На правах рукописи

Макаренко Наталья Юрьевна

МАЛЫЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ В ГРУППАХ И КОЛЬЦАХ ЛИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2006

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор,
Хухро Евгений Иванович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Зайцев Михаил Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев Анатолий Семенович

доктор физико-математических наук, профессор
Тимошенко Евгений Иосифович

Ведущая организация:

Омский государственный университет

Защита диссертации состоится 23 марта 2007 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «____»____________2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Теория нильпотентных групп — одна из старейших областей теории групп. В определенном смысле ее начало положено в работе Силова 1872 года [56] (которая также содержит знаменитую теорему Силова), где было доказано, что конечная группа порядка p^k обладает центральным рядом с циклическими факторами простого порядка p. Бернсайд в своей книге [23] (1911) показал, что конечная группа обладает центральным рядом тогда и только тогда, когда она является прямым произведением p-групп. В 30-х годах XX века было замечено, что группы, обладающие центральным рядом (позднее они были названы нильпотентными), тесно связаны с линейными группами Ли, чьи алгебры Ли состоят из нильпотентных матриц. В группах Ли операции коммутирования соответствует умножение в алгебре Ли, поэтому нильпотентному кольцу, т. е. кольцу, в котором произведение данного числа любых элементов равно нулю

$$x_1 \ldots x_n = 0,$$

соответствует группа, которая удовлетворяет тождеству

$$[x_1, \ldots, x_n] = 1. \tag{1}$$

По этой причине термин «нильпотентная» закрепился и за группами с тождеством (1).

После того, как в 30-х годах понятие абстрактной алгебры Ли выделилось из теории групп Ли в самостоятельный объект, методы колец Ли стали активно применяться для изучения произвольных нильпотентных групп. Первыми, кто заметил, что на прямой сумме факторов $\bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ нижнего центрального ряда нильпотентной группы

G можно задать структуру кольца Ли были Магнус [44, 45] и Витт [61]. При этом сложению в кольце Ли соответствует умножение в группе, а лиевскому умножению — коммутирование в группе.

Чуть позже в 1949 г. Мальцев [12] по аналогии с использованием экспоненциального отображения в группах Ли нашел еще один метод задания структуры алгебры Ли на нильпотентной группе, основанный на формуле Кемпбелла – Бейкера – Хаусдорфа. В ядре этого соответствия лежат формальные тождества, устанавливающие связь между умножением и коммутированием в полных нильпотентных группах без кручения, с одной стороны, и сложением и умножением в алгебрах Ли — с другой.

Замечательным примером того, насколько эффективно работают методы колец Ли в теории нильпотентных групп является история решения знаменитой ослабленной проблемы Бернсайда. Само возникновение вопроса о существовании универсальной конечной d-порожденной группы данного периода m, гомоморфными образами которой являются все конечные d-порожденные группы периода m, названного Магнусом в [46] ослабленной проблемой Бернсайда (ОПБ), во многом обязано развитию новых линейных методов и желанием продвинуться вперед в той области, где эти методы эффективно работают. После того как Магнусом [46] (1950) и Сановым [14] (1952) для групп простого периода p была получена редукция теоретико-групповой задачи к вопросу о локальной нильпотентности $(p-1)$-энгелевой алгебры Ли над полем простой характеристики p, Кострикин [5, 6] (1958) решил ОПБ в этом частном случае. Решение Зельмановым [1–3] ОПБ для групп показателя p^k также включает редукцию к алгебрам Ли.

Другая важная область, где эффективно работают линейные методы, — конечные p-группы (и про-p-группы) данного кокласса c, т. е. группы порядка p^n ступени нильпотентности $n-c$ (Донкин, Лидхэм-Грин, Маккэй, Манн, Шалев, Зельманов и другие [24, 37–41, 43, 47, 48, 54, 55]).

В настоящей диссертации линейные методы применяются к исследованию групп с почти регулярными автоморфизмами. Полученные результаты объединяет общая тема — малые централизаторы в группах и кольцах Ли. В более общем контексте отметим, что наложение ограничений на централизаторы — одно из самых плодотворных и интересных направлений во всех разделах как теории групп так и колец Ли. Отметим лишь некоторые результаты:

Теорема Брауэра — Фаулера о конечных группах с почти регулярной инволюцией, служащая основой характеризаций простых конечных групп [22];

Теорема Томпсона о нильпотентности конечной группы с регулярным автоморфизмом простого порядка [57];

Теорема Шункова о локальной конечности периодической группы с конечным централизатором инволюции [18];

Теорема Бахтурина—Зайцева—Линченко о существовании тождества, которому удовлетворяет алгебра Ли, если некоторому тождеству удовлетворяет подалгебра неподвижных точек некоторой конечной группы автоморфизмов взаимно простого с характеристикой поля порядка [20, 42].

Возвращаясь к группам, кольцам и алгебрам Ли, допускающих автоморфизмы с малыми централизаторами, напомним, что под централизатором понимается подгруппа (подалгебра, подкольцо) неподвижных точек. При этом в зависимости от объекта, выбираются разумные параметры для «измерения» централизатора. Для конечных групп и колец Ли — это порядок; в бесконечных нильпотентных группах — это ранг; в алгебрах Ли — размерность.

