На правах рукописи

Кузьмина Анна Сергеевна

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

01.01.06. — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Барнаул — 2009

Работа выполнена на кафедре алгебры Алтайской государственной педагогической академии.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Ю.Н. Мальцев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук П.С. Колесников,
	кандидат физико-математических наук И.А. Долгунцева
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится « 24 » декабря 2009 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:
630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан «____» __________ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данное исследование велось в двух независимых направлениях. Первое направление связано с понятием армендеризовского кольца, а второе – с понятием графа делителей нуля ассоциативного кольца. Оба эти понятия были введены совсем недавно. Их объединяет то, что они описывают свойства делителей нуля ассоциативного кольца.

В 1974 году Е. Армендериз опубликовал статью [11], в которой отмечалось, что если произведение двух многочленов с коэффициентами из кольца без ненулевых нильпотентных элементов равно нулю, то и всевозможные попарные произведения коэффициентов этих многочленов равны нулю.

В 1997 году кольцам, удовлетворяющим такому условию, в работе [23] дали название "армендеризовских", т.е. кольцо R называется *армендеризовским,* если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in R[x]$ из того, что $f(x)g(x) = 0$, следуют равенства $a_ib_j = 0$ для всех $i = 0, 1, ..., m$ и $j = 0, 1, ..., n$.

С этого времени армендеризовские кольца стали объектом многих исследований.

Отметим, что во всех известных нам работах, посвященных исследованию армендеризовских колец, результаты формулируются для ассоциативных колец с единицей, причем в доказательстве многих фактов наличие в кольце единицы играет существенную роль. В нашей же работе понятие армендеризовского кольца используется для ассоциативных колец, не обязательно имеющих единицу.

В 1998 году Д. Андерсон и В. Камилло доказали в [8], что кольцо многочленов над армендеризовским кольцом является армендеризовским и армендеризовское регулярное (по фон Нейману) кольцо не имеет ненулевых нильпотентных элементов.

Позже в работе [16] было доказано, что в любом армендеризовском кольце все идемпотенты являются центральными.

В 2002 году в статье [15] доказаны следующие факты:

- если фактор-кольцо R/I является армендеризовским для некоторого идеала I, в котором нет ненулевых нильпотентных элементов, то кольцо R армендеризовское;

- если кольцо R имеет полное классическое правое кольцо частных Q, то кольцо R является армендеризовским в том и только в том случае, когда кольцо частных Q армендеризовское.

В работе [19] описаны некоторые армендеризовские подкольца полного матричного кольца над кольцом без ненулевых нильпотентных элементов.

Кроме того, был получен ряд других результатов для армендеризовских колец с единицей (см., например, работы [8, 15, 16, 18]).

Позже авторы многих исследований стали вводить определения, производные от определения армендеризовского кольца, и доказывать для этих новых типов колец, если это было возможно, аналоги результатов, полученных ранее для армендеризовских колец (см., например, работы [10, 14, 20]).

В частности, в статье [18] было введено понятие слабого армендеризовского кольца: кольцо R называется ***слабым армендеризовским***, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x$ и $g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$ из того, что $f(x)g(x) = 0$, следуют равенства $a_ib_j = 0$ для $i = 0, 1$ и $j = 0, 1$. Кроме того, в этой работе доказан ряд результатов, касающихся этого класса колец, и приведен пример, иллюстрирующий, что существует слабое армендеризовское кольцо, не являющееся армендеризовским.

В 2006 году в работе [21] термином "слабое армендеризовское кольцо"были названы кольца с другим условием, а именно: кольцо R называется слабым армендеризовским, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in R[x]$ из того, что $f(x)g(x) = 0$, следует, что a_ib_j является нильпотентным элементом для всех $i = 0, 1, ..., m$ и $j = 0, 1, ..., n$. Подчеркнем, что мы в своем исследовании пользуемся определением слабого армендеризовского кольца, введенного в [18].

