

На правах рукописи

МАЛЬЦЕВ ИВАН АНАТОЛЬЕВИЧ

**ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ,
БЛИЗКИЕ К ТРАНЗИТИВНЫМ**

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

НОВОСИБИРСК • 2004

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения РАН.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор О. М. Касим-Заде
доктор физико-математических наук,
профессор А. Г. Пинус
доктор физико-математических наук,
профессор В. И. Хомич

Ведущая организация: Уральский государственный универ-
ситет имени А. М. Горького

Защита состоится „23“ сентября 2004 г. в 14 часов на за-
седании диссертационного совета Д 003.015.02 в Институте
математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090,
Новосибирск, проспект Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Институ-
та математики СО РАН

Автореферат разослан „ _____ “ _____ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н.

А. Н. Ряскин

Суперпозиция, то есть замена одной из переменных функции также функцией, является одним из простых и естественных способов получения новых функций из уже имеющихся. Возникающая в результате суперпозиций функция называется сложной. Одни свойства исходных функций наследуются сложной функцией, другие же не сохраняются. Например, при суперпозиции возрастающих функций получается также возрастающая функция. Закономерный интерес вызывает вопрос, можно ли всякую функцию, обладающую каким-то заданным свойством, получить при помощи суперпозиций из функций, обладающих тем же свойством, но зависящих от меньшего числа переменных. В качестве свойства обычно выбирается непрерывность, дифференцируемость и т. п.

Упомянем лишь некоторые результаты в указанном направлении, полученные отечественными математиками А. Г. Витушкиным, А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом. Если натуральные числа m, n, m_1, n_1 удовлетворяют неравенству

$$\frac{m}{n} > \frac{m_1}{n_1},$$

то, как доказал А. Г. Витушкин [2], существует зависящая от m переменных n раз дифференцируемая функция, которую нельзя получить суперпозициями из n_1 раз дифференцируемых функций, зависящих от m_1 переменных. А. Н. Колмогоров [24] и В. И. Арнольд [1] доказали, что каждая вещественная непрерывная функция представима в виде суперпозиции непрерывных функций, зависящих от двух переменных. Любую непрерывную функцию от нескольких переменных можно получить при помощи суперпозиций из функции $x + y$ и непрерывных функций, зависящих от одного аргумента (Колмогоров, [25]).

В приведенных выше примерах решаемые задачи можно сформулировать следующим образом.

Каким-то способом заданы два множества функций M_1 и M_2 . Можно ли каждую функцию из множества M_1 получить суперпозициями функций, принадлежащих множеству M_2 ?

К этой задаче близка следующая.

Задан класс функций K . Описать все функции, которые можно получить суперпозициями функций, принадлежащих K .

Функции, получаемые при помощи суперпозиции из функций класса K , образуют множество $[K]$, называемое *замыканием* класса K . Класс K называется *порождающим* для своего замыкания. Если $K = [K]$, то класс $[K]$ называется *замкнутым*. Описание множества $[M_2]$ ведет к решению первой из указанных выше задач: функции из множества M_1 можно получить суперпозициями функций, принадлежащих множеству M_2 тогда и только тогда, когда множество M_1 является подмножеством замыкания множества M_2 . Однако решение первой задачи может и не зависеть от решения второй.

Задача описания замыкания множества функций M имеет смысл только при существенных ограничениях на входящие в M функции. Одним из таких ограничений является фиксирование числа элементов в множестве, на котором определены функции из M . Э. Постом [34, 35] описаны все замкнутые классы функций, определенных на множестве из двух элементов. По включению эти классы образуют решетку, называемую *решеткой Поста*. На множестве из трех элементов имеется континуум замкнутых классов [49], образующие решетку очень сложного строения, поэтому приходится дополнительно ограничивать множество изучаемых классов.

Замкнутые классы функций и свойства порождающих их систем изучались во многих работах по математической логике, поскольку операции, определенные на конечном множестве, используются при интерпретации связок в различных

исчислениях. Формулам при таких интерпретациях отвечают сложные функции, принадлежащие замкнутым классам, порождаемым этими операциями. Особое внимание привлекала *проблема полноты*: найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система функций, определенных на конечном множестве, порождала замкнутый класс, содержащий все функции, определенные на этом множестве. Как уже говорилось, проблема полноты в классе всех функций, определенных на множестве из двух элементов, была решена Э. Постом. Задача оказалась намного сложнее в случае, когда функции определены на множестве, содержащем более двух элементов. Одну из первых работ в этом направлении опубликовал в 1939 г. Я. Слупецкий [44]. Он доказал, что каждая полная система функций должна содержать существенно многоместную функцию, принимающую все возможные значения. Такую функцию принято называть *функцией Слупецкого*. В 1954 г. С. В. Яблонский [47, 48] решил проблему полноты для случая, когда функции определены на множестве из трех элементов. Затем в течение 10 лет появилось много работ, в которых указывались достаточные условия полноты системы функций. Окончательно проблема полноты была решена И. Розенбергом [41] в 1965 году.

Стоит отметить, что упомянутую ранее теорему А. Н. Колмогорова [25] о том, что функция $x + y$ вместе со всеми непрерывными одноместными функциями порождает все одноместные функции, можно рассматривать в качестве аналога теоремы Слупецкого. Любую непрерывную функцию от нескольких переменных можно получить при помощи суперпозиций из функции $x + y$ и непрерывных функций, зависящих от одного аргумента (Колмогоров, [25]). Определенные топологические аналоги теоремы Колмогорова были позже найдены А. А. Мальцевым [27].

В теории универсальных алгебр важную роль играют классы функций, замкнутые относительно суперпозиций и содержащие все проекции, то есть функции вида $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Эти классы называются *клонами*. Две универсальные алгебры с одинаковыми носителями называются *рационально эквивалентными*, если множества их основных операций порождают один и тот же клон. Ввиду этого описание с точностью до рациональной эквивалентности различных универсальных алгебр, определенных на каком-то множестве, сводится к описанию всех клонов на этом множестве.