В предельном случае, когда нетривиальных неподвижных точек нет, автоморфизм называется *регулярным.* Хигмэн [31] в 1957 доказал, что ступень нильпотентности нильпотентной группы с регулярным автоморфизмом простого порядка ограничена некоторой функцией $h(p)$, зависящей только от p. Крекнин и Кострикин [7, 8] в 1963 г. нашли новое доказательство теоремы Хигмэна, дающее явную оценку для функции $h(p)$. Фактически, теоремы Хигмэна, Крекнина и Кострикина — это некие комбинаторные факты о $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных кольцах Ли с тривиальной нуль-компонентой, из которых очевидным образом вытекают теоретико-групповые следствия. Что касается регулярных автоморфизмов произвольного конечного порядка, то Крекнин [8, 9] (1963) также доказал, что кольцо Ли с регулярным автоморфизмом произвольного конечного порядка n разрешимо ступени $\leq 2^n - 2$. (Ранее Борель и Мостов [21] доказали разрешимость в конечномерном случае без оценки ступени разрешимости.) В группах ситуация намного сложнее. В отличие от колец Ли, для групп необходимы определенные дополнительные ограничения: например, свободная 2-порожденная группа допускает регулярный автоморфизм порядка 2, переставляющий образующие. Вопрос заключается в том, справедлив ли аналог теоремы Крекнина для конечных (или нильпотентных) групп: ограничена ли в терминах n ступень разрешимости конечной (или нильпотентной) группы с регулярным автоморфизмом конечного (взаимно простого) порядка n? В многочисленных работах этот вопрос (так же, как и более общие вопросы о почти регулярных автоморфизмах или даже группах автоморфизмов) для локально конечных групп уже сведен к случаю конечных нильпотентных групп (см., например, [25, 27–29, 51, 58, 59]). Тем не менее, для нильпотентных групп аналог теоремы Крекнина пока доказан только в случае автоморфизма простого порядка (теорема Хигмэна—Крекнина—Кострикина), автоморфизма порядка 4 (теорема Ковача [35]) и групп без кручения (для которых результат непосредственно вытекает из теоремы Крекнина в силу соответствия Мальцева). Причиной трудностей для нильпотентных конечных групп является плохое соответствие между ступенью разрешимости присоединенного кольца Ли и самой группы: линейная задача о кольцах Ли является более грубой.

Естественно ожидать, что свойства групп или колец Ли, допускающих автоморфизмы с малым числом неподвижных точек, должны быть «близки» к случаю регулярного автоморфизма. Для колец (алгебр) Ли долгое время стояла проблема обобщения теоремы Бореля—Мостова—Крекнина. Решение этой проблемы — один из основных результатов диссертации. Именно, в совместных работах с Е. И. Хухро [66–68] доказана почти разрешимость алгебры Ли с почти регулярным автоморфизмом произвольного конечного порядка. Как и в теореме Крекнина доказательство сводится к рассмотрению $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированной алгебры Ли $L=\sum_{i=0}^{n-1}L_i$. Но если в теореме Крекнина нуль-компонента L_0 тривиальна, то в данном случае она имеет конечную размерность m.

Градуированные алгебры и кольца Ли возникают также во многих других задачах о группах и кольцах Ли. В некоторых случаях может оказаться, что почти все однородные компоненты $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированной алгебры (кольца) Ли тривиальны и требуется получить оценки в терминах числа нетривиальных компонент, не зависящие от самой градуировки (т. е. числа n). Так, Шалев [52], используя $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированные кольца Ли с малым числом нетривиальных компонент, доказал, что конечная группа ранга r с автоморфизмом, имеющим ровно m неподвижных точек, обладает разрешимой подгруппой (r,m)-ограниченного индекса. Доказательство этого результата использует следующий аналог теоремы Крекнина: если $L=\oplus_{i=0}^{n-1}L_i$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-

градуированное кольцо Ли с малым числом d нетривиальных компонент L_i и $L_0 = 0$, то L разрешимо ступени $\leq 2^d - 2$. Автором диссертации получено обобщение этой теоремы на случай $|L_0| = m$, что позволило усилить недавний результат Хухро и Шумяцкого [36] о нильпотентных алгебрах Ли дифференцирований.

Как уже отмечалось, изучение конечных групп с почти регулярными автоморфизмами во многих случаях уже сведено к нильпотентным группам. Из классификации конечных простых групп вытекает (почти) разрешимость конечной группы с (почти) регулярной группой автоморфизмов взаимно простого порядка. Для разрешимых групп в ряде работ, инициированных работой Томпсона [58], на основе «немодулярных» теорем типа Холла–Хигмэна получены ограничения нильпотентной длины (почти всей) такой группы; например, близкие к неулучшаемым оценки получены в [28, 59]. Отметим также теорему Хартли–Турау [30] для циклической группы автоморфизмов порядка p^n с точной оценкой.

В нильпотентных группах, допускающих автоморфизмы с малым централизатором, самым «благополучным» является случай нильпотентных (или конечных) p-групп с почти регулярным автоморфизмом порядка p^n, где теоремы о регулярных автоморфизмах колец Ли позволили получить в некотором смысле исчерпывающие результаты [15, 19, 34, 49, 50, 53, 64]. В случае автоморфизма ко-простого порядка Е. И. Хухро [16] доказал, что конечная нильпотентная q-группа, допускающая автоморфизм φ простого порядка p с малым числом неподвижных точек $|C_G(\varphi)| = |\{g \in G \mid g^{\varphi} = g\}| = q^m$, почти нильпотентна, т. е. существует нормальная подгруппа $H \lhd G$ ступени нильпотентности, ограниченной в терминах p, и индекса, ограниченного в терминах q, m и p. Значительная часть доказательства этой теоремы — о кольцах Ли с почти регулярными автоморфизмами простого порядка. Однако в отличие от регулярных автоморфизмов, групповой результат — далеко не очевидное следствие теоремы о кольцах Ли. Обратный переход от колец Ли к группам занимает больше половины доказательства. Причина заключается в том, что нет хорошего соответствия между подкольцами в присоединенном кольце Ли группы и подгруппами в самой группе.

Подобные трудности встречаются также при переходе от кольцевых результатов к группам с почти регулярными автоморфизмами порядка 4. Несмотря на наличие кольцевого обобщения упоминавшейся выше теоремы Ковача на случай малого числа неподвижных точек, не удавалось осуществить обратный переход к группам. Это сделано лишь совсем недавно с применением новой оригинальной техники в совместной работе автора диссертации и Е. И. Хухро [70].