Полного описания армендеризовских и слабых армендеризовских колец пока нет. Новые результаты, получаемые в этом направлении, только расширяют класс уже известных (слабых) армендеризовских колец. Поэтому представляет интерес описание многообразий ассоциативных колец, все или часть колец которых являются армендеризовскими (слабыми армендеризовскими). Первым исследованием в этом направлении была наша работа [27], результаты которой позже были обощены самим автором. Учитывая то особое положение, которое в теории многообразий занимают критические и подпрямо неразложимые кольца, мы поставили следующие задачи:

Задача 1. Описать многообразия ассоциативных колец, в которых все критические кольца являются слабыми армендеризовскими.

Задача 2. Описать многообразия ассоциативных колец, в которых все подпрямо неразложимые конечные кольца являются (слабыми) армендеризовскими.

(Напомним, что конечное кольцо R называется *критическим*, если оно не принадлежит многообразию, порожденному всеми собственными подкольцами и фактор-кольцами кольца R.)

Можно показать, что любое кольцо, в котором все конечнопорожденные подкольца являются армендеризовскими, само является армендеризовским (см. доказательство теоремы 1.3). Поэтому, на наш взгляд, особый интерес представляют локально конечные многообразия, т.е. многообразия, в которых все конечнопорожденные кольца являются конечными. Нами была поставлена еще одна задача.

Задача 3. Описать локально конечные многообразия ассоциативных колец, в которых все кольца являются (слабыми) армендеризовскими.

Как мы уже отмечали, полного описания (слабых) армендеризовских колец пока не существует. Поэтому нам представляется естественной задача описания армендеризовских колец с какими-либо дополнительными ограничениями. В работах, посвященных многообразиям ассоциативных колец и кольцам с полиномиальными тождествами, неоднократно возникало тождество вида $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Например, Ю.Н. Мальцев в работе [2] полностью описал критические алгебры над полем $GF(p)$, удовлетворяющие тождеству $x^2 = x^n$, $n \geq 3$. М.В. Волков в [1] доказал, что структура подмногообразий многообразия ассоциативных колец, задаваемого тождеством $x^2 = x^3 f(x)$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, дистрибутивна. В работе [4] была доказана шпехтовость многообразий ассоциативных колец, удовлетворяющих тождеству $x^2 = x^n, n \geq 3$. Кроме того, и в нашей работе при описании многообразий, в которых все подпрямо неразложимые конечные кольца являются армендеризовскими, появилось тождество $xy + f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – многочлен, нижняя степень которого больше двух. Поэтому мы поставили следующую задачу.

Задача 4. Описать (слабые) армендеризовские подпрямо неразложимые конечные кольца, удовлетворяющие тождеству $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Теперь перейдем к другому объекту, исследованию которого также посвящена данная диссертация.

Идея построения графа делителей нуля впервые была использована в 1986 году в работе [12] для коммутативного кольца. В качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца автор этой работы И.Бек рассматривал все элементы кольца, причем две различные вершины x и y соединял ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$. Введение понятия графа делителей нуля кольца устанавливает связь между теорией колец и теорией графов. И.Бек занимался, в основном, раскраской графов делителей нуля коммутативных колец.

В 1999 году Д. Андерсон и Ф. Ливингстон в работе [9] несколько изменили способ построения графа делителей нуля. Вершинами графа делителей нуля коммутативного кольца они стали считать все ненулевые делители нуля. По мнению Д. Андерсона и Ф. Ливингстона, такое определение лучше иллюстрирует структуру множества делителей нуля. Действительно, в [9] доказано, что граф делителей нуля коммутативного кольца с единицей, вершинами которого являются лишь ненулевые делители нуля, связен. Если же рассматривать в качестве вершин графа все элементы кольца, то это утверждение становится очевидным, поскольку нуль – вершина, которая является смежной для всех остальных вершин графа. Статья [9] посвящена изучению некоторых взаимосвязей между свойствами коммутативного кольца с единицей и свойствами графа делителей нуля этого кольца.

С 1999 года теория графов делителей нуля коммутативного кольца стала интенсивно развиваться. Кроме того, это понятие было распространено и на некоммутативный случай. Для некоммутативного кольца используются два определения графа делителя нуля. Во-первых, введено понятие ориентированного графа делителя нуля. Вершинами такого графа считаются все (односторонние и двусторонние) делители нуля кольца, причем две различные вершины соединяются ориентированным ребром $x \longrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (см., в частности, работы [7, 25]). Во-вторых, используется определение неориентированного графа делителей нуля, т.е. графа, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда либо $xy = 0$, либо $yx = 0$ (см. работу [7]). Понятно, что в коммутативном случае последнее определение графа делителей нуля совпадает с определением, введенным Д. Андерсоном и Ф. Ливингстоном в [9].

Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определенному условию. Так, в статье [22] дается описание колец целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}_n[i]$ по модулю n, графы делителей нуля которых являются полными, полными двудольными, планарными или эйлеровыми.

Ранее в [7] исследовались кольца с единицей, ориентированные графы делителей нуля которых эйлеровы. В частности, в этой работе доказано, что любое полупростое конечное кольцо имеет эйлеров ориентированный граф делителей нуля. Также авторы работы [7] доказали, что для любого конечного поля K и любой конечной группы G ориентированный граф делителей нуля группового кольца KG эйлеров. Далее, в [7] доказано, что разложимое конечное кольцо $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n, n \geq 2$, имеет эйлеров направленный граф делителей нуля в том и только в том случае, когда для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ либо кольцо R_i является полем, либо ориентированный граф делителей нуля кольца R_i эйлеров.

Мы поставили аналогичную задачу для неориентированного графа делителей нуля. (Отметим, что всюду далее в работе мы под термином „граф делителей нуля“ понимаем определение неориентированного графа делителей нуля.)

Задача 5. Описать конечные кольца с единицей, имеющие эйлеровы графы делителей нуля.

Поскольку вопрос полного описания конечных колец, графы делителей нуля которых эйлеровы, остается открытым, нам представляется естественной следующая задача.

Задача 6. Описать многообразия ассоциативных колец, в которых все конечные кольца имеют эйлеровы графы делителей нуля.

В работах [6, 13] исследуются коммутативные конечные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны. В [6] приведено, в частности, полное описание конечных коммутативных разложимых колец с единицей, у которых графы делителей нуля планарны, а в [13] составлен полный список коммутативных конечных локальных колец с планарными графами делителей нуля. Работа [24] посвящена исследованию бесконечных планарных графов делителей нуля коммутативных колец с единицей. Некоммутативные кольца и кольца без единицы, имеющие планарные графы делителей нуля, до сих пор описаны не были, поэтому мы поставили следующую задачу.

Задача 7. Описать все конечные кольца с планарными графами делителей нуля.

В статье [9] доказано, что если R – коммутативное кольцо с единицей, в котором существует не менее четырех ненулевых делителей нуля, то граф делителей нуля этого кольца является звездой тогда и только тогда, когда $R \cong GF(2) \oplus GF(p^n)$ для некоторого простого числа p и $n \geq 0$. В работе [6] получены некоторые результаты для коммутативных колец с единицей, графы делителей нуля которых являются полными r-дольными графами ($r \geq 2$). Мы поставили следующую задачу.

Задача 8. Описать конечные кольца без 2-кручения, графы делителей нуля которых являются полными двудольными.

Цель работы. Данная работа посвящена решению задач 1 – 8.

Методы исследования. В работе используются методы и результаты теории многообразий ассоциативных колец, теории конечных колец и теории графов.

Основные результаты. Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

- доказано, что если в многообразии все критические кольца являются слабыми армендеризовскими, то любое критическое кольцо этого многообразия либо является армендеризовским, либо является нильпотентной однопорожденной алгеброй над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_{p^t}$, где p – нечетное простое число и $t > 1$; дана характеризация на языке "запрещенных"колец таких многообразий колец, все подпрямо неразложимые конечные кольца которых являются армендеризовскими; описаны все армендеризовские подпрямо неразложимые конечные кольца, удовлетворяющие тождеству $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$;

- найдено необходимое и достаточное условие на языке тождеств для того, чтобы все конечные кольца многообразия имели эйлеровы графы делителей нуля; полностью описаны конечные кольца с единицей, имеющие эйлеровы графы делителей нуля; полностью описаны конечные кольца с планарными графами делителей нуля.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретическое значение. Результаты диссертации могут быть использованы для дальнейшего исследования армендеризовских колец и для описания свойств графа делителей нуля ассоциативного кольца. Кроме того, результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории многообразий ассоциативных колец и по теории конечных колец.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

