказываются чрезвычайно сложными или даже настолько сложными, насколько вообще возможно (см., например, Гончаров и Найт [19]). Доуни и Монталбан [11] показали, что проблема изоморфизма для вычислимых абелевых групп без кручения является полной в классе  $\Sigma_1^1$ . Интуитивно это означает, что у вычислимых абелевых групп без кручения не может быть инвариантов, которые описывали бы их с точностью до изоморфизма и которые были бы устроены алгоритмически проще, чем сами группы. Поэтому для более глубокого понимания проблемы вычислимой представимости рассматривают обобщение этой проблемы: Для данного класса алгебраических структур и данного оракула  $X$  охарактеризовать все структуры этого класса вычислимые относительно  $X$ . Для данной структуры описать все оракулы  $X$ , относительно которых эта структура является вычислимо представимой.

Множество оракулов (более точно - Тьюринговых степе-

ней), относительно которых структура вычислимо представима, называется степенным спектром данной структуры [41]. Степенные спектры структур активно изучаются [37], [24], [22]. Особое место занимает пример, предложенный Сламаном [42], и аналогичный пример, построенный независимо Венером [45]. Венер и Сламан показали, что существуют структуры, которые вычислимо представимы относительно произвольного невычислимого оракула, но при этом не являются вычислимо представимыми. Этот пример показывает, что в общем случае невозможно сформулировать достаточно условия на существование вычислимой копии в терминах степенных спектров. Действительно, даже самое сильное из мыслимых условий оказывается недостаточным. Однако для некоторых естественных классов структур такие условия были получены. Например, хорошо известно, что если булева алгебра имеет представление относительно  $low_4$  оракула, то эта булева алгебра вычислимо представима [28].

С другой стороны, характеристики вычислимой категоричности для многих богатых классов структур известны. Например, булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она имеет конечное число атомов (Гончаров [16]), линейный порядок вычислимо представим если и только если в нем имеется конечное число непосредственных следований (Реммель [40]), и абелева группа без кручения вычислимо категорична в точности когда ее ранг конечен (Гончаров [17], Нуртазин [38]). Говорим, что структура  $\mathcal{A}$  является  $\Delta_n^0$ -категоричной, если  $\mathcal{A}$  вычислимо категорично относительно оракула  $\emptyset^{(n-1)}$ , где  $\emptyset^{(n-1)}$  - это  $(n-1)$ -тая итерация проблемы остановки. Если известна характеристика

вычислимо категоричных представителей данного класса, то естественно поставить вопрос о характеристизации  $\Delta_n^0$  - категоричных представителей этого класса. Как правило, эта проблема оказывается значительно более сложной. Очень немного известно о  $\Delta_n^0$  - категоричных структурах. Из-за проблем технического характера, полную характеристизацию  $\Delta_n^0$  - категоричных структур для естественных классов получить, как правило, не удастся. Однако есть целый ряд частичных результатов в этом направлении. Например, в [32] описаны  $\Delta_2^0$  - категоричные линейные порядки и булевы алгебры с некоторыми дополнительными условиями. Кроме того, известно, что  $\Delta_{n+1}^0$  - категоричность не влечет  $\Delta_n^0$  - категоричности для линейных порядков [1], булевых алгебр [3] и абелевых  $p$  - групп [5].

Несмотря на то, что проблема вычислимой представимости и вычислимой категоричности относительно оракула хорошо изучены классов для линейных порядков [10] [2], булевых алгебр [16] и абелевых  $p$ -групп [25] [5], эти проблемы для абелевых групп без кручения представляются широко открытыми.

Целями исследования данной диссертации являются: исследование проблем вычислимой представимости и вычислимой категоричности, а также их обобщений для вполне разложимых абелевых групп и линейно упорядоченных вполне разложимых абелевых групп.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с использованием методов теории вычислимости [43], теории абелевых групп и модулей [15], [14], а также теории вычислимых алгебраических систем [18], [3].

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены подробными доказательствами, а также опубликованы автором диссертации в научных журналах.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях в теории вычислимых алгебраических систем.

Основные результаты. В работе получены следующие основные результаты:

- Предложен метод эффективного кодирования семейств конечных множеств во вполне разложимые группы. При помощи этого кодирования построен пример вполне разложимой абелевой группы, имеющей  $X$  - вычислимую копию в точности для таких  $X$ , что  $X' = 0'$ . Это также первый и единственный известный пример абелевой группы со спектром, близким к спектру Сламана-Венера [42], [45].
- Предложено алгебраическое понятие  $S$ -независимости и изучены его свойства. При помощи свойств  $S$ -независимости показано, что всякая однородная вполне разложимая группа категорична относительно  $0''$ .
- Предложен метод эффективного кодирования линейных порядков в упорядоченные вполне разложимые абелевы группы. Метод применен для изучения свойств вычислимых упорядоченных вполне разложимых групп. Все следствия являются новыми не только для упорядоченных вполне разложимых групп, но и для упорядоченных абелевых групп в целом.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на следующих конференциях:

Международная конференция “Мальцевские чтения” 2009, 2010 и пленарный доклад в 2011 году.