Клоны можно рассматривать как алгебры, например, как содержащие функцию $e_2^2(x_1, x_2) = x_2$ предитеративные алгебры, введенные А. И. Мальцевым [29]. *Предитеративными алгебрами* называются подалгебры *предитеративной алгебры Поста* $\mathcal{O}_A = \langle O_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle$ типа $(1, 1, 1.2)$, в которой O_A — множество всех функций, определенных на множестве A . Операции $\zeta, \tau, \Delta, *$ при $n > 1$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}(\zeta f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\(\tau f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\(\nabla f)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}).\end{aligned}$$

Если функция f унарная, то $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$. Операция $*$ определена так:

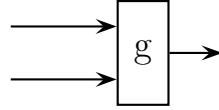
$$(f * g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{n+m-1}).$$

В совокупности операции $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ заменяют суперпозицию, которая не является алгебраической операцией. Поскольку элементами носителей предитеративных алгебр являются функции, гомоморфизмы таких алгебр бывают двух видов: сохраняющие арность функций и не сохраняющие арности.

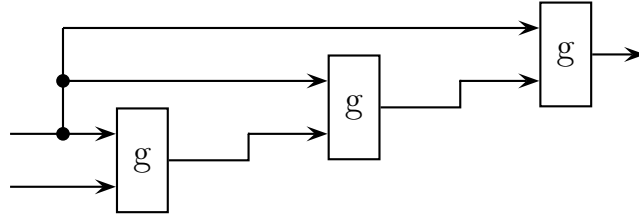
Отвечающие им конгруэнции соответственно называются *подарностными* и *внеарностными*. Сохраняющий арность гомоморфизм клона, отображающий каждую проекцию e_i^n одного клона в такую же проекцию e_i^n другого клона называется *клонным*.

Тождество $t \approx t'$ называется *гипертождеством* алгебры $\mathbf{A}$, если $t = t'$ тождественно выполняется в $\mathbf{A}$ при любой замене символов операций, входящих в термы t и t' , термальными функциями алгебры $\mathbf{A}$ соответствующей арности. Тождества в клонах называются *клонными тождествами*. Клонные тождества алгебры $T(\mathbf{A})$ соответствуют гипертождествам алгебры $\mathbf{A}$ [45].

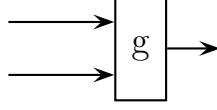
Следующий пример [11] показывает, что гипертождества могут применяться в теории логических сетей. Если



является произвольным переключающим элементом с двумя входами и одним выходом, реализующим какую-то бинарную булеву функцию $g(x, y)$, то составную переключающую схему



можно заменить элементом



какой бы не была функция g , поскольку

$$F(x, F(x, F(x, y))) \approx F(x, y)$$

является гипертотождеством алгебры $\langle \{0, 1\}; \&, N \rangle$.

Гипертотождества позволяют кратко формулировать признаки полноты системы функций [23]. Например, система булевых функций S полна тогда и только тогда, когда равенство

$$F(F(x, y), F(x, y)) \approx F(F(x, x), F(y, y))$$

не является гипертотождеством алгебры $\langle \{0, 1\}; S \rangle$.

Обзор основных результатов, вошедших в диссертацию.

Для любого множества функций $F \subseteq O_k$ через $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим множество всех функций из F , зависящих ровно от n переменных, через $F^{\{n\}}$ — множество всех функций из F , принимающих не более n значений, через $F^{[n]}$ — множество всех функций из F , принимающих ровно n значений. Отметим, что множество $\mathcal{A}^{(1)}$ относительно операции $*$ является полугруппой. Порождаемую множеством $\mathcal{A}^{(1)}$ подалгебру алгебры $\mathcal{P}_A$, образованную всеми существенно одноместными функциями из $\mathcal{A}$, обозначим через $\mathcal{A}^{(1)\nabla}$. Полугруппа одноместных функций называется *s раз транзитивной*, если для любых попарно различных чисел $a_1, \dots, a_s$ и любых чисел $b_1, \dots, b_s$ в ней найдется такая функция f , что $f(a_i) = b_i$, $i = \overline{1, s}$.

Итеративная алгебра называется *клеточной* (А. И. Мальцев [31]), если она состоит из всех существенно одноместных функций и всех существенно многоместных функций, принимающих не более s значений. Клеточная алгебра имеет вид $\mathcal{P}_k^{(1)} \cup \mathcal{P}_k^{\{s\}}$ и далее иногда будет обозначаться через $\mathcal{U}_s$. *Основной клеткой* клеточной алгебры называется подалгебра $\mathcal{P}_k^{\{s\}}$, образованная всеми функциями, принимающих не более s значений.

А. И. Мальцевым [29] доказана структурная теорема, обобщающая известные теоремы Слупецкого [44] и С. В. Яблонского [48]. Опуская особые случаи, ее можно сформулировать следующим образом.

Итеративная алгебра, порождаемая всеми функциями s раз транзитивной полугруппы вместе с существенно многоместной функцией f , принимающей t значений, содержит клетку $\mathcal{P}_k^{\{m\}}$ и все функции, значения которых принадлежат множеству значений функции f , если $2 < m \leq s + 1$.

В диссертации изучаются итеративные алгебры с s раз транзитивными основаниями, и обобщения таких алгебр. Однако в ряде случаев, например в четвертой главе, исследуемые алгебры не укладываются в указанные границы, поскольку некоторые утверждения носят общий характер. Для рассматриваемых алгебр строятся порождающие системы и находятся условия полноты систем функций. Для ряда изучаемых алгебр описываются решетки подалгебр. Описываются конгруэнции и образуемые ими решетки, а также группы автоморфизмов. Описываются алгебры многообразий, порождаемых универсальными алгебрами, клоны которых близки к транзитивным. Рассматривается проблема разделения клонов при помощи гипертонждеств. Для произведений итеративных алгебр доказывается аналог структурной теоремы А. И. Мальцева.