Наконец, следует упомянуть методы, которые используются при исследовании нильпотентных групп и колец Ли, допускающих автоморфизмы с малыми централизаторами. Основным здесь является метод градуированных централизаторов, созданный первоначально Е. И. Хухро для почти регулярных автоморфизмов простого порядка [16]. Суть в том, чтобы построить некоторое отображение (лучше, если это будет гомоморфизм) в малый централизатор и применить теорему о гомоморфизмах (или некий ее аналог), чтобы получить подгруппу или подпространство с малым фактором. Исторически одним из первых примеров доказательства такого сорта является теорема Ф. Холла [26] о том, что порядок фактор-группы произвольной группы G по $(2k)$-му члену верхнего центрального ряда зависит только от k и порядка $(k+1)$-го члена нижнего центрального ряда группы G. Автором диссертации получен ранговый аналог этой теоремы для конечных нильпотентных групп [63].

Основные результаты диссертации.

1. Доказана почти разрешимость алгебры Ли с почти регулярным автоморфизмом конечного порядка. А именно, доказано, что если алгебра Ли допускает автоморфизм конечного порядка n с подалгеброй неподвижных точек размерности m, то L обладает разрешимым идеалом коразмерности, ограниченной в терминах m и n, и ступени разрешимости, ограниченной в терминах n.

   В качестве следствия получен аналогичный результат для локально нильпотентных групп без кручения: если локально нильпотентная группа без кручения допускает автоморфизм конечного порядка n с подгруппой неподвижных точек конечного ранга r, то группа обладает нормальной разрешимой подгруппой, ко-ранг которой ограничен в терминах r и n, а ступень разрешимости ограничена в терминах n.

   Эти результаты были получены автором диссертации совместно с Е. И. Хухро.

2. Доказано существование нильпотентного идеала с оценками на коразмерность и ступень нильпотентности в алгебре (кольце) Ли с почти регулярным автоморфизмом простого порядка p. (Это усиливает

заключение в теореме Е. И. Хухро [16], где было установлено существование подалгебры с аналогичными свойствами).

3. Доказана теорема о $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных алгебрах Ли с малым числом нетривиальных однородных компонент и конечномерной нуль-компонентой: если в $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированной алгебре Ли $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$ нуль-компонента L_0 конечномерна размерности m, и число ненулевых компонент среди L_i конечно и равно d, то L обладает однородным разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от d, коразмерность которого ограничена функцией от m и d.

4. Разработана новая оригинальная техника, позволяющая нормальные подгруппы «преобразовывать» в характеристические. Доказано, что если произвольная группа содержит c-ступенно нильпотентную подгруппу конечного индекса n, то она содержит также характеристическую c-ступенно нильпотентную подгруппу, имеющую конечный индекс, ограниченный в терминах n и c (совместный результат с Е. И. Хухро).

5. Для конечной 2-группы с почти регулярным автоморфизмом порядка 4 получен неулучшаемый результат: доказана почти центрально-метабелевость такой группы.

6. Получен положительный ответ на вопрос П. Шумяцкого 11.126 из «Коуровской тетради» [13] о конечных группах с почти регулярным автоморфизмом порядка 4: доказано, что если конечная группа G допускает автоморфизм порядка 4, имеющий ровно m неподвижных точек, то она обладает нормальной подгруппой H, индекс которой ограничен в терминах m, а ступень разрешимости ограничена некоторой константой (совместный результат с Е. И. Хухро).

7. Доказано, что ступень нильпотентности коммутанта группы с l-расщепляющим автоморфизмом порядка 4 ограничена некоторой функцией, зависящей только от ступени разрешимости группы.

8. Доказан ранговый аналог известной теоремы Холла [26]: если $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда конечной нильпотентной группы G имеет ранг r, то фактор-группа группы G по $(2k)$-му члену верхнего

центрального ряда имеет (k, r)-ограниченный ранг.

Таким образом, *основная цель диссертации* — изучение строения групп, колец и алгебр Ли, допускающих автоморфизмы с малыми централизаторами и разработка новых методов их исследования.

Новизна и научная значимость работы. Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований как нильпотентных групп и алгебр Ли с почти регулярными автоморфизмами, так и других проблем теории групп. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. Доказательства большинства результатов диссертации имеют комбинаторный характер. Используются вычисления в групповых кольцах, тензорных произведениях и теоремы типа Холла-Хигмэна. В доказательстве теоремы о почти разрешимости алгебр Ли с почти регулярным автоморфизмом усовершенствован метод обобщенных централизаторов и разработана новая оригинальная техника zc-элементов.

Апробация работы. Результаты диссертации в период с 1998 по 2006 год были представлены на международных конференциях в Новосибирске, Берлине (Германия), Монсе (Бельгия) и Санкт-Петербурге. В частности, на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2005 г.) и «Методы логики в математике III» (Санкт-Петербург, 2006 г.) автором были сделаны пленарные доклады по теме диссертации. Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах Института математики СО РАН и НГУ «Теория групп», и «Алгебра и логика».

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в форме статей в ведущих отечественных и зарубежных журналах [62–71], а также в тезисах и трудах конференций ([72–75]).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из семи глав, введения и списка литературы. Она изложена на 214 страницах, библиография содержит 120 наименований.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Основные результаты каждой главы (теоремы и их следствия) явным образом сформулированы в первом параграфе главы. Их нумерация двойная: первая цифра — номер главы, вторая — номер теоремы в главе. Вспомогательные утверждения (леммы, предложения) и определения имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа в текущей главе, третья — номер утверждения в текущем параграфе.

Глава 1.

Пусть L — кольцо Ли или алгебра Ли любой, не обязательно конечной, размерности. Пусть φ — автоморфизм L и пусть $C_L(\varphi) = \{a \in L \mid \varphi(a) = a\}$ — подалгебра (подкольцо) его неподвижных точек. Автоморфизм φ называется *регулярным*, если $C_L(\varphi) = 0$, то есть φ не имеет нетривиальных неподвижных точек. По теореме Крекнина [8] если L допускает регулярный автоморфизм φ конечного порядка n, то есть такой, что $\varphi^n = 1$ и $C_L(\varphi) = 0$, то ступень разрешимости L не превосходит $2^n - 2$. (Ранее Борель и Мостов [21] доказали разрешимость в конечномерном случае без оценки ступени разрешимости.)