Международная конференция Asian Logic Colloquium, 2011, секционный доклад.

Международная конференция “Computability in Europe” 2007, 2009, 2010.

Международная конференция “Logic colloquium” 2005, 2006.

XLIV и XLV Международная студенческая конференция (Новосибирск, 2006 и 2007).

Результаты докладывались на семинарах:

“Theory Seminar” в 2010 году, (Auckland, The University of Auckland, рук. – профессор Khoussainov B.).

“Алгебра и логика” в 2007 году (Новосибирск, ИМ СО РАН, рук. – академик Ершов Ю.Л.).

Публикация результатов. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [46-54], из них [50-53] входят в перечень ВАК рецензируемых научных журналов на английском языке, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, каждая из которых разбита на параграфы, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 94 страниц. Список литературы содержит 55 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит более подробное обсуждение и обоснование актуальности проводимых исследований. Также во введении формулируются основные результаты диссертации.

Первая глава содержит понятия, необходимые для дальнейшего изложения. Почти все предложенные понятия являются классическими и могут быть найдены в литературе [43], [18], [14], [29]. Глава состоит из двух параграфов. В первом из двух параграфов напоминаются известные определения из теории вычислимости и теории вычислимых моделей, во втором параграфе содержатся необходимые элементарные основы теории абелевых групп.

Вторая глава содержит необходимые для последующих глав факты и свойства вполне разложимых групп. Эту главу можно считать введением в теорию вычислимых вполне разложимых групп. В первом параграфе доказаны некоторые нетрудные факты о степенных спектрах вполне разложимых абелевых групп. Некоторые из этих фактов хорошо известны, другие же являются новыми. В частности, независимый интерес представляют следующее предложение и следствие, которые отвечает на вопросы Доуни [9] (см. также [7]) о прыжковых степенях групп конечного ранга:

Предложение 6. Всякая абелева группа без кручения имеет прыжковую степень. Более того, всякая степень  $a \geq 0'$  реализуется в качестве точной прыжковой степени некоторой абелевой группы без кручения конечного ранга  $n$ , где  $n$  - произвольное ненулевое число.

Следствие 1. Для всякой Тьюринговой степени  $a > 0''$ , су-

существует вполне разложимая абелева группа без кручения, имеющая точную вторую прыжковую степень  $a$ . Для всякой Тьюринговой степени  $b > 0'''$ , существует вполне разложимая абелева группа без кручения, имеющая точную третью прыжковую степень

Второй параграф содержит необходимую информацию о вычислимых модулях и их свойствах, которые потребуются в Главе 4. Результаты Главы 2 либо являются элементарными и общеизвестными, либо опубликованы в [36].

Третья глава полностью посвящена построению примера вполне разложимой абелевой группы, кодирующей семейство конечных множеств с потерей скачка:

Теорема 4. Для всякого семейства  $R$  конечных множеств существует вполне разложимая абелева группа без кручения  $G(R)$ , такая что  $G(R)$  имеет  $X$ -вычислимую копию если и только если  $R$  имеет  $\Sigma_2^X$ -нумерацию.

Как следствие, показано существование вполне разложимой группы со степенным спектром, близким к спектру типа Сламана-Венера ([42], [45]):

Теорема 5. Существует вполне разложимая абелева группа без кручения  $G$  бесконечного ранга, такая что  $G$  имеет  $X$ -вычислимую копию тогда и только тогда, когда  $X' >_T 0'$ , то есть имеет в точности не-низкие копии. Кроме того, всякое прямое слагаемое этой группы в полном прямом разложении этой группы имеет вычислимое представление.

Результаты главы опубликованы в [36].

Четвертая глава изучает эффективную категоричность однородных вполне разложимых групп. В первом параграфе

вводится новое алгебраическое понятие  $S$  - независимости, которое является обобщением классического понятия  $p$  - независимости [14], а также доказываются свойства  $S$  - независимых множеств вполне разложимых групп.