Глава 1. Первые два параграфа носит вводный характер. В нем приводятся определения, соглашения и точные формулировки утверждений из работ других авторов, необходимые в дальнейшем. Многие из них уже приведены выше. Далее нам потребуется следующие определения.

Функции, представимые в виде $f_0(f_1(x_1) \oplus \dots \oplus f_n(x_n))$, где $n \geq 1$, значения одноместных функций $f_1, \dots, f_n$ принадлежат множеству $\{0, 1\}$, сложение ведется по модулю 2, а одноместная функция f_0 может принимать любые значения, называются *квазилинейными*. Итеративная алгебра, состоящая из квазилинейных функций, будет обозначаться через $\mathcal{L}$. Ввиду ее свойств она также считается клеточной. Ее основной клеткой является алгебра $\mathcal{L}^{\{2\}}$.

Параграф 1.3 содержит ряд структурных теорем и следствия из них. Утверждение 1.3.1 дополняет приведенную выше теорему А. И. Мальцева следующим образом.

Если $\mathcal{A}$ содержит два раза транзитивную полугруппу $\mathcal{G}$ и не квазилинейную функцию, принимающую два значения, то $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}_k^{\{2\}}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ при $k \geq 3$ содержит полугруппу $\mathcal{P}_k^{(1)\{2\}}$, а также существенно многоместную квазилинейную функцию, то $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{L}^{\{2\}}$.

Известная теорема Саломеа [43] утверждает, что при $k > 4$ множество функций $\mathcal{P}_k^{(1)[k]}$ вместе с любой существенно многоместной функцией, принимающей k значений, порождает $\mathcal{P}_k$. Систему порождающих какой итеративной алгебры мы получим, присоединив к функциям из $\mathcal{P}_k^{(1)[k]}$ существенно многоместную функцию, принимающую менее k значений? Теорема 1.3.9 утверждает, что если $k > 3$ и добавляемая функция не квазилинейная, то получится система порождающих некоторой клеточной подалгебры.

В четвертом параграфе доказывается, что все клетки и клеточные алгебры имеют конечные базисы. Доказательство

конструктивное в том смысле, что для каждого случая указывается базис. Находятся также минимальные длины базисов и порядки этих алгебр, то есть минимальное число переменных, от которых должна зависеть хотя бы одна функция, входящая в базис.

В параграфе 1.5 рассматриваются максимальные подалгебры клеток и клеточных алгебр. Теорема 1.5.1 показывает, что задача описания всех максимальных подалгебр алгебр $\mathcal{L}$, $\mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{k-1}$ сводится к задаче описания всех максимальных подгрупп симметрической группы σ_k (группы, образованной функциями из $\mathcal{P}_k^{[k]}$ относительно операции $*$). Например, при $2 < s < k - 1$ максимальными подалгебрами алгебры $\mathcal{U}_s$ являются лишь следующие алгебры:

$$\mathcal{U}_{s-1}, \quad \mathcal{P}_k^{\{s\}} \cup \mathcal{P}_k^{(1)\{k-2\}\nabla} \cup \sigma_k^\nabla, \quad \mathcal{P}_k^{\{s\}} \cup \mathcal{P}_k^{(1)\{k-1\}\nabla} \cup \mathcal{M}_i^\nabla \quad (i \in I_k),$$

где $\mathcal{M}_i^\nabla$ — максимальная подгруппа группы σ_k . Следствием этой теоремы является описание подалгебр Фраттини алгебр $\mathcal{L}$, $\mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{k-1}$. Так, подалгеброй Фраттини указанной выше алгебры $\mathcal{U}_s$ является алгебра $\mathcal{E} \cup \mathcal{P}_k^{\{s-1\}} \cup \mathcal{P}_k^{(1)\{k-2\}\nabla}$, где $\mathcal{E}$ — селекторная подалгебра алгебры $\mathcal{P}_k$ (подалгебра, порождаемая функцией $e_2^2(x, y) = x$).

В том же параграфе описываются два класса максимальных подалгебр клеток алгебры $\mathcal{P}_k$, причем оказывается, что пересечение всех построенных максимальных подалгебр алгебры $\mathcal{P}_k^{\{s\}}$ при $2 \leq s < k$ пусто. Доказывается, что подалгеброй Фраттини алгебры $\mathcal{L}^{\{2\}}$ является алгебра $\mathcal{P}_k^{[1]}$.

Пример, построенный Ю. И. Яновым и А. А. Мучником [49], показывает, что уже у алгебры $\mathcal{P}_k^{\{s\}}$ имеется континуум подалгебр, а потому столько же подалгебр есть у каждой клеточной подалгебры, отличной от $\mathcal{L}$. В разделе 1.6 доказывается, что мощность множества всех подалгебр алгебры $\mathcal{L}^{\{2\}}$ счётна. В алгебре $\mathcal{L}^{\{2\}}$ имеются бесконечнопорожденные подалгебры, но нет подалгебр с бесконечным базисом.

Глава 2. Эта глава целиком посвящена описанию подклонов клона Бурле над множеством из трех элементов. Указанный клон состоит из существенно одноместных функций и функций вида

$$f_0(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)),$$

где значения одноместных функций $f_1, \dots, f_n$ принадлежат множеству $\{0, 1\}$, сложение ведется по модулю 2, а функция f_0 может принимать любые значения. Клон Бурле является наименьшим среди клонов, содержащих все одноместные функции и хотя бы одну существенно многоместную функцию. Хотя он содержит счетное число подклонов, образуемая этими подклонами решетка значительно сложнее решетки Поста. Здесь исследованы лишь подклоны, состоящие из функций, значения которых принадлежат либо множеству $\{0, 1\}$, либо множеству $\{0, 2\}$. Удалось нарисовать граф решетки подклонов клона $\mathcal{Z}_0$, образованного функциями со значениями в множестве $\{0, 1\}$ (рис. 1). Приводятся таблицы с указанием состава клонов, системы порождающих. Многочисленные диаграммы помогают уяснить взаимное расположение клонов в решетке всех подклонов клона Бурле. Исследование выполнено совместно с Я. Деметровичем [5] – [9].

