На правах рукописи

Леонтьева Маргарита Николаевна

СИЛЬНАЯ КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТЬ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук **Алаев Павел Евгеньевич**

Официальные оппоненты:
Морозов Андрей Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией
Коровина Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А. П. Ершова Сибирского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится «24» апреля 2013 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «15» марта 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. И. Стукачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Тематика диссертации. Диссертация посвящена решению некоторых проблем теории вычислимых (конструктивных) моделей. Её основные результаты относятся к вычислимым булевым алгебрам. Теория вычислимых (конструктивных) моделей берет истоки в 50-х годах прошлого века в трудах А. И. Мальцева [13], М. О. Рабина [23], Р. Воота [24], В. А. Кузнецова, А. Фрёлиха и Дж. Шефердсона [18]. Изучению вычислимых булевых алгебр в частности посвящен ряд работ Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова и их учеников, а также многочисленных зарубежных исследователей.

Напомним, что модель конечного языка называется *вычислимой*, если её носитель — вычислимое множество натуральных чисел, операции — вычислимые функции, и отношения вычислимы. Вычислимая модель называется *n-вычислимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе. *Сильно вычислимая* модель — та, для которой подобный алгоритм существует для всех формул исчисления предикатов. Мы будем называть модель *сильно конструктивизируемой*, если у неё существует сильно вычислимая изоморфная копия.

Понятие сильно вычислимой (сильно конструктивной) модели было введено Ю. Л. Ершовым [10] в 1968 году. Заметим, что данная теория активно разрабатывалась в математической школе А. Нероуда на основе аналогичного (по существу, эквивалентного) понятия разрешимой модели, изучаемого также Л. Харрингтоном [21] и М. Морли [22].

В диссертации рассматриваются булевы алгебры — дистрибутивные решетки с наибольшим и наименьшим элементами, и дополнениями. В решетке у каждых двух элементов x и y есть точная нижняя и верхняя грань, которые, следуя [19], будем символически обозначать как $x \cdot y$ и $x + y$, соответственно. Дополнение элемента x до наибольшего элемента булевой алгебры обозначаем $(-x)$. Говоря о вычислимой булевой алгебре, будем подразумевать, что она вычислима как модель в языке $\Sigma_{BA} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$, где 0 и 1 соответствуют наименьшему и наибольшему элементам.

Булевы алгебры являются классическими объектами, возникающими в различных разделах математики и привлекающими внимание исследователей уже в течении полутора веков. Попытка собрать хотя бы основные достижение в этой области привела к появлению трехтомного справочника [19]. Мы будем работать со счетными булевыми алгебрами, иногда называя их кратко алгебрами; в качестве источника предварительных сведений по теории булевых алгебр будем использовать [6]. С точки зрения теории вычислимых моделей одним из наиболее естественных вопросов является описание тех булевых алгебр, которые являются сильно конструктивизируемыми.

Перейдем к описанию задач, которым посвящена данная диссертация. Для этого сначала сформулируем ряд понятий и обозначений.

Для произвольных идеалов I_1 и I_2 булевой алгебры будем использовать следующее обозначение: $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \{x + y | x \in \mathrm{I}_1, y \in \mathrm{I}_2\}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра. Ненулевой элемент $a \in \mathfrak{B}$ называется *атомом*, если $\forall b(b < a \Rightarrow b = 0)$. Множество атомов алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathrm{At}_0(\mathfrak{B})$. Элемент $a \in \mathfrak{B}$ называется *атомным*, если

$$\forall x \leqslant a(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \leqslant x(y \in \mathrm{At}_0(\mathfrak{B})))).$$

Атомные элементы образуют идеал, который мы будем обозначать как $\mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$. Элемент $a \in \mathfrak{B}$ называется *безатомным*, если $\forall x \leqslant a\ (x \notin \mathrm{At}_0(\mathfrak{B}))$; безатомные элементы также образуют идеал, и он обозначается $\mathrm{Als}_0(\mathfrak{B})$. Через $\mathrm{F}_0(\mathfrak{B})$ обозначим *идеал Фреше* (идеал, порожденный атомами), $\mathrm{E}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Als}_0(\mathfrak{B}) + \mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$ — идеал Ершова-Тарского. Пусть $\{\mathrm{E}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность итерированных идеалов Ершова-Тарского, то есть $\mathrm{E}_0(\mathfrak{B}) = \{0\}$, $\mathrm{E}_{n+1}(\mathfrak{B}) = (\mathrm{E}_n \circ \mathrm{E})(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} | \ x/\mathrm{E}_n \in \mathrm{E}(\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n)\}$. Для каждого $k \in \omega$ обозначим через At_k предикат, выделяющий в каждой алгебре множество таких элементов x, что x/E_k — атом. Аналогично определяются предикаты F_k, Als_k и Atm_k. Для предикатов $\mathrm{At}_0, \mathrm{F}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1$ будут иногда использоваться обозначения $\mathrm{At}, \mathrm{F}, \mathrm{Als}, \mathrm{Atm}, \mathrm{E}$, соответственно.