Определение 23. Пусть  $S$ -множество простых чисел, и пусть  $G$  - абелева группа без кручения. Если  $S \neq \emptyset$ , то говорим что  $b_1, \dots, b_k$  из  $G$   $S$ -независимы в  $G$  если  $p | \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} m_i b_i$  in  $G$  влечет  $\bigwedge_{i \in \{1, \dots, k\}} p | m_i$ , для любых целых  $m_1, \dots, m_k$  и всякого  $p \in S$ . В особом случае когда  $S = \emptyset$  полагаем что  $S$ -независимость - это то же, что линейная независимость.

Если базис группы  $S$ - независим, то мы называем его совершенным базисом. Основным результатом параграфа является:

Теорема 6. Пусть  $\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in \omega} H$ , где  $H \leq Q$ ,  $\mathfrak{t}(H) = \mathbf{f}$  и  $\alpha$  имеет тип  $\mathbf{f}$ . Тогда  $\mathcal{G}[\alpha] \cong G_P$ , где  $P = \{p : h_p = \infty \text{ in } \alpha\}$ . Кроме того, если  $B$  совершенный  $\widehat{P}$ -базис  $\mathcal{G}[\alpha]$ , то  $\mathcal{G}$  порожден  $B$  над  $Q(\alpha)$ .

Во втором параграфе  $S$  - независимые множества применяются для доказательства следующей теоремы, которая является основным результатом всей главы:

Теорема 7. Всякая вычислимая однородная вполне разложимая группа  $\Delta_3^0$ -категорична.

Результаты главы опубликованы в [33].

Пятая Глава содержит полное описание  $\Delta_2^0$  категоричных однородных вполне разложимых групп. Для этого вводится новое понятие:

Определение 26. Пусть  $\alpha = (h_i)_{i \in \omega}$  - последовательность, в которой  $h_i \in \omega \cup \{\infty\}$  для каждого  $i$  (другими словами, пусть  $\alpha$

- характеристика). Пусть, кроме того, существует неубывающая вычислимая аппроксимация  $h_{i,s}$  такая, что  $h_i = \sup_s h_{i,s}$ , для всякого  $i$ .

Говорим, что  $\alpha$  имеет вычислимую грань, если существует вычислимая функция  $\psi : \omega \rightarrow \omega$ , такая что

$$h_i = \begin{cases} h_{i,\psi(i)}, & \text{если } h_i \text{ конечна,} \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для каждого  $i$ . Мы также говорим, что  $\psi$  является вычислимой гранью для  $(h_{i,s})_{i,s \in \omega}$ .

Это понятие является новым и (в некотором смысле) обобщает понятие монотонной аппроксимации, принадлежащее Хисамиеву [25]. Понятие вычислимой грани применяется для доказательства основного результата:

**Теорема 9.** Вычислимая однородная вполне разложимая абелева группа  $G$  является  $\Delta_2^0$ -категоричной если и только если  $G$  изоморфна  $G_P$ , где  $\widehat{P}$  является semi-low.

Множества, являющиеся semi-low, играют фундаментальную роль в описании теоретико-решеточных свойств в.п. множеств (см. [43]). Доказательство основной теоремы разбивается на несколько случаев, в каждом из случаев требуются разные стратегии.

Результаты получены в неразделимом соавторстве с профессором Доуни, по материалам Главы 5 подготовлена совместная публикация. Опубликованы тезисы [35].

Таким образом, Главы 4 и 5 полностью описывают  $\Delta_n^0$ -категоричность в классе однородных вполне разложимых групп.

Шестая глава изучает линейно упорядоченные вполне разложимые группы. В первом параграфе главы показано, что такие группы могут кодировать произвольный счетный линейный порядок с потерей скачка:

Теорема 10. Существует преобразование  $\Phi$  класса линейных порядков в класс упорядоченных вполне разложимых абелевых групп такое, что  $\Phi$  инъективно на типах изоморфизма. Более того, линейный порядок  $L$  имеет  $\Delta_2^0$ -представление если и только если соответствующая упорядоченная группа  $\Phi(L)$  имеет вычислимую копию. Результат релятивизуем.

Мы применим эту теорему и результаты из [2], чтобы получить результаты о прыжковых степенях упорядоченных вполне разложимых групп.

Следствие 5. Для всякого  $n \geq 3$  и любой Тьюринговой степени  $a \geq 0^{(n)}$  существует вполне разложимая линейно упорядоченная абелева группа без кручения, имеющая точную  $n$ -тую прыжковую степень  $a$ .