Глава 3. Конгруэнции на подалгебрах алгебр Поста впервые изучались А. И. Мальцевым в работе [29]. Им было отмечено, что, если исключить тривиальные случаи, на каждой подалгебре алгебры $\mathcal{P}_k$ имеется три конгруэнции: κ_0 , совпадающая с отношением равенства, κ_1 , совпадающая с тождественно истинным отношением, и κ_a , определяемая следующим образом: функции f_1 и f_2 тогда и только тогда κ_a -конгруэнтны, когда они зависят от одинакового числа переменных. В дальнейшем эти три конгруэнции будут называться тривиальными. В той же работе найдено условие, достаточное для того, чтобы все конгруэнции на какой-либо подалгебре алгебры $\mathcal{P}_k$ являлись тривиальными; в частности,

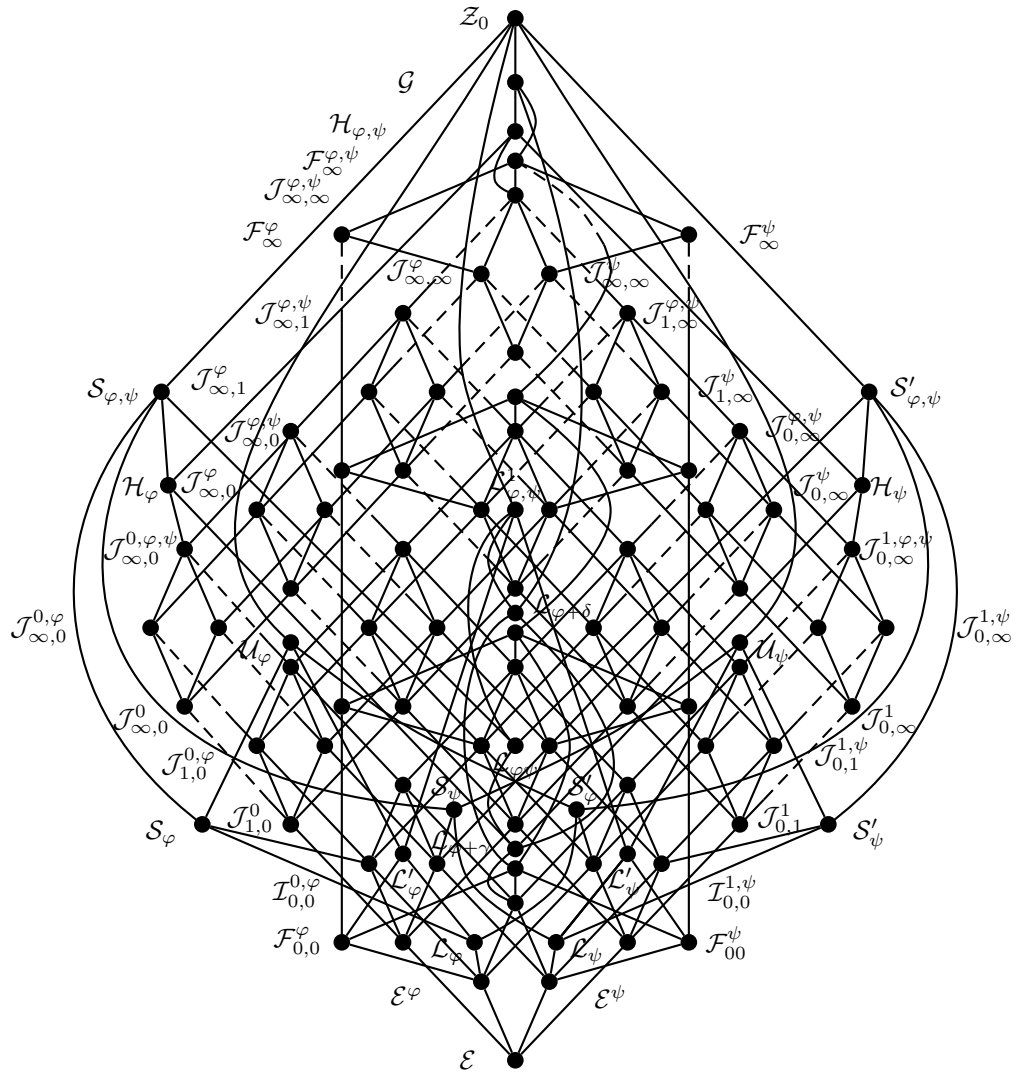


Рис. 1. Решетка $L(Z_0)$.

оказалось, что тривиальны все конгруэнции на самой алгебре $\mathcal{P}_k$.

Упомянутое условие не выполняется ни для клеток алгебры $\mathcal{P}_k$, ни для клеточных подалгебр. В параграфе 3.1 доказывается, что при $k > 2$ на подалгебрах $\mathcal{P}_k^{\{2\}}, \dots, \mathcal{P}_k^{\{k-1\}}$ имеются лишь тривиальные конгруэнции, а на $\mathcal{L}^{\{2\}}$ есть лишь одна нетривиальная конгруэнция. В разделе 3.2 показывается, что тривиальными являются также все конгруэнции на любой подалгебре $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_k$, удовлетворяющей условию $\mathcal{P}_k^{\{2\}} \supseteq \mathcal{A} \supseteq \mathcal{S}^{\{s\}}$, где $\mathcal{S}^{\{s\}}$ — некоторая специальная подалгебра алгебры $\mathcal{P}_k$. В параграфе 2.3 указывается достаточное условие, при котором решетка конгруэнций на подалгебре $\mathcal{G}^\nabla$, содержащей лишь существенно одноместные функции, легко строится, если известна решетка конгруэнции на полугруппе $\mathcal{G}$. Этому условию удовлетворяют основания всех клеточных подалгебр. Затем, используя описание решетки конгруэнций на полугруппе $\mathcal{P}_k^{(1)}$, приведенное в [28], строятся решетки конгруэнции на подалгебрах $\mathcal{L}, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{k-1}$.