Определим некоторые наборы одноместных предикатных символов. Пусть $\Psi_0 = \{\mathrm{E}_0\}$, $\Psi_n = \Psi_0 \cup \{\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, ..., \mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}, \mathrm{E}_n\}$ для $n \geq 1$ и $\Psi_\omega = \{\mathrm{E}_0, \mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, ...\}$.

Важную роль в теории булевых алгебр играет понятие элементарной характеристики. Наименьшее n, для которого $\mathrm{E}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, называется первой (элементарной) характеристикой алгебры $\mathfrak{B}$ и обозначается $ch_1(\mathfrak{B})$. Если таких n нет, полагаем $ch_1(\mathfrak{B}) = \infty$. При $ch_1(\mathfrak{B}) = \infty$ считаем, что вторая $ch_2(\mathfrak{B})$ и третья $ch_3(\mathfrak{B})$ (элементарные) характеристики алгебры $\mathfrak{B}$ равны нулю. В противном случае (т.е. если $ch_1(\mathfrak{B}) = n$), вторая характеристика $ch_2(\mathfrak{B})$ равна числу атомов алгебры $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$, если это число конечно, и $ch_2(\mathfrak{B}) = \infty$, если в $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$ бесконечно много атомов. Третья характеристика $ch_3(\mathfrak{B})$ равна 1, если в $\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n$ есть ненулевой безатомный элемент, и равна 0 в противном случае.

Элементарная характеристика $ch(\mathfrak{B})$ алгебры $\mathfrak{B}$ — это тройка $(ch_1(\mathfrak{B}), ch_2(\mathfrak{B}), ch_3(\mathfrak{B}))$. Определенная таким образом элементарная характеристика обладает тем свойством, что две булевы алгебры элементарно эквивалентны (имеют одну и ту же элементарную теорию) тогда и только тогда, когда их элементарные характеристики равны.

Для каждой элементарной теории булевой алгебры T, кроме той, которая соответствует элементарной характеристике $(\infty, 0, 0)$, Ю.Л.Ершов в [9] построил конечный набор предикатов $\Psi(\mathrm{T})$, определяемых формулами первого порядка, такой, что булева алгебра $\mathfrak{B}$ с элементарной теорией T является сильно вычислимой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ вычислима и вычислимы все предикаты из набора $\Psi(\mathrm{T})$. Позже С.С.Гончаровым было показано, что при $n \leq |\Psi(\mathrm{T})|$ вычислимость $\mathfrak{B}$ вместе с вычислимостью первых $n+1$ предикатов набора $\Psi(\mathrm{T})$ равносильна вычислимости Σ_n-диаграммы $\mathfrak{B}$, т.е. n-вычислимости.

В терминах приведенных выше обозначений и понятий, набор предикатов $\Psi(\mathrm{T})$, представленный Ю. Л. Ершовым в [9] имеет вид Ψ_{n+1}, где $n \in \omega$ является первой элементарной характеристикой, соответствующей теории T.

Описанные результаты породили целую серию исследований, в которых рассматривалась следующая

Задача 1. *Если $S \subseteq \Psi(T)$ и известно, что $\mathfrak{B}$ вычислима и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S, то можно ли утверждать, что $\mathfrak{B}$ сильно конструктивизируема?*

Данная проблема привлекала серьезное внимание широкого круга исследователей. В работах С. С. Гончарова, С. П. Одинцова, В. Н. Власова и П. Е. Алаева был получен ряд результатов о связи n-вычислимости с сильной конструктивизируемостью, то есть для случая, когда S является начальным отрезком $\Psi(\mathrm{T})$. В частности, П. Е. Алаевым был получен окончательный ответ для этого случая. Приведем здесь краткий обзор этих результатов.