Доказано, что алгебра Ли с почти регулярным автоморфизмом конечного порядка почти разрешима, с оценками на коразмерность разрешимого идеала и его ступень разрешимости.

Теорема 1.1. *Если алгебра Ли L допускает автоморфизм φ конечного порядка n с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $\dim C_L(\varphi) = m$, то L обладает разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от n, коразмерность которого ограничена функцией от m и n.*

В качестве следствия приведем почти эквивалентную формулировку теоремы 1.1 в терминах градуированных алгебр Ли.

Следствие 1.2. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Если компонента L_0 конечномерна размерности m, то L обладает разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от n, коразмерность которого в L ограничена функцией от m и n.*

Утверждения, аналогичные теореме 1.1 и следствию 1.2, верны также для колец Ли с конечным подкольцом неподвижных точек и $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли с конечной нуль-компонентой.

Теорема 1.3. *Если кольцо Ли L допускает автоморфизм φ конечного порядка n с конечным подкольцом неподвижных точек порядка $|C_L(\varphi)| = m$, то идеал T, равный периодической части аддитивной подгруппы L, обладает идеалом U таким, что фактор-кольцо T/U имеет конечный порядок, ограниченный функцией от m и n, и кольца Ли L/T и U имеют ступень разрешимости, ограниченную функцией от n. Если автоморфизм φ полупростой, или порядок $|\varphi|$ — степень простого числа, или $nL = L$, или $nl = 0$ влечет $l = 0$ для любого $l \in L$, то, более того, L обладает разрешимым идеалом Z ступени разрешимости, ограниченной функцией от n, для которого порядок фактор-кольца L/Z конечен и ограничен функцией от m и n.*

Следствие 1.4. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Если компонента L_0 конечна порядка $|L_0| = m$, то L обладает разрешимым идеалом I, ступень разрешимости которого ограничена функцией от n, причем порядок фактор-кольца L/I конечен и ограничен функцией от m и n.*

Теорема 1.1 влечет аналогичное заключение для нильпотентных групп без кручения. Такие группы вкладываются в полные локально нильпотентные группы, категория которых эквивалентна категории локально нильпотентных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$ (соответствие Мальцева). Напомним, что группа имеет конечный *ранг* r, если любая ее конечно-порожденная подгруппа может быть порождена r элементами (и r — наименьшее число с этим свойством).

Теорема 1.5. *Пусть локально нильпотентная группа без кручения G допускает автоморфизм φ конечного порядка n такой, что подгруппа неподвижных точек $C_G(\varphi)$ имеет конечный ранг r. Тогда группа G обладает разрешимой нормальной подгруппой H ступени разрешимости, ограниченной функцией от n, такой, что фактор-группа G/H имеет конечный ранг, ограниченный в терминах r и n.*

При доказательстве результатов 1.1–1.4 развивается и совершенствуется метод обобщенных или градуированных, централизаторов [16]. Принципиально новым является использование техники zc-элементов. Фактически все результаты этой главы являются следствиями основного случая, когда кольцо Ли L является суммой аддитивных подгрупп $L_j = \{a \in L \mid \varphi(a) = \omega^j a\}$[1], которые ведут себя как компоненты $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-

[1]Здесь w — примитивный корень n-ой степени из 1

градуировки: $[L_s,\, L_t] \subseteq L_{s+t \,(\mathrm{mod}\, n)}$. В каждой из аддитивных подгрупп L_i строится цепочка убывающих подгрупп, градуированных централизаторов, $L_i(t)$ уровней $1, 2, \ldots, N(n)$ и одновременно фиксируются некоторые элементы, по отношению к которым градуированные централизаторы $L_i(t)$ обладают определенными централизаторными свойствами. Требуемый разрешимый идеал — это идеал, порожденный аддитивными подгруппами максимального уровня $Z =_{\mathrm{id}} < L_1(N), \ldots, L_{n-1}(N) >$. Для доказательства разрешимости идеала Z применяется критерий разрешимости, полученный Е. И. Хухро в [17]. Этот критерий последовательно применяется к некоторой цепочке подколец, в которых постепенно «улучшаются» свойства неподвижных точек автоморфизма.

Результаты первой главы получены совместно с Е. И. Хухро и опубликованы в [66–68].

Глава 2.

В этой главе доказывается наличие нильпотентного *идеала* с оценками на ступень нильпотентности и порядок фактор-кольца (размерность фактор-алгебры) в кольце (алгебре) Ли с почти регулярным автоморфизмом простого порядка. Это усиливает теорему Хухро [16], где доказано существование подкольца (подалгебры) с аналогичными свойствами.

Теорема 2.1. *Если кольцо* (*алгебра*) *Ли L допускает автоморфизм φ простого порядка p с конечным подкольцом неподвижных точек порядка $|C_L(\varphi)| = m$ (с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $\dim C_L(\varphi) = m$), то L обладает идеалом H ступени нильпотентности, ограниченной функцией от p, таким что порядок* (*размерность*) *фактор-кольца* (*фактор-алгебры*) *L/H ограничен*(*а*) *функцией от m и p.*

Аналогичное утверждение верно также для $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуированных колец (алгебр) Ли с конечной (конечномерной) нуль-компонентой L_0 (Следствие 2.2).

Из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение о локально нильпотентных группах без кручения.

Теорема 2.3. *Пусть локально нильпотентная группа без кручения G допускает автоморфизм φ простого порядка p такой, что подгруппа неподвижных точек $C_G(\varphi)$ имеет конечный ранг r. Тогда группа G обладает нильпотентной нормальной подгруппой H ступени нильпотентности, ограниченной функцией от p, такой что фактор-группа*

G/H имеет конечный ранг, ограниченный функцией от r и p.