Пусть $D \subseteq A$, $D \neq \emptyset$. Алгебру $\mathcal{K}_D$, образованную всеми функциями из $\mathcal{P}_A$, значения которых принадлежат D , назовём простой, или элементарной квазиклеткой над множеством D ; множество D назовём определяющим для $\mathcal{K}_D$. Квазиклеткой называется подалгебра алгебры $\mathcal{P}_A$, являющаяся объединением произвольного множества простых квазиклеток. Клетки являются частным случаем квазиклеток. Изучение свойств квазиклеток и их подалгебр проводится в параграфе 3.5. Оказывается, что эти свойства можно увязать с изоморфными вложениями алгебры $\mathcal{P}_A$ в $\mathcal{P}_B$, описанными А. И. Мальцевым [29]. Ранее свойства простых квазиклеток конечного ранга исследовались Д. Лау [26]. Она нашла все конгруэнции на подалгебрах простых квазиклеток. Часть этих конгруэнций имеет весьма регулярное строение. Назовем их *S-конгруэнциями*.

Пусть α — взаимно однозначное отображение множества A в множество B , C — образ множества A , β — отображение множества B на C , оставляющее элементы множества C неподвижными. Каждой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из подалгебры $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A$ сопоставим функцию $f_{\alpha\beta}(y_1, \dots, y_n)$ из $\mathcal{P}_B$ следующим образом:

$$f_{\alpha}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha(f(x_1, \dots, x_n)),$$

$$f_{\alpha\beta}(y_1, \dots, y_n) = f_{\alpha}(\beta(y_1), \dots, \beta(y_n)).$$

Отображения $\alpha : f \rightarrow f_{\alpha}$ и $\gamma : f \rightarrow f_{\alpha\beta}$ являются изоморфизмами алгебры $\mathcal{A}$ в алгебры $\mathcal{P}_C$ и $\mathcal{P}_B$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ образы алгебры $\mathcal{A}$ при этих изоморфизмах. Алгебра $\mathcal{B}$ называется *проективным расширением* алгебры $\mathcal{C}$.

Пусть $D \subseteq A$, $\mathcal{B}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{P}_D$ и $\mathcal{K}_D$ — квазиклетка алгебры $\mathcal{P}_A$, имеющая определяющее множество D . Подалгебру алгебры $\mathcal{K}_D$, образованную такими функциями f_i из $\mathcal{P}_A$, что $f_i \upharpoonright D \in \mathcal{B}$, назовём *вполне ограниченным расширением* алгебры $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}_A$. Будем писать $\mathcal{A} \succ \mathcal{B}$, если $\mathcal{A}$ является вполне ограниченным расширением алгебры $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathcal{A}(A)$ объединение множеств значений всех функций, принадлежащих подалгебре $\mathcal{A}$ итеративной алгебры $\mathcal{P}_A$. Алгебру $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{A}(A)$ назовём *ядром* алгебры $\mathcal{A}$. Ядро алгебры $\mathcal{A}$ назовём *отделимым*, если оно не совпадает с $\mathcal{A}$. Мощность множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$ назовём *индексом* алгебры $\mathcal{A}$.

В параграфе 3.5 описан ряд свойств S -конгруэнций. Центральным результатом является следующая теорема.

Пусть подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A$ является вполне ограниченным расширением алгебры $\mathcal{B}$, $S = \{A_i | i \in I\}$ — совокупность попарно различных подмножеств множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$, $D_S = \cup_{i \in I} A_i$, κ_S — S -конгруэнция на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}/\kappa_S$ изоморфна такой подалгебре $\mathcal{C}$ алгебры $\mathcal{A}$, которая является

проективным расширением алгебры $C' > B$. Если множество A конечно, то индекс алгебры C' строго меньше индекса алгебры A . Если каждое множество A_i содержит лишь один элемент, то алгебра C' имеет индекс $|A \setminus (A(A) \cup D_S)|$.

В разделе 3.6 рассматриваются итеративные алгебры произвольного ранга. А. И. Мальцев [29] разделил все автоморфизмы таких алгебр на внутренние и внешние. Он установил, что внутренними являются все автоморфизмы любой итеративной алгебры, содержащей все функции, принимающие некоторое фиксированное значение ω , как только значение любой ее переменной равно ω , и потому группа автоморфизмов такой алгебры вложима в группу σ_k . В параграфе 3.6 доказывается, что внутренними являются все автоморфизмы итеративной алгебры, содержащей все константы, и потому ее группа автоморфизмов также вложима в σ_k . Это в частности означает, что внутренними являются все автоморфизмы клеток и клеточных алгебр.

В параграфе 3.7 устанавливаются некоторые связи между квазиклетками и универсальными алгебрами, у которых клон, порождаемый основными операциями, получается пополнением квазиклетки всеми проекциями. Описываются многообразия, порождаемые такими алгебрами. Тем самым обобщаются результаты, полученные ранее Б. Венгложем [3] и И. Розенбергом [42].

Глава 4. Тожества алгебр функций являются формулами языка второго порядка (гипертождествами). Естественным образом возникает следующий вопрос: верно ли, что клоны однозначно определяются множествами своих гипертождеств? Обсуждению этой проблемы посвящены три параграфа этой главы.

Если рассматривать клоны функций, определенных на множестве, содержащем более двух элементов, то ответ в общем случае будет отрицательным. Однако булевы клоны одно-

значно (с точностью до изоморфизмов) определяются множествами своих гипертождеств, так как справедлива следующая теорема.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ — два таких булевых клона, что $\mathbf{C}'$ не изоморфен никакому подклону клона $\mathbf{C}$. Тогда $\mathbf{C}$ можно отделить от $\mathbf{C}'$ гипертождествами.

В этом смысле булевы клоны можно разделить гипертождествами. Доказательство указанного выше утверждения приведено в разделе 4.3. Оно опубликовано в работе [10], написанной совместно с К. Денеке. Отметим, что в статье [11], написанной в соавторстве с К. Денеке и М. Решке, приведено конструктивное доказательство с указанием разделяющих гипертождеств.