Во втором параграфе главы кодирование из первого параграфа использовано для доказательства:

Теорема 11. Пусть  $\alpha = 2n + 1$  или  $\alpha = \delta + 2n$  - вычислимый ординал, где  $\delta$  - это предельный ординал, и  $n \in \omega$ . Тогда существует упорядоченная вполне разложимая абелева группа, которая  $\Delta_\alpha^0$  - категорична, но не  $\Delta_\beta^0$  - категорична, для всех  $\beta < \alpha$ .

Этот результат контрастирует с результатами Главы 4. Результаты Главы 6 опубликованы в [34].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. С. Гончарову за постановку задач, всестороннюю поддержку и внимание к работе. Автор благодарен профессору Б. Хусаинову за понимание и поддержку на всех стадиях подготовки текста диссертации, а также за дискуссии по материалам Главы 6. Автор признателен И.Ш. Калимуллину за плодотворные беседы по материалам Главы 5.

# Литература

- [1] Ash, C.J., Recursive labeling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees, Trans. of Amer. Math. Soc., vol. 298(1986), pp. 497-514.
- [2] C. J. Ash, C. G. Jockusch, Jr., and J. F. Knight. Jumps of orderings. Trans. Amer. Math. Soc., 319(2):573–599, 1990.
- [3] Ash, C.J., Knight J.F., Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [4] Baer, R., Abelian Groups Without Elements of Finite Order, Duke Math. J., 3 (1937), 68 - 122.
- [5] Barker, E.J., Back and forth relations for reduced abelian p-groups, Annals of Pure and Applied Logic 75 (1995), pp. 223-249.
- [6] Barbara F. Csima, Denis R. Hirschfeldt, Julia F. Knight, and Robert I. Soare. Bounding prime models. J. Symbolic Logic, Volume 69, Issue 4 (2004), 1117-1142.
- [7] Coles, R., Downey, R., Slaman, T., Every Set Has a Least Jump Enumeration. J. London Math. Soc. (2) 62 No.3, 641-649.

- [8] Dehn, M, "Uber unendliche diskontinuierliche gruppen, Annals of Math., Vol. 71 (1911), 116-144.
- [9] Rodney G. Downey. On presentations of algebraic structures. In Complexity, logic, and recursion theory, volume 187 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pages 157–205. Dekker, New York, 1997.
- [10] Rodney Downey and Julia F. Knight. Orderings with  $\alpha$ th jump degree  $0^{(\alpha)}$ . Proc. Amer. Math. Soc., 114(2):545–552, 1992.
- [11] Downey, R., Montolban, A., The isomorphism problem for torsion-free abelian groups is analytic complete, Journal of Algebra, Vol 320, 2008, pp. 2291-2300.
- [12] Rod Downey, Sergei S. Goncharov, Asher Kach, Julia F. Knight, Oleg V. Kudinov, Alexander Melnikov and Daniel Turetsky. Decidability and Computability of Certain Torsion-Free Abelian Groups, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol 51, number 1, 2010.
- [13] Rodney Downey, Asher M. Kach, and Daniel Turetsky. Limitwise monotonic functions and applications. Proceedings of the Asian Logic Conference, to appear.
- [14] László Fuchs. Infinite abelian groups. Vol. I. Pure and Applied Mathematics, Vol. 36. Academic Press, New York, 1970.
- [15] László Fuchs. Infinite abelian groups. Vol. II. Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II.

- [16] Goncharov, S.S. Countable Boolean Algebras and Decidability, Siberian School of Algebra and Logic, Novosibirsk, Nauchnaya Kniga, 1996.
- [17] Goncharov, S.S., Autostability of models and abelian groups, Algebra and Logic, 1980, vol. 19, 13 - 27 (English translation).
- [18] Goncharov S., Ershov, Yu., Constructive models, Kluwer Academic Pub., 2000.
- [19] Goncharov, S., Knight, J., Computable Structure and Non-Structure Theorems, Algebra and Logic, vol. 41 (6), 2002, pp. 351-373.
- [20] Goncharov S., Lempp S., Solomon R., The computable dimension of ordered abelian groups, Advances in Mathematics, 175 (2003), pp. 102-143.
- [21] Grete Hermann. Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Ann. Vol. 95(1):736–788, 1926.
- [22] Hirschfeldt, D., Khoussainov, B., Shore, R., Slinko, A., Degree Spectra and Computable Dimensions in Algebraic Structures, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 115 (2002), pp. 71 - 113.
- [23] Higman, G., Subgroups of finitely presented groups, Proc. Royal Soc. London, Vol. 262 (1961), 455-475.
- [24] Iskander Kalimullin, Bakhadyr Khoussainov, and Alexander Melnikov, Limitwise Monotonic Sequences and Degree Spectra of Structures (submitted).