Доказательство теоремы 2.1 опирается на результаты предыдущей главы. По теоремам 1.1 и 1.3 алгебра (кольцо) Ли L содержит разрешимый идеал Z ограниченной ступени разрешимости и ограниченной коразмерности. В частном случае автоморфизма простого порядка этот идеал Z оказывается также нильпотентным p-ограниченной ступени. Этот факт устанавливается с использованием индукции по ступени разрешимости идеала Z.

Результаты второй главы получены автором лично и опубликованы в [69].

Глава 3.

При изложении результатов первой главы мы отмечали тесную связь, существующую между алгебрами (кольцами) Ли с автоморфизмами конечного порядка n и $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированными алгебрами Ли. В доказательствах теорем 1.1 и 1.3 основным является именно случай $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных алгебр (колец) Ли. Во многих задачах возникают $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированные алгебры (кольца) Ли с малым числом нетривиальных компонент. В этом случае часто удается получить результаты, ограничивающие строение алгебры (кольца) Ли, которые не зависят от порядка автоморфизма. Мы уже упоминали работу Шалева [52], в которой использовалось следующее обобщение теоремы Крекнина: если $L = \oplus_{i=0}^{n-1} L_i$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо Ли с малым числом d нетривиальных компонент L_i и $L_0 = 0$, то L разрешимо ступени $\leq 2^d - 2$.

Отметим еще одно интересное приложение результатов такого сорта. Классическая теорема Джекобсона [33] гласит, что конечномерная алгебра над полем характеристики 0, допускающая нильпотентную алгебру Ли D дифференцирований без констант (т. е. $x^\delta = 0$ для всех $\delta \in D \Leftrightarrow x = 0$), нильпотентна. Недавно Хухро и Шумяцкий [36] получили обобщение теоремы Джекобсона, доказав, что если L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, D — нильпотентная алгебра Ли дифференцирований с d весами в L, и нулевая компонента Фиттинга по отношению к D имеет размерность m, то L содержит нильпотентную подалгебру, коразмерность которой ограничена в терминах m и d, а ступень нильпотентности ограничена в терминах d. Этот результат фактически является следствием следующей теоремы: если $L = \oplus_{i=0}^{p-1} L_i$ — $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли с малым числом d нетривиальных компонент L_i, p простое и $\dim L_0 =$

m, то L содержит нильпотентную подалгебру, коразмерность которой ограничена в терминах m и d, а ступень нильпотентности ограничена в терминах d.

Основной результат третьей главы — доказательство аналогичной теоремы для алгебр Ли с произвольной $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировкой.

Теорема 3.1. *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Если компонента L_0 конечномерна размерности m, и число ненулевых компонент среди L_i конечно и равно d, то L обладает однородным разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от d, коразмерность которого ограничена функцией от m и d.*

Аналогичное утверждение верно также для $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли L с конечной нуль-компонентой порядка m. В этом случае получается разрешимый идеал ступени разрешимости, ограниченной функцией от d, индекс которого в аддитивной подгруппе L ограничен функцией от m и d (теорема 3.2). Заметим, что в частном случае $d = n$ теоремы 3.1 и 3.2 — это в точности следствия 1.2 и 1.4. Теорема 3.1 позволяет усилить заключение в теореме Хухро–Шумяцкого [36]. А именно, утверждается наличие идеала (вместо подалгебры) с оценками на ступень нильпотентности и коразмерность.

Следствие 3.3. *Если L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, D — нильпотентная алгебра Ли дифференцирований с d весами в L, и нулевая компонента Фиттинга по отношению к D имеет размерность m, то L содержит нильпотентный идеал, коразмерность которого ограничена в терминах m и d, а ступень нильпотентности ограничена в терминах d.*

Результаты 3.1 и 3.2 получены автором лично, следствие 3.3 — в соавторстве с Е. И. Хухро и П. Шумяцким. Основные результаты третьей главы опубликованы в [71].

Глава 4.

В процессе исследования групп, допускающих почти регулярные автоморфизмы, часто возникает ситуация, когда некоторая нормальная подгруппа K ограниченного индекса с «лучшими» централизаторными свойствами строится не в самой группе, а в некоторой нормальной подгруппе (например, во взаимном коммутанте $[G, \varphi^k] = \langle g^{-1}g^{\varphi^k} \mid g \in G\rangle$). При этом важно иметь подгруппу K характеристической, чтобы можно было рассматривать фактор-группу G/K. Метод обобщенных централизаторов, который чаще всего используется для построения таких подгрупп, к сожалению, не гарантирует их характеристичности. Поэтому особую важность приобретают результаты, позволяющие «преобразовывать» субнормальные подгруппы в нормальные. В этой главе доказывается теорема, которая из наличия нильпотентной подгруппы конечного индекса устанавливает наличие характеристической подгруппы, соизмеримой с исходной по величине фактор-группы, и той же ступени нильпотентности. Верно даже более общее утверждение: вместо нильпотентности можно брать любое полилинейное коммутаторное тождество.

Определение. *Полилинейные коммутаторы от переменных x_i веса* 1 — это сами переменные x_i. По индукции, *полилинейные коммутаторы от переменных x_i веса $w > 1$* — это коммутаторы вида $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2]$, где κ_1 и κ_2 — полилинейные коммутаторы с непересекающимися наборами переменных веса w_1 и w_2 при $w = w_1 + w_2$.

Группа G удовлетворяет полилинейному коммутаторному тождеству $\kappa = 1$ тогда и только тогда, когда тривиальна коммутаторная (вербальная) подгруппа $\kappa(G)$, получающаяся заменой всех переменных в коммутаторе κ на группу G.

Теорема 4.1. *Пусть κ — полилинейный коммутатор веса w. Если группа G содержит подгруппу H конечного индекса $|G : H| = n$, удовлетворяющую тождеству $\kappa(H) = 1$, то она содержит также характеристическую подгруппу C, удовлетворяющую тождеству $\kappa(C) = 1$, индекс которой конечен и (n, w)-ограничен.*

Отметим следствия в важных частных случаях.