В этих результатах, сформулированных на языке гипертождеств, отражается существенное различие между булевыми клонами и клонами функций, определенных на множестве, содержащем более двух элементов.

В последнем параграфе исследуется следующая проблема: *можно ли отделить квазиклетки от других подалгебр алгебры $\mathcal{P}_A^*$ при помощи гипертождеств?* Для $|A| = 3$ положительный ответ был найден совместно с Д. Швайгертом [18]. Точнее говоря, сформулированы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы подалгебра алгебры $\mathcal{P}_3$ являлась квазиклеткой. Ниже указаны такие условия для рассмотренных случаев.

Пусть через Θ обозначено функциональное тождество

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda(\mu(x), \mu(x)), \lambda(\mu(y), \mu(y))) = \\ = \lambda(\lambda(\mu(x), \mu(y)), \lambda(\mu(x), \mu(y))). \end{aligned}$$

Через Λ обозначим функциональное тождество

$$\begin{aligned} & \lambda(\lambda(\lambda(\lambda(x, x)), \lambda(\lambda(x, x), \lambda(x, x))), \\ & \quad \lambda(\lambda(\lambda(y, y), \lambda(y, y)), \lambda(\lambda(y, y), \lambda(y, y)))) = \\ & = \lambda(\lambda(\lambda(\lambda(x, x)), \lambda(\lambda(y, y), \lambda(y, y))), \\ & \quad \lambda(\lambda(\lambda(x, x), \lambda(x, x)), \lambda(\lambda(y, y), \lambda(y, y)))). \end{aligned}$$

Через Ω обозначим формулу

$$\forall \varphi \forall \psi \forall \gamma [(\varphi \psi \varphi \psi \gamma^3 \varphi \psi = \varphi \psi \varphi \psi \gamma \varphi \psi) \vee (\varphi \psi^3 \varphi = \varphi \psi \varphi)].$$

Подалгебра $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}_3^*$ совпадает с квазиклеткой $\mathcal{K}_{\{0,1\}} \leq \mathcal{P}_3^*$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) Никакая функция из $\mathcal{A}$ не принимает значение 2;
- 2) $\mathcal{A} \not\models \varphi^3 = \varphi$;
- 3) $\mathcal{A} \not\models \Theta$.

Подалгебра $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}_3^*$ совпадает с квазиклеткой $\mathcal{K}_{\{0,1\}} \cup \mathcal{K}_{\{0,2\}} \leq \mathcal{P}_3^*$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) $\forall f \in \mathcal{A}(f(E_3) \not\subseteq \{1, 2\})$;
- 2) $\mathcal{A} \not\models (\gamma \varphi^3 \gamma = \gamma \varphi \gamma) \vee \varphi \gamma^3 \varphi = \varphi \gamma \varphi$;
- 3) $\mathcal{A} \not\models \Lambda$.

Подалгебра $\mathcal{A} \leq \mathcal{P}_3^*$ совпадает с квазиклеткой

$$\mathcal{K}_{0,1} \cup \mathcal{K}_{0,2} \cup \mathcal{K}_{1,2}$$

тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

- 1) $\forall f \in \mathcal{A}(|f(E_3)| \leq 2)$;
- 2) $\mathcal{A} \not\models \Omega$;
- 3) $\mathcal{A} \not\models \Lambda$.

Глава 5. Пусть $\prod_c P_{A_i} = P_{A_1} \times \dots \times P_{A_m}$ — множество всевозможных последовательностей

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, (f_m(x_1, \dots, x_n))),$$

в которых $f_i \in P_{A_i}$. Каждую такую последовательность можно рассматривать как функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, определенную на множестве $A = A_1 \times \dots \times A_m$. Очевидным образом на $\prod_c P_{A_i}$ можно определить операции ζ , τ , Δ , ∇ , $*$. Например,

$$(\zeta f)(x_1, \dots, x_n) = ((\zeta f_1)(x_1, \dots, x_n), \dots, (\zeta f_m)(x_1, \dots, x_n)).$$

Алгебра $\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_m} = \langle \prod_c P_{A_i}; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ называется *согласованным* (с числом переменных у функций, принадлежащих носителям сомножителей) *произведением* алгебр $\mathcal{P}_{A_i}$. В универсальной алгебре этому понятию соответствует определенное В. Наркевичем [4] неиндексированное произведение алгебр. Различные свойства согласованных произведений исследовались Б. А. Ромовым [36] – [40], В. А. Таймановым [46], С. С. Марченковым [32, 33].

Пятая глава диссертации делится на два параграфа. Параграф 5.1 содержит теорему, обобщающую структурную теорему А. И. Мальцева [30] (с дополнениями, описанными в первой главе) на произведения итеративных алгебр. Она опубликована в статье [21], написанной совместно с Б. Г. Тугылбаевой. Результаты параграфа 5.2 опубликованы в [22].

Пусть $k_i \geq 3$ при $i = \overline{1, m}$, $s_i \in \mathbb{N}$, $s_i \geq 2$, $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_m}$, содержащая такую функцию $f = (f_1, \dots, f_m)$, что f_i для любого $i = \overline{1, m}$ является существенно s_i -местной функцией, принимающей либо s_i , либо $s_i + 1$ значение, $\mathcal{F}_i$ — множество всех функций из P_{k_i} , все значения которых содержатся в множестве $f_i(E_{k_i})$. Пусть далее H_i — s_i раз транзитивная подполугруппа полугруппы $P_k^{(1)}$, если $s_i \geq 4$, либо полугруппы $P_{k_i}^{(1)\{s_i\}}$, если $s_i \in \{2, 3\}$ и f_i — не квазилинейная функция, и $H_i = P_k^{(1)\{2\}}$, если функция $f_i \in P_{k_i}^{[2]}$ квазилинейная. Если $\mathcal{A}$ содержит все функции

из множества $H = H_1 \times \dots \times H_m$, то $\mathcal{A}$ принадлежат все функции из произведения $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$, где $\mathcal{B}_i$ может совпадать либо с $\mathcal{F}_i$, если f_i принимает $s_i + 1$ значение и H_i содержит тождественную функцию $e_1^1(x) = x$, либо с $\mathcal{L}^{\{2\}}$, если $f_i \in \mathcal{L}^{\{2\}}$, либо с $P_{k_i}^{\{s_i\}}$, если $f_i \notin \mathcal{L}^{\{2\}}$.