- [25] Khisamiev, N., Constructive abelian groups, in Handbook of recursive mathematics, v.2, part 2, Elsevier, 1998.
- [26] Khisamiev, N. On a class of strongly decomposable abelian groups. *Algebra Logika*, 41(4):493–509, 511–512, 2002.
- [27] Bakhadyr Khoussainov, Andre Nies, and Richard A. Shore. Computable models of theories with few models. *Notre Dame J. Formal Logic*, 38(2):165-178, 1997.
- [28] Julia F. Knight, Michael Stob. Computable Boolean Algebras. *J. Symb. Log.*, 2000: 1605 1623.
- [29] Lang, S., *Algebra*, Springer, 2002.
- [30] Mal'cev, Anatolii I., Constructive algebra I, *Russian Math. Surveys* 16 (1961), 77–129.
- [31] A. I. Mal'cev. On recursive Abelian groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 146:1009–1012, 1962.
- [32] McCoy, C.,  $\Delta_2^0$ -Categoricity in Boolean algebras and linear orderings, *Annals of Pure and Applied Logic*, 119 (2003), 85 - 120.
- [33] Melnikov, A.,  $0''$ -Categorical Completely Decomposable Torsion-Free Abelian Groups, *Lecture Notes in Computer Science*, “Mathematical Theory and Computational Practice”, Springer, Volume 5635/2009, pp. 362-371.
- [34] Melnikov, A.G. Computable ordered abelian groups and fields, *Proceedings of CiE 2009*, LNCS Springer, Volume 6158/2010, pp. 321-330.

- [35] Melnikov, A.G. Interactions of computability and effective group theory, Proceedings of ALC 2011, accepted.
- [36] Alexander G. Melnikov. Enumerations and completely decomposable torsion-free abelian groups. *Theory of Comp. Sys.*, 45(4):897–916, 2009.
- [37] Miller, R., The  $\Delta_2^0$ -Spectrum of a Linear Order, *J. Symbolic Logic*, Volume 66, Issue 2 (2001), 470-486. .
- [38] Nurtazin, A.T., Computable classes and algebraic criteria of autostability. Summary of Scientific Schools, Math. Inst. SB USSRAS, Novosibirsk, 1974.
- [39] Rabin, M. O., Computable algebra, general theory and theory of computable fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 95, (1960), 341–360.
- [40] Remmel, J.B., Recursively categorical linear orderings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83 (1981), 387 - 391.
- [41] Linda Jean Richter. Degrees of structures. *J. Symbolic Logic*, 46(4):723–731, 1981.
- [42] T. A. Slaman. Relative to any nonrecursive set. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998) 2117-2122.
- [43] Soare, R.I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [44] Bartel L. van der Waerden. Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen, *Math. Ann.*, 102(1):738–739, 1930.

- [45] Wehner, S., Enumerations, Countable Structures and Turing Degrees. Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), pp.2131-2139.

## Список публикаций автора по теме диссертации

- [46] Melnikov, Alexander G., Computable Torsion-Free Abelian Groups: Some Invariants. Sessions of seminar “Algebra I Logika”. In: Algebra and Logic, Volume 46 Number 6 / November, 2007: 433-434.
- [47] Melnikov, Alexander G., Degree Spectra of Torsion-Free Abelian Groups. Proc. of XLV International Student Conference, Novosibirsk State University, 2007:139.
- [48] Melnikov, Alexander G., Lempp’s question for torsion free abelian groups of finite rank. The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 13, Issue 2, June 2007:208.
- [49] Melnikov, Alexander G., Arithmetical categoricity of ordered abelian groups, Mal’tsev Meeting, Collection of abstracts, 2009, published online.
- [50] Melnikov, Alexander G., Enumerations and Completely Decomposable Torsion-Free Abelian Groups. Theory of Computing Systems (2009) 45: 897-916.
- [51] Melnikov, Alexander G., Enumerations and Torsion Free Abelian Groups. Lecture Notes in Computer Science, 2007, Volume 4497/2007 (Computation and Logic in the Real World): 566-574.
- [52] Melnikov, Alexander G.,  $0''$ -Categorical Completely Decomposable Torsion-Free Abelian Groups. Lecture Notes in Computer Science, 2009, Volume 5635/2009 (Mathematical Theory and Computational Practice): 362-371.

- [53] Melnikov, Alexander G., Computable Ordered Abelian Groups and Fields. Lecture Notes in Computer Science, 2010, Volume 6158/2010 (Programs, Proofs, Processes): 321-330.
- [54] Melnikov, Alexander G., Interactions of computability and effective group theory. Proceedings of ALC 2011, accepted.