Следствие 4.2. *Предположим, что группа G содержит подгруппу H конечного индекса n, которая*

(а) *либо нильпотентна ступени d,*

(б) *либо разрешима ступени d.*

Тогда G обладает также характеристической подгруппой (n, d)-ограниченного индекса, которая, соответственно, либо нильпотентна ступени $\leq d$, либо разрешима ступени $\leq d$.

Ранее этот результат был известен только для абелевых подгрупп (см., например, [4, Лемма 21.1.4]).

Теорема 4.1 имеет важное приложение для групп, допускающих почти регулярные автоморфизмы. В пятой главе она применяется для исследования групп с автоморфизмами порядка 4.

Доказан также ранговый аналог теоремы 4.1 для частного случая тождества нильпотентности.

Результаты четвертой главы получены автором совместно с Е. И. Хухро и опубликованы в [70].

Глава 5.

Эта глава посвящена группам с автоморфизмом порядка 4. В 1961 году Ковач [35] показал, что второй коммутант локально конечной или локально нильпотентной группы G, допускающей регулярный автоморфизм порядка 4, содержится в центре группы G.

Первый результат пятой главы — обобщение теоремы Ковача на случай малого числа неподвижных точек в «модулярной» ситуации, когда автоморфизм порядка 4 действует на локально конечной или локально нильпотентной 2-группе. В этом случае получен неулучшаемый результат.

Теорема 5.1. *Если локально конечная или локально нильпотентная 2-группа G допускает автоморфизм φ порядка 4 с конечным числом неподвижных точек m, то G обладает нормальной подгруппой H m-ограниченного индекса такой, что второй коммутант H содержится в центре H.*

Аналогичное утверждение верно также для локально конечной 2-группы, содержащей элемент порядка 4 с централизатором конечного порядка m (Следствие 5.2). В доказательстве используется теорема Шалева [53], по которой ступень разрешимости конечной p-группы, допускающей автоморфизм порядка p^k с числом неподвижных точек p^m, ограничена в терминах p, m и k. Также применяются линейные методы групповых колец и присоединенных колец Ли.

Второй основной результат этой главы описывает строение произвольной конечной группы с почти регулярным автоморфизмом порядка 4. Получен положительный ответ на вопрос П. Шумяцкого 11.126 из «Коуровской тетради» [13].

Теорема 5.3. *Существуют такие константа c и функция натурального аргумента $f(m)$, что если конечная группа G допускает автоморфизм φ порядка 4, имеющий ровно m неподвижных точек, то она обладает нормальным рядом $G \geq H \geq N$, в котором $|G/H| \leq f(m)$, фактор-группа H/N нильпотентна ступени ≤ 2, а подгруппа N нильпотентна ступени $\leq c$.*

Заметим, что порядок автоморфизма не предполагается взаимно простым с порядком группы. Поэтому теорему 5.3 можно переформулировать как утверждение о группе, содержащей элемент порядка 4 с ограничением на порядок его централизатора. Стандартные рассуждения, использующие локальную теорему Мальцева (или обратный предел), дают следствие о локально конечных группах.

Следствие 5.4. *Если локально конечная группа G содержит элемент порядка 4 с конечным централизатором порядка m, то она обладает нормальным рядом $G \geq H \geq N$, в котором порядок G/H ограничен в терминах m, фактор-группа H/N нильпотентна ступени ≤ 2, а подгруппа N нильпотентна ступени $\leq c$, где c — константа из теоремы 5.3.*

Доказательство теоремы 5.3 опирается на работы [10,11,62] и, в частности, использует теорему 5.1. Сведение к нильпотентным группам реализуется с помощью теорем типа Холла–Хигмэна. Для нильпотентных же групп переход от слабой оценки ступени нильпотентности подгруппы N к сильной, не зависящей от m осуществляется при помощи теоремы 4.1.

Теорема 5.1 получена автором диссертации самостоятельно и опубликована в [64], теорема 5.3 — в соавторстве с Е. И. Хухро и опубликована в [70].

Глава 6.

Эта глава посвящена группам с автоморфизмом порядка четыре, у которых множество элементов, удовлетворяющих равенству $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}x^{\varphi^3} = 1$ — большое.

Определение. Подмножество X группы G называется *большим* (слева), если для любого конечного множества элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$ пересечение подмножеств $g_iX = \{g_ix \mid x \in X\}$ не пусто: $\bigcap\limits_{i=1}^{k} g_iX \neq \varnothing$.

Понятие большого множества, обобщающее понятие генерического множества в алгебраических и стабильных группах (в теории моделей), возникло совсем недавно в работах специалистов по теории моделей Джабера и Вагнера [32, 60]. Ими же был сформулирован вопрос: какие тождества (с операторами), выполняющиеся на большом подмножестве группы (*«почти»-тождества*), выполняются и на всей группе или хотя бы влекут какие-то полезные следствия? В этом направлении автором диссертации получан следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть группа G допускает l-расщепляющий автоморфизм φ порядка 4, т. е. $\varphi^4 = 1$ и множество элементов G, удовлетворяющих равенству $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}x^{\varphi^3} = 1$ — большое в G. Если H — φ-инвариантная нормальная разрешимая подгруппа ступени разрешимости d, то коммутант H' нильпотентен ступени $\leq (9^{d-2}+1)/2$.*

При $\varphi = 1$ из теоремы 6.1 получаем

Следствие 6.2. *Предположим, что группа G удовлетворяет «почти»-тождеству периода 4, т. е. множество элементов порядка 4 большое. Если H — нормальная разрешимая подгруппа ступени разрешимости d, то коммутант H' нильпотентен ступени $\leq (9^{d-2}+1)/2$.*

Результаты этой главы получены автором диссертации лично и опубликованы в [65].

Глава 7. По теореме Ф. Холла [26], если порядок $(k+1)$-го члена нижнего центрального ряда произвольной группы конечен и равен n, то индекс $2k$-го члена верхнего центрального ряда ограничен в терминах k и n. Следующая теорема — ранговый аналог теоремы Ф. Холла.