Слова «может совпадать» в заключительной части формулировки теоремы указывают на то, что в некоторых случаях произведение $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$ может быть составлено несколькими способами и каждый раз будет получено множество функций, принадлежащих $\mathcal{A}$, причем разные варианты произведений могут давать несовпадающие множества функций. Так, если $f_i \notin \mathcal{L}^{\{2\}}$, f_i принимает $s_i + 1$ значение и H_i содержит тождественную функцию, то в качестве $\mathcal{B}_i$ можно взять либо множество $P_{k_i}^{\{s_i\}}$, либо множество $\mathcal{F}_i$.

В приведенной выше теореме существенную роль играют произведения $H_1 \times \dots \times H_m$ транзитивных полугрупп H_i . Поскольку существенные переменные в разных сомножителях могут иметь различные индексы, такие произведения следует считать существенно многоместными функциями. Такая точка зрения подтверждается например утверждением 5.2.3, доказываемым в параграфе 5.2. Существенно одноместными являются произведения одноместных функций, у которых индексы существенных переменных, если таковые имеются, совпадают. В связи с этим случай, когда известно, что алгебра содержит все такие произведения и еще какую-либо функцию, не совпадает с уже рассмотренным, и является интересным. Теорема 5.2.4 также является аналогом упоминавшейся выше структурной теоремы А. И. Мальцева, хотя требования, накладываемые на множества одноместных функций в сомножителях, приближают ее к теоремам Слупецкого и С. В. Яблонского.

Если подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_m}$ содержит все функции, принадлежащие множеству $\mathcal{U}_{k_1, \dots, k_m}^S$, и такую функ-

цию $f = (f_1, \dots, f_m)$, что для каждого $i = \overline{1, m}$ функция $f_i \in P_{k_i}^{(1)\nabla}$ принимает $z_i \geq 2$ значений, и ее единственная существенная переменная имеет индекс, отличающийся от индексов существенных переменных всех остальных проекций функции f , то $\mathcal{A}$ содержит все функции из произведения $\mathcal{A}_{p1}^{\{z_1\}} \times \dots \times \mathcal{A}_{pm}^{\{z_m\}}$.

Напомним, что подалгебра Слупецкого является единственной максимальной подалгеброй алгебры $\mathcal{P}_k$, содержащей все функции из $\mathcal{P}_k^{(1)}$. Она образована всеми существенно одноместными функциями из $\mathcal{P}_k$ и всеми существенно многоместными функциями, принимающими не более $k - 1$ значений. Следуя С. С. Марченкову [33], присвоим это название максимальным подалгебрам алгебры $\mathcal{P}_{k_1 \dots k_m}$, содержащим все функции из $\mathcal{U}_{k_1 \dots k_m}^S$. Последняя теорема позволяет описать все подалгебры Слупецкого в произведениях итеративных алгебр.

Алгебра $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_m$, где

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{P}_{k_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{k_{i-1}} \times \mathcal{T}_i \times \mathcal{P}_{k_{i+1}} \times \dots \times \mathcal{P}_{k_m}, \quad i = \overline{1, m}$$

и $\mathcal{T}_i$ — подалгебра Слупецкого алгебры $\mathcal{P}_{k_i}$, является единственной подалгеброй Слупецкого алгебры $\mathcal{P}_{k_1 \dots k_m}$, если $k_i \geq 3$ для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$.

Все вошедшие в диссертацию результаты опубликованы в [5] – [22]. Они докладывались на семинарах в институте математики СО РАН, Новосибирском и Московском государственных университетах, а также на международных конференциях в России, Австрии, Венгрии, Германии, Китае, Югославии и Японии. Статьи [5] – [9] написаны в неразделимом соавторстве с Я. Деметровичем, работа [10] – в неразделимом соавторстве с К. Денеке, работа [11] – в неразделимом соавторстве с К. Денеке и М. Решке, статья [18] – в неразделимом соавторстве с Д. Швайгертом, статья [21] – в неразделимом соавторстве с Б. Г. Тугылбаевой.

Литература

- [1] Арнольд В. И. *О функциях трех переменных* // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 4. С. 679-681.
- [2] Витушкин А. Г. *О многомерных вариациях* // М.: Гос. издат. технико-теоретич. литературы. 1955.
- [3] Weglorz B. *A representation theorem for Post-like algebras* // Colloq. math. 1970. V. 30, №1. P. 35-39.
- [4] Goetz A. *A generalization of the notion of direct product of universal algebra* // Colloq. Math. 1971. V. 22. P. 167-176.
- [5] Demetrovics J., Malcev I. A. *On the depth of infinitely generated subalgebras of Post's iterative algebra P_3* // Coll. math. soc. Janos Bolyai. Szeged, 1983. V. 43. P. 85-96.
- [6] Деметрович Я., Мальцев И. А. *О существенно минимальных ТС-клонах на трехэлементном множестве* // MTA SZTAKI Kozl. 1984. № 32. С. 115-151.
- [7] Demetrovics J., Malcev I. A. *Essentially minimal TC-clones on three-element base set* // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1986. V. 8, № 3. P. 191-196.
- [8] Деметрович Я., Мальцев И. А. *О строении клона Бурле на трехэлементном множестве* // Acta cybernetica. 1989. V. 9, № 1. P. 1-25.