В [8] приводится пример 0-вычислимой (то есть просто вычислимой) алгебры характеристики $(0, \infty, 0)$, не имеющей сильно вычислимого представления. При этом из [9] следует, что в этом случае 1-вычислимость влечет не только сильную конструктивизируемость, но и сильную вычислимость. Для $(0, m, 0)$ и $(0, m, 1)$, $m \in \omega$, ответ сразу следует из [9]: вычислимость означает и сильную вычислимость.

В [9] указаны достаточные условия сильной вычислимости (а значит, и сильной конструктивизируемости) и для всех остальных характеристик вида $(m, \star, \star)$, где $m \in \omega$. Например, для характеристик $(m, \infty, 0)$ и $(m, \infty, 1)$ сильная вычислимость следует из $(4m+1)$-вычислимости. Небольшая модификация примера из [8], выполненная в [6], показывает, что $4m$-вычислимости недостаточно и для сильной конструктивизируемости.

В [14] было показано, что для характеристики $(1,1,0)$ 2-вычислимость влечет сильную конструктивизируемость, а для $(1,0,1)$ 3-вычислимость влечет сильную конструктивизируемость. В [6] было завершено доказательство того, что для $(1,1,0)$ уже 1-вычислимость влечет сильную конструктивизируемость. В [5] для характеристики $(1,0,1)$ был построен пример 1-вычислимой алгебры, не имеющей сильно вычислимого представления. В [1] было доказано, что для характеристики $(1,0,1)$ уже 2-вычислимость влечет сильную конструктивизируемость. В [2] получено, что для характеристики $(m,1,0)$, $m \geq 2$, сильная конструктивизируемость следует из $(4m-3)$-вычислимости, а для $(m,0,1)$, $m \geq 2$, — из $(4m-2)$-вычислимости. В [25] доказано, что в случае алгебры характеристики $(m,0,1)$, $m > 0$ из $(4m-3)$-вычислимости и вычислимости предиката Atm_{m-1} также следует сильная конструктивизируемость.

В диссертации ответ найден для всех возможных подмножеств $S \subseteq \Psi(\mathrm{T})$, сформулированный в теореме 1, и тем самым завершено исследование, имеющее столь длинную историю.

Теорема 1. *Пусть $n, p \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с первой элементарной характеристикой n, $S \subseteq \Psi_{n+1}$ и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S.*

(1) Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p, 1)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ имеет сильно вычислимое представление; в противном случае она не является, вообще говоря, сильно конструктивизируемой.

(2) Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p+1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n-1$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ имеет сильно вычислимое представление; в противном случае она не является, вообще говоря, сильно конструктивизируемой.

(3) Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, \infty, 0)$ или

$(n, \infty, 1)$. *Если для каждого $k \leq n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ имеет сильно вычислимое представление; в противном случае она не является, вообще говоря, сильно конструктивизируемой.*

Отметим также, что в диссертации рассматривается и случай характеристики $(\infty, 0, 0)$. Что же известно о связи вычислимости рассматриваемых предикатов и сильной конструктивизируемости булевой алгебры, когда элементарная характеристика есть $(\infty, 0, 0)$? В [7] построен пример алгебры с характеристикой $(\infty, 0, 0)$, которая n-вычислима для всех $n \in \omega$ (без равномерности по n), но не имеет сильно вычислимого представления. Тем самым для алгебры характеристики $(\infty, 0, 0)$ не существует конечного набора предикатов, определяемых формулами первого порядка, который мог бы обеспечить сильную конструктивизируемость. Однако Ю. Л. Ершов [9] показал, что если последовательность Ψ_ω равномерно вычислима, то булева алгебра характеристики $(\infty, 0, 0)$ будет сильно вычислима. Требование равномерной вычислимости здесь существенно, как было показано в предыдущем примере. Данные результаты подводят нас к вопросу, аналогичному задаче 1:

Задача 2. Если Ψ — подпоследовательность Ψ_ω и известно, что $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики $(\infty, 0, 0)$ и в $\mathfrak{B}$ равномерно вычислима последовательность Ψ, то можно ли утверждать, что $\mathfrak{B}$ сильно конструктивизируема?

Эта задача также полностью исследована в диссертации, результат сформулирован в виде теоремы 2.

Теорема 2. *(1) Для любой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(\infty, 0, 0)$ и любой вычислимой функции $h(i)$, принимающей значения из $\{0, 1\}$, верно следующее утверждение. $\mathfrak{A}$ имеет сильно вычислимое представление тогда и только когда, когда $\mathfrak{A}$ имеет вычислимое представление, в котором равномерно вычислима последовательность предикатов At_0, R_0, At_1, $R_1, \ldots$, где*

$$R_i = \begin{cases} Als_i, & \text{если } h(i) = 0; \\ Atm_i, & \text{если } h(i) = 1. \end{cases}$$

(2) Условия, сформулированные в пункте (1), минимальны в следующем смысле: для каждого $i \in \omega$ существует вычислимая булева алгебра, в которой равномерно вычислима последовательность предикатов $\Psi' = \Psi_\omega \setminus \{At_i\}$, не имеющая сильно вычислимого пред-

ставления; и аналогичное утверждение верно для последовательности $\Psi'' = \Psi_\omega \backslash \{Als_i, Atm_i\}$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации.

1. Для каждой элементарной теории T, кроме теории, соответствующей элементарной характеристике $(\infty, 0, 0)$, перечислены все множества $S \subseteq \Psi(\mathrm{T})$ такие, что если булева алгебра $\mathfrak{B}$ данной теории вычислима и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S, то можно утверждать, что $\mathfrak{B}$ сильно конструктивизируема (**теорема 1**, опубликовано в [25], [26], [27], [28] и [29]).

2. Получена некоторая характеризация Δ_6^0-вычислимых булевых алгебр (**теорема 9**, приведена ниже, опубликована в [26]).

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории вычислимых булевых алгебр.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих конференциях: «Computability in Europe 2012» (Кембридж, Англия), «Logic Colloquium 2011» (Барселона, Испания), «Logic Colloquium 2010» (Париж, Франция), «Logic Colloquium 2009» (София, Болгария), «Мальцевские чтения 2010 и 2009» (Новосибирск). Кроме того, результаты неоднократно докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ “Конструктивные модели” и “Алгебра и логика”.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [25-33], из них [25-29] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы (39 наименований), глава 2 дополнительно разбита на параграфы. Теоремы и леммы пронумерованы независимо, сквозным образом. Известные утверждения, используемые в работе, формулируются в виде лемм и теорем, и имеют непосредственно после номера ссылку на источник. Объём диссертации — 67 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Главы 1, 2 и 3 посвящены решению задачи 1, результат которой сформулирован в виде теоремы 1. В частности, **глава 1** посвящена доказательству достаточности приведенных в теореме 1 требований для сильной конструктивизируемости булевых алгебр элементарных характеристик $(n, 0, 1)$, $(n, 1, 0)$ и $(n, \infty, 0)$, которое можно найти в теоремах 4, 5 и 6, соответственно.

Теорема 4. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 0, 1)$. Если для каждого $k < n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ — сильно конструктивизируемая алгебра.*

Теорема 5. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и для каждого $m < n - 1$ вычислим хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — сильно конструктивизируемая алгебра.*

Теорема 6. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$. Если для каждого $k \leq n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и для каждого $m < n$ вычислим хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — сильно конструктивизируемая алгебра.*

Результаты, сформулированные в теоремах 4, 5 и 6, получены автором лично и опубликованы в [27]. Кроме того, теорема 4 для случая $n = 1$ была ранее опубликована в статье автора [25].

В главе 2 показывается минимальность некоторых из сформулированных в теореме 1 требований для сильной конструктивизируемости булевых алгебр характеристик $(n, 0, 1)$ и $(n, \infty, 0)$ в следующем смысле: доказано, что если опустить некоторое из требований, то существует контрпример, то есть булева алгебра, удовлетворяющая всем оставшимся условиям, но не имеющая сильно вычислимого представления.

Глава 2 начинается с параграфа 2.1, где показывается существование следующего контрпримера булевой алгебры элементарной характеристики $(1, 0, 1)$.

Теорема 8. *Существует вычислимая алгебра элементарной характеристики $(1, 0, 1)$ с вычислимыми множеством атомов и идеалом разложимых элементов, у которой нет сильно вычислимой изоморфной копии.*

В параграфе 2.2 также приведена следующая характеризация Δ^0_6-

вычислимых булевых алгебр, практически полученная в ходе доказательства теоремы 8.

Определим обозначение для идеала $\mathrm{T}_1 = (\mathrm{Atm} \to \mathrm{F}) + \mathrm{Atm}$, где $\mathrm{Atm} \to \mathrm{F} = \{x | \forall z \leq x (z \in \mathrm{Atm} \Rightarrow z \in \mathrm{F})\}$.