Теорема 7.1. *Если $(k+1)$-й член нижнего центрального ряда конечной нильпотентной группы G имеет ранг r, то фактор-группа группы G по $(2k)$-му члену верхнего центрального ряда имеет (k,r)-ограниченный ранг.*

Как показывают примеры распространить этот результат даже на разрешимые группы невозможно.

Доказательство теоремы 7.1 — еще одна демонстрация метода обобщенных централизаторов. Роль централизаторов в этом доказательстве берут на себя члены нижнего центрального ряда.

Результат 7.1 получен автором лично и опубликован в [63].

Отметим, что все функции, фигурирующие в формулировках результатов диссертации, можно оценить сверху явным образом, хотя мы и не выписываем эти оценки.

В заключение я хотела бы выразить свою глубокую благодарность своему соавтору и научному консультанту Е. И. Хухро. Я также признательна всем сотрудникам лаборатории теории групп ИМ СО РАН, с которыми обсуждались многие проблемы диссертации. Хотела бы особо поблагодарить своего руководителя, заведующего лабораторией теории групп ИМ СО РАН, чл.-корр. РАН В. Д. Мазурова за деятельную поддержку в подготовке диссертации.

Литература

[1] Зельманов Е. И., О некоторых проблемах теории групп и алгебр Ли, *Матем. сборник,* **180**, N 2 (1989), 159-167.

[2] Зельманов Е. И., Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя, *Изв. АН СССР, сер. матем.,* **54**, N 1 (1990), 42-59.

[3] Зельманов Е. И., Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп, *Матем. сборник,* **182**, N 4 (1991), 568-592.

[4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*, М., Наука, 1982.

[5] Кострикин А. И., О проблеме Бернсайда, *ДАН СССР* **118**, N 6 (1958), 1074-1077.

[6] Кострикин А. И., О проблеме Бернсайда, *Изв. АН СССР, сер. матем.,* **23**, N 1 (1959), 3-34.

[7] Крекнин В. А., Кострикин А. И., Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами, *ДАН СССР*, **149** (1963), 249–251.

[8] Крекнин В. А., Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода, *ДАН СССР*, **150** (1963), 467–469.

[9] Крекнин В. А., Разрешимость алгебр Ли с регулярным автоморфизмом, *Сиб. мат. ж.*, **8**, N 3 (1967), 715–716.

[10] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И., Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек, *Алгебра и логика*, **35** (1996), 41–78.

[11] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И., Нильпотентные группы, допускающие почти регулярный автоморфизм порядка 4, *Алгебра и логика*, **35**, N 3 (1996), 314-333.

[12] Мальцев А. И., Нильпотентные группы без кручения, *Изв. АН СССР, сер. матем.,* **13** (1949), 201–212.

[13] *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*, 11-е изд., Институт математики СО РАН, Новосибирск, 1990.

[14] Санов И. Н., Установление связи между периодическими группами с периодом простым числом и кольцами Ли, *Изв. АН СССР, сер. матем.,* **16** (1952), 23-58.

[15] Хухро Е. И., Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек, *Матем. заметки.* **38**, N 5 (1985), С. 652–657.

[16] Хухро Е. И. Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка, *Матем. сб.*, **181**, N 9 (1990), 1207–1219.

[17] Хухро Е. И. О разрешимости колец Ли с автоморфизмом конечного порядка, *Сиб. Мат. журнал*, **42**, N 5 (2001), 1187–1192.

[18] Шунков В. П., О периодических группах с почти регулярной инволюцией, *Алгебра и логика* , **11**, N 4 (1972), 478–494.

[19] Alperin J., Automorphisms of solvable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 175–180.

[20] Bahturin Y. A. Zaicev M. V. Identities of graded algebras, *J. of algebra*, **205**, (1998), 1-12.

[21] Borel A., Mostow G. D., On semi-simple automorphisms of Lie algebras, *Ann. Math. (2)*, **61** (1955), 389–405.

[22] Brauer R., Fowler K. A., On groups of even order, *Ann. Math.*, V. 62, N 2 (1955), 565–583.

[23] Burnside W., *Theory of groups of finite order*, Cambridge, 1911.

[24] Donkin S., Space groups and groups of prime power order. VIII. Pro-p-groups of finite coclass and p-adic Lie algebras, *J. of algebra,* **111**, (1987), 316-342.

[25] Fong P., On orders of finite groups and centralizes of p-elements, *Osaka J. Math.*, **13** (1976), 483–489.

[26] Hall Ph. Finite-by-nilpotent groups,, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **52**, (1956), 611-616.

[27] Hartley B., A general Brauer-Fowler theorem and centralizers in locally finite groups, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 101–117.

[28] Hartley B., Isaacs I. M., On characters and fixed points of coprime operator groups, *J.Algebra*, **131** (1990), 342–358.

[29] Hartley B., Meixner T., Finite soluble groups containing an element of prime order whose centralizer is small, *Arch. Math. (Basel)* **36** (1981), 211–213.

[30] Hartley B., Turau V., Finite soluble groups admitting an automorphism of prime power order with few fixed points, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **102** (1987), 431–441.

[31] Higman G., Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 321–334.

[32] Jaber K., Wagner F. O., Largeur et nilpotence. *Commun. Algebra*, **28**, N 6 (2000), 2869–2885.

[33] Jacobson N. A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 281–283.

[34] Jaikin-Zapirain A., On almost regular automorphisms of finite p-groups, *Adv. Math.*, **153**, No. 2 (2000), 391–402.

[35] Kovács L., Groups with regular automorphisms of order four, *Math. Z.*, **75**, (1960/1961), 277–294.

[36] Khukhro E. I. Shumyatsky P. Lie algebras with almost constant-free derivations, *J. of algebra*, **306**, N 2 (2006), 544-551.

[37] Leedham-Green C. R., Pro-p-groups of finite coclass, *J. London Math. Soc.,* **50**, (1994), 43-48.