- семинаре по теории колец кафедры алгебры и теории чисел Алтайского государственного университета (Барнаул, 2007 – 2009 гг.);
- на семинаре по теории колец им. А. И. Ширшова Института математики СО РАН (февраль 2009 г.);
- на всероссийской научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России"(Барнаул, Алтайский государственный политехнический университет, Барнаульский государственный педагогический университет, 2007, 2008 гг.);
- на международной конференции "Мальцевские чтения"(Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2007, 2008, 2009 гг.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в отечественных и зарубежном журналах [26] – [32], а также в материалах конференций [33] – [41]. Три работы являются совместными с Ю.Н. Мальцевым, и результаты этих работ получены в нераздельном соавторстве.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем диссертации составляет 103 страницы. Список литературы, приведенный в конце работы, содержит 52 наименования.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Каждая из глав диссертации подразделяется на параграфы. В конце введения приведен список обозначений, используемых на протяжении всей работы. Нумерация утверждений (теорем, предложений, лемм и следствий) сквозная внутри каждой главы. Номер каждого утвержения состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, а второе – порядковому номеру утверждения в данной главе. Формулы и рисунки имеют сквозную внутри всей диссертации нумерацию.

Каждый параграф имеет следующую структуру. В начале параграфа (кроме §1.1 и §2.1, в которых приводятся необходимые определения и обозначения) сначала формулируется основной результат, потом доказываются вспомогательные утверждения, а в конце параграфа приводится доказательство основного результата, сформулированного в начале параграфа. Номер каждого параграфа состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, а второе – порядковому номеру параграфа в главе.

Первая глава посвящена исследованию многообразий ассоциативных колец, все или некоторая часть колец которых являются (слабыми) армендеризовскими.

В параграфе §1.1 приведены определения и обозначения, используемые в первой главе.

Параграф §1.2 посвящен исследованию многообразий колец, в которых все критические кольца являются слабыми армендеризовскими.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец, в котором все критические кольца являются слабыми армендеризовскими. Тогда любое критическое кольцо R из многообразия $\mathfrak{M}$ является либо армендеризовским кольцом, либо однопорожденной $\mathbb{Z}_{p^t}$ –алгеброй, такой, что $R^p = 0$, где p – нечетное простое число и $t > 1$.*

Основными результатами параграфа §1.3 являются теоремы 1.2 и 1.3. (Через $T(\mathfrak{M})$ обозначается идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$. Для любого простого числа p через B_p обозначается кольцо верхних треугольных матриц второго порядка над полем $GF(p)$, а $M_p = \langle m_1, m_2; pm_1 = pm_2 = 0, m_1^2 = m_2^2 = 0, m_1m_2 + m_2m_1 = 0\rangle$ и $N_p = \langle n_1, n_2; pn_1 = pn_2 = 0, n_1^2 = n_2^2 = 0, n_1n_2 = n_2n_1\rangle$.)

Теорема 1.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(2) любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(3) $B_p, M_p, N_p \notin \mathfrak{M}$ для любого простого числа p;

(4) $B_p \notin \mathfrak{M}$ для любого простого числа p и $xy + f(x, y) \in T(\mathfrak{M})$, где $f(x, y)$ – многочлен, нижняя степень которого больше 2.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – локально конечное многообразие колец. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(2) любое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является армендеризовским;

(3) любое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(4) любое подпрямо неразложимое конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$ является слабым армендеризовским;

(5) $B_p, M_p, N_p \notin \mathfrak{M}$ *для любого простого числа* p*;*

(6) $B_p \notin \mathfrak{M}$ *для любого простого числа* p *и* $xy + f(x,y) \in T(\mathfrak{M})$, *где* $f(x,y)$ *– многочлен, нижняя степень которого больше* 2.

В теореме 1.2 для многообразий, в которых все подпрямо неразложимые конечные кольца являются армендеризовскими, получена характеризация на языке „запрещенных“ колец (так называемая *индикаторная характеризация*, см. [3, 5]). Кроме того, доказывается, что для того, чтобы все подпрямо неразложимые конечные кольца некоторого многообразия были армендеризовскими, достаточно, чтобы все такие кольца из данного многообразия являлись слабыми армендеризовскими.