Теорема 9. *Алгебра $\mathfrak{A}$ является Δ^0_6-вычислимой алгеброй тогда и только тогда, когда существует вычислимая алгебра $\mathfrak{C}$ характеристики (1,0,1) такая, что $\mathfrak{C}/T_1 \cong \mathfrak{A}$.*

Результаты, сформулированные в теоремах 8 и 9, получены автором лично и опубликованы в [26].

В параграфе 2.3 показывается существование следующего контрпримера булевой алгебры элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$.

Теорема 10. *Для любого $n \in \omega$ существует $4n$-вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$, у которой нет сильно вычислимой изоморфной копии.*

В параграфе 2.4 теорема 8 продолжается на случай булевых алгебр элементарных характеристик $(n, 0, 1)$, где $n \geq 1$, следующим образом.

Теорема 11. *Для любого $n > 0$ существует вычислимая алгебра элементарной характеристики (n,0,1) с вычислимыми предикатами из множества $\sigma = \Psi_n \backslash \{Als_{n-1},\ Atm_{n-1}\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

В параграфе 2.5 приводится очередная серия контрпримеров для булевых алгебр элементарных характеристик вида $(n, \infty, 0)$, представленная в теоремах 12 и 13.

Теорема 12. *Существует вычислимая алгебра характеристики $(1, \infty, 0)$ с вычислимыми предикатами At_0, E_1 и At_1, не имеющая сильно вычислимого представления.*

Теорема 13. *Для любого $n > 1$ существует вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$ с вычислимыми предикатами из множества $\Psi_{n+1} \backslash \{Als_{n-1},\ Atm_{n-1}\}$, не имеющая сильно вычислимого представления.*

В главе 3 показано, что результатов глав 1 и 2 достаточно, чтобы показать достаточность и минимальность требований для всех остальных элементарных характеристик, кроме $(\infty, 0, 0)$ и, тем самым, завершить доказательство теоремы 1.

Результаты, сформулированные в теоремах 10, 11, 12 и 13, а также результаты главы 3, получены автором лично и опубликованы в [28]. Кроме того, результаты глав 1-3 опубликованы в обзорной статье [29].

Глава 4 посвящена решению задачи 2, результат которой сформулирован в виде теоремы 2. Сначала приведено доказательство минимальности найденных условий существования сильной конструктивизации для булевых алгебр элементарной характеристики $(\infty, 0, 0)$, то есть пункта (2) теоремы 2, что является несложным следствие результатов глав 1-3. Основную часть главы 4 занимает доказательство пункта 1 теоремы 2, для чего приведены две конструкции для построения нужной сильной конструктивизации. Результат, сформулированный в теореме 2, получен автором лично.

Главы 1 и 2 являются независимыми по содержанию, глава 3 является простым следствием глав 1 и 2, завершающим доказательство теоремы 1. Глава 4 опирается на результаты глав 1-3 в вопросах доказательства пункта (2) теоремы 2.

Литература

[1] *Алаев П. Е.* Разрешимые булевы алгебры характеристики (1,0,1) // Математические труды. том 7, N1 (2004). С. 3-12.

[2] *Алаев П. Е.* Сильно конструктивные булевы алгебры // Алгебра и логика. том 44, N1 (2005). С. 3-23.

[3] *Алаев П. Е.* Гиперарифметические булевы алгебры с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 45, N5(2004). С. 963-976.

[4] *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 43, N2(2004). С. 133-158.

[5] *Власов В. Н.* Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики $(1, 0, 1)$ // Алгебра и логика. 37, N5 (1998). С. 499-521.

[6] *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск. Научная книга (НИИ МИОО НГУ). 1996.

[7] *Гончаров С. С.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 17, N4 (1976). С. 797-812.

[8] *Гончаров С. С.* Некоторые свойства конструктивизации булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 16, N2 (1975). С. 264-278.

[9] *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. т.3, N3. 1964. С. 17-38.

[10] *Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели // Избранные вопросы алгебры и логики. Наука. Новосибирск. 1973. С. 111-130.

[11] *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980.

[12] *Логическая тетрадь. Нерешенные вопросы математической логики.* Оперативный информационный материал. Под редакцией Ю. Л. Ершова и С. С. Гончарова. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1986.

[13] *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Доклады АН СССР. т. 146, N5. 1962. С. 1009-1012.

[14] *Одинцов С. П.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр нижнего слоя // препринт N21. Ин-т матем. СО АН СССР. 1986.

[15] *Ash C. J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Elsevier. 2000.

[16] *Barwise J.* Back-and-forth through infinitary logic // Studies in Model Theory. ed. by M.D.Morley. M.A.A. Studies in Mathematics. vol. 8 (1973). P. 5-34.

[17] *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras // J. Symb. Log. 35. N3 (1970). P. 365-374.

[18] *Frohlich A., Shepherdson J.* Effective procedures in field theory // Philos. Trans. Soc. London. ser. A. v. 248, 1956. P. 407-432.

[19] *Monk J. D., Koppelberg S., Bonnet R. (eds.)* Handbook of Boolean algebras. Elsevier. 1989.

[20] *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.)* Handbook of Recursive Mathematics. Elsevier. 1998.

[21] *Harrington L.* Recursively presentable prime models // J. Symb. Log. 39 (1974) P. 305-309.

[22] *Morley M.* Decidable models // Israel J. Math. 25 (1976). P. 233-240.

[23] *Rabin M. O.* Effective computability of winning strategies // Contributions to the Theory of Games. v. 3. Princeton Univ. Press. Princeton. 1957. P. 147-157.

[24] *Vaught R. L.* Sentences true in all constructive models // J. Symb. Log. v. 25, N1. 1960. P. 39-58.

Работы автора по теме диссертации

Оригинальные статьи

[25] *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом атомных элементов // Вестник НГУ. Серия.: матем., механика, информ. 2010. Т.10, вып.1. С. 65-69.

[26] *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом Ершова-Тарского // Алгебра и логика. Т.50, N2 (2011). С. 133-151.

[27] *Леонтьева М. Н.* Достаточные условия разрешимости для булевых алгебр // Вестник НГУ. Серия.: матем., механика, информ. 2011. Т.11, вып. 4. С. 63-68.

[28] *Леонтьева М. Н.* Минимальность некоторых условий разрешимости для булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 2012. Т.53, N1. С. 132-147.

[29] *Леонтьева М. Н.* Существование сильно вычислимых представлений в классе булевых алгебр // Доклады АН. 2012. Т.445, N2. С. 132-134.

Переводы оригинальных статей на английский язык

[30] *Leontieva M. N.* Boolean algebras of elementary characteristic (1, 0, 1) whose set of atoms and Ershov–Tarski ideal are computable // Algebra and Logic. Volume 50, Issue 2. May 2011. P. 93-105.

[31] *Leontyeva M. N.* The minimality of certain decidability conditions for Boolean algebras // Siberian Mathematical Journal. Volume 53, Issue 1. January 2012. P. 106-118.

[32] *Leontyeva M. N.* The existence of strongly computable representations in the class of Boolean algebras // Doklady Mathematics. Volume 86, Issue 1. July 2012. P. 469-471.

[33] *Leont'eva M.* Boolean algebras of elementary characteristic (1, 0, 1) with computable set of atoms and computable ideal of atomic elements // Journal of Mathematical Sciences. Volume 186, Issue 3 (2012). P. 461-465.

Тезисы конференций

[34] *Леонтьева М. Н.* Разрешимые булевы алгебры характеристики $(1, 0, 1)$ // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск. НГУ. 2008. С. 82.

[35] *Leontyeva M.* Decidable Boolean Algebras of Elementary Characteristics $(1, 0, 1)$ // Abstracts of “Logic Colloquium 2009” “St. Kliment Ohridski” University Press. Sofia University. Faculty of Mathematics and Informatics. P. 62-63.

[36] *Leontyeva M.* Decidable Boolean Algebras of Elementary Characteristics $(1, 0, 1)$ // Bull. Symb. Log. Volume 16, Issue 01. March 2010. P. 123-124.

[37] *Leontyeva M.* Decidability of Boolean algebras with fixed elementary theory // Bull. Symb. Log. Volume 17, Issue 02. June 2011. P. 306.

[38] *Leontyeva M.* Strongly computable copies of Boolean algebras with elementary characteristic $(infinity, 0, 0)$ // Abstracts of “Logic Colloquium 2011”. Barcelona. Spain. P. 75.

[39] *Leontyeva M.* Strongly computable copies of Boolean algebras with elementary characteristic $(infinity, 0, 0)$ // Bull. Symb. Log. Volume 18, Issue 03. September 2012. P. 452-453.

Леонтьева Маргарита Николаевна

СИЛЬНАЯ КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТЬ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.02.13. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 5.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр.Лаврентьева, 6