[38] Leedham-Green C. R., The structure of finite p-groups , *J. London Math. Soc.,* **50**, (1994), 49-67.

[39] Leedham-Green C. R., McKay S., On p-groups of maximal class I, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2),* **27**, (1976), 297-311.

[40] Leedham-Green C. R., McKay S., On p-groups of maximal class II, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2),* **29**, (1978), 175-186.

[41] LEEDHAM-GREEN C. R., MCKAY S., On p-groups of maximal class III, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2),* **29**, (1978), 281-299.

[42] LINCHENKO V. Identities of graded Lie algebras with actions of Hopf algebras, *Comm. algebra*, **25**, (1997), 3179-3187.

[43] MANN A., Space groups and groups of prime power order VII, Powerful p-groups and uncovered p-groups *Bull. London Math Soc.,* **24**, (1992), 271-276.

[44] MAGNUS W., Über Beziehungen zwischen hoheren Kommutatoren, *J. Reine Angew. Math.*, **177** (1937), 105–115.

[45] MAGNUS W., Über Grupen und zugeordnete Liesche Ringe, *J. Reine Angew. Math.*, **182** (1940), 142–149.

[46] MAGNUS W., A connection between the Baker–Hausdorff formula and a problem of Burnside, *Ann. Math.,* **57** (1950), 111-126.

[47] MCKAY S., On the structure of a special class of p-groups I, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2),* **38**, (1987), 489-502.

[48] MCKAY S., On the structure of a special class of p-groups II, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2),* **41**, (1990), 431-448.

[49] MEDVEDEV YU., p-Groups, Lie p-rings and p-automorphisms, *J. London Math. Soc. (2)*, **58**, No. 1 (1998), 27–37.

[50] MEDVEDEV YU., p-Divided Lie rings and p-groups, *J. London Math. Soc. (2)*, **59** (1999), 787–798.

[51] PETTET M. R., Automorphisms and Fitting factors of finite groups, *J. Algebra* **72** (1981), 404–412.

[52] SHALEV A. Automorphisms of finite groups of bounded rank, *Israel J. Math.*, **82** (1993), 395–404.

[53] SHALEV A., On almost fixed point free automorphisms, *J. Algebra*, **157** (1993), 271–282.

[54] SHALEV A., The structure of finite p-groups: effective proof of the coclass conjectures, *Invent. Math.,* **115**, (1994), 315-345.

[55] Shalev A., Zelmanov E. I., Pro-p-groups of finite coclass, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **111** (1992), 417–421.

[56] Sylow M. L., Théorèmes sur les groupes de substitution, *Math. Ann.*, **5** (1872), 584–594.

[57] Thompson J., Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 578–581.

[58] Thompson J., Automorphisms of solvable groups, *J. Algebra*, **1** (1964), 259–267.

[59] Turull A., Fitting height of groups and of fixed points, *J. Algebra*, **86** (1984), 555–566.

[60] Wagner F. O., Commutator conditions and splitting automorphisms for stable группs, *Arch. Math. Logic*, **32** (1993), 223–228.

[61] Witt E., Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. Reine Angew. Math.*, **177** (1937), 152–160.

Работы автора по теме диссертации

[62] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И. Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек II, *Алгебра и логика*, **37**, N 2 (1998), 144–166.

[63] Макаренко Н. Ю. Ранговые аналоги теорем Холла и Бэра, *Сиб. Мат. Ж.*, **41**, N 6 (2000), 1376–1380.

[64] Макаренко Н. Ю. Конечные 2-группы с автоморфизмом порядка 4, *Алгебра и логика*, **40**, N 1 (2001), 83–96.

[65] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И. О группах с l-расщепляющим автоморфизмом порядка три и четыре, *Алгебра и логика*, **42**, N 3 (2001), 293–311.

[66] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu. Lie rings with almost regular automorphisms, *J. of Algebra*, **264**, N 2 (2003), 641–664.

[67] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И. Почти разрешимость алгебр Ли с почти регулярными автоморфизмами, *ДАН*, **393**, N 1 (2003), 18–19.

[68] Makarenko N. Yu., Khukhro E. I. Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms, *J. of Algebra*, **277**, N 1 (2004), 370–407.

[69] Макаренко Н. Ю. Нильпотентный идеал в кольцах Ли с автоморфизмом простого порядка, *Сиб. Мат. Ж.*, **46**, N 6 (2005), 1360–1373.

[70] Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И. Конечные группы с почти регулярным автоморфизмом порядка 4, *Алгебра и логика*, **45**, N 5 (2006), 575–602.

[71] Макаренко Н. Ю. Градуированные алгебры с малым числом нетривиальных компонент, *Сиб. Мат. Ж.,* **48**, N 1 (2007), 91–112.

[72] Васильев А. В., Вдовин В. П., Заварницин А. В., Макаренко Н. Ю., Пожидаев А. П. Конечные группы и алгебры Ли, Материалы конференции молодых ученых, посвященной 100-летию М.А. Лаврентьева, Математика, Новосибирск, 2000, 8–11.

[73] Макаренко Н. Ю. Ранговые аналоги теорем Холла и Бэра, IV Международная алгебраическая конференция, Новосибирск, 2000, С. 111.

[74] Васильев А. В., Вдовин В. П., Заварницин А. В., Макаренко Н. Ю. Теория конечных групп и алгебры Ли, Материалы конференции молодых ученых СО РАН, посвященной М.А. Лаврентьеву, Ч. I, Новосибирск, 2002, 16–19.

[75] Васильев А. В., Вдовин Е. П., Макаренко Н. Ю., Маслакова О. С., Ревин Д. О. Характеризации групп: арифметические свойства, автоморфизмы, комбинаторные методы, Материалы конференции молодых ученых СО РАН, посвященной М.А. Лаврентьеву, Ч. I, Новосибирск, 2003, 13–18.

Макаренко Наталья Юрьевна

Малые централизаторы
в группах и кольцах Ли

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,3. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 150 экз. Заказ № .

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6