Теорема 1.3 описывает локально конечные многообразия колец, все кольца которых являются армендеризовскими. Оказывается, для того чтобы все кольца локально конечного многообразия являлись армендеризовскими, достаточно, чтобы все подпрямо неразложимые конечные кольца из этого многообразия были слабо армендеризовскими.

В параграфе §1.4 доказывается, что для любого подпрямо неразложимого конечного кольца, удовлетворяющего некоторому тождеству вида $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, условия „быть армендеризовским“ и „быть слабо армендеризовским“ равносильны (теорема 1.4). Более того, в теореме 1.5 описываются все (слабые) армендеризовские подпрямо неразложимые конечные кольца, удовлетворяющие указанному тождеству.

Теорема 1.5. *Пусть* S *– подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее тождеству* $x^2 = x^3 f(x)$, *где* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. *Тогда кольцо* S *является (слабым) армендеризовским в том и только в том случае, если кольцо* S *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) S *– конечное поле;*

(2) $S^2 = 0$;

(3) S *– локальное кольцо с единицей, такое, что* $J(S)^2 = 0$*;*

(4) $S \cong \begin{pmatrix} GF(p^n) & GF(p^n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} GF(p^n) & 0 \\ GF(p^n) & 0 \end{pmatrix}$.

(Через $J(S)$ в работе обозначается радикал Джекобсона кольца S.)

Вторая глава посвящена исследованию колец с эйлеровыми графами делителей нуля и многообразий колец, в которых все конечные кольца имеют эйлеровы графы делителей нуля.

В параграфе §2.1 приведены обозначения серий колец, используемые во второй и третьей главах. Кроме того, здесь сформулированы необходимые определения и результаты из теории графов.

В параграфе §2.2 доказаны следующие факты:

- граф делителей нуля кольца является конечным (т.е. имеет конечное число ребер и вершин) в том и только в том случае, когда либо само кольцо конечно, либо в кольце нет ненулевых делителей нуля (предложение 2.1);
- граф делителей нуля произвольного кольца связен[2] (предложение 2.2).

Отметим, что ранее эти результаты были известны лишь для коммутативных колец с единицей (см. [9]).

В параграфе §2.3 полностью описаны конечные кольца с единицей, имеющие эйлеровы графы делителей нуля. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть R – конечное кольцо с единицей. Граф делителей нуля кольца R является эйлеровым в том и только в том случае, если R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) R – поле;

(2) $R = \oplus_{i=1}^{k} GF(p_i^{\alpha_i})$, причем $p_i \neq 2$ при $i = 1, ..., k$ и $k \geq 2$;

(3) R – такое локальное кольцо, что порядок кольца R равен 2^n, $n \geq 2$, и $x^2 = 0$ для всех $x \in J(R)$.

Параграф §2.4 посвящен описанию многообразий, в которых все конечные кольца имеют эйлеровы графы делителей нуля. В теореме 2.2, являющейся основной в данном параграфе, для таких многообразий

[2] Как видно из ссылок в работе [7] данное утверждение независимо было доказано в следующей работе: *Redmond S.P.* The zero-divisor graph of a noncommutative ring // Int.J.Commut.Rings. – 2002. – 1(4). – pp.203–211.

указаны выполняющиеся в них системы тождеств, т.е. дана так называемая *эквациональная* характеризация (см. [3, 5]).

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие колец. Все конечные кольца из многообразия $\mathfrak{M}$ имеют эйлеровы графы делителей нуля в том и только в том случае, когда либо $mx, x - x^2 f(x) \in T(\mathfrak{M})$, где $m \geq 1$ – нечетное целое число, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, либо $2^t x, x^2 \in T(\mathfrak{M})$, где $t > 0$.*

Третья глава посвящена описанию конечных колец с планарными графами делителей нуля. Кроме того, в этой главе составлен список колец без 2-кручения, графы делителей нуля которых являются полными двудольными.

В §3.1 описаны все нильпотентные конечные кольца, имеющие планарные графы делителей нуля (теорема 3.1). Из формулировки теоремы 3.1, которую мы не приводим здесь в силу ее громоздкости, видно, что существует единственное разложимое нильпотентное