- [9] Demetrovics J., Malcev I. A. *Essentially minimal TC-clones on three-element base set* // The nineteenth int. symp. on multiple-valued logic. Guangzhou, China. 1989. P. 220-227.
- [10] Денеке К., Мальцев И. А. *Разделение клонов гипертождествами* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 310-316.
- [11] Денеке К., Мальцев И. А., Решке М. *О разделимости клонов гипертождествами* // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050-1066.
- [12] Мальцев И. А. *Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебр Поста и их основных клеток* // Алгебра и логика. 1972. Вып. 11. № 5. С. 571-587.
- [13] Мальцев И. А. *Конгруэнции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста* // Алгебра и логика. 1972. Вып. 11, № 6. С. 666-672.
- [14] Мальцев И. А. *Некоторые свойства клеток алгебр Поста.* // Дискретный анализ. 1973. № 23. С. 24-31.
- [15] Мальцев И. А. *О конгруэнциях на подалгебрах итеративных алгебр Поста.* // Дискретный анализ. 1976. № 29. С. 40-52.
- [16] Мальцев И. А. *Гомоморфизмы вполне ограниченных расширений итеративных алгебр Поста* // Rostock. Math. Kolloq. 1979. № 11. P. 85-92.
- [17] Мальцев И. А. *Инварианты квазиклеток итеративных алгебр Поста* // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 1. С. 220-223.
- [18] Мальцев И. А., Швайгерт Д. *Гипертождества QZ-алгебр* // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 132-139.
- [19] Malcev I. *Graduated products of Post algebras* // Note on multiple-valued logic. 1995. V. 18, № 13. P. 1-4.

- [20] Malcev I. *Coordinated products of iterative algebras* // Proc. VIII int. conf. on logic and comp. sci. Novi Sad, Yugoslavia. 1997. P. 1-2.
- [21] Мальцев И. А., Тугылбаева Б. Г. *Произведения итеративных алгебр* // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, №1. С. 102-112.
- [22] Malcev I. *Slupecki subalgebras in coordinated products of iterative algebras* // Multi. val. logic. 2000. V. 5. P. 1-13.
- [23] Denecke K., Poeschel R. *The characterization of primal algebras by hyperidentities* // Contributions to general algebra 6. Vienna: Hoelder-Pichler-Tempsky, 1988. Bd 6. S. 67-68.
- [24] Колмогоров А. Н. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных* // ДАН СССР. 1956. Т. 108. № 2. С. 179-182.
- [25] Колмогоров А. Н. *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения* // ДАН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953-956.
- [26] Lau D. *Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$* // Rostock. math. kolloq. 1977. № 3. S. 37-43.
- [27] Мальцев А. А. *Топологический вариант теоремы Слупецкого для некоторых компактов* // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 1. С. 33-36.
- [28] Мальцев А. И. *Симметрические группоиды* // Мат. сб. 1952. Т. 31, вып. 1. С. 136-151.
- [29] Мальцев А. И. *Итеративные алгебры и многообразия Поста* // Алгебра и логика. 1966. Вып. 5, № 2. С. 5-24.

- [30] Мальцев А. И. *Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского* // Алгебра и логика. 1967. Вып. 6, № 3. С. 61-75.
- [31] Мальцев А. И. *Итеративные алгебры Поста*. - Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1976.
- [32] Марченков С. С. *О полноте в системе $P_3 \times P_3$* // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 1. С. 126-145.
- [33] Марченков С. С. *О классах Слупецкого в системах $P_k \times \dots \times P_k$* // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 3. С. 135-148.
- [34] Post E. *Introduction to a general theory of elementary propositions* // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163-185.
- [35] Post E. *Two-valued iterative systems of mathematical logic*. - Princeton Univ. Press., 1941.
- [36] Ромов Б. А. *Алгоритм решения проблемы полноты в классе векторных функциональных систем* // Математические модели сложных систем. - Киев: ИК АН УССР, 1973. С. 151-155.
- [37] Ромов Б. А. *О решетке подалгебр прямых произведений алгебр Поста конечной степени* // Математические модели сложных систем. - Киев: ИК АН УССР. 1973. С. 156-168.
- [38] Ромов Б. А. *О полноте на квадрате функций алгебры логики и в системе $P_k \times P_l$* // Кибернетика, 1987. Т. 4. С. 9-14.
- [39] Ромов Б. А. *Об одной серии максимальных подалгебр прямых произведений алгебр конечнозначных логик* // Кибернетика, 1989. Т. 3. С. 11-16.

- [40] Ромов Б. А. *О функциональной полноте в системе $P_2 \times P_k$* // Кибернетика, 1991. Т. 1. С. 1-8.
- [41] Rosenberg I. G. *La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini* // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A,B. 1965. V. 260. P. 3817-3819.
- [42] Rosenberg I. G. *Universal algebras with all operations of boundid range* // Colloq. math. 1974. V. 30, № 2. P. 177-185.
- [43] Salomaa A. *On basic groups for the set of functions over a finite domain* // Ann. Acad. Sci. Fennicae. A. 1. 1963. №338. P. 3-15.
- [44] Slupecki J. *Kriterium pelnosci wielowartosciowich systemow logiki zdan* // Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Letters de Varsovie, Cl III. 1939. V. 32. P. 102-128.
- [45] Taylor W. *Hyperidentities and hypervarieties* // Aequationes Math. 1981. V. 23, № 1. P. 30-49.
- [46] Тайманов В. А. *О декартовых степенях P_2* // Доклады АН СССР, 1983. Т. 270, № 6. С. 1327-1330.
- [47] Яблонский С. В. *О функциональной полноте в трех-значном исчислении* // ДАН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152-1156.
- [48] Яблонский С. В. *Функциональные построения в k -значной логике.* - В кн.: Труды МИ АН СССР. - М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 51. С. 5-142.
- [49] Янов Ю. И., Мучник А. А. *О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса* // Докл. АН СССР, 1959. Т. 127, № 1. С. 44-46.

МАЛЫЦЕВ Иван Анатольевич

Итеративные алгебры, близкие к транзитивным

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 11.06.04. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л 1,5. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 100 экз. Заказ №42.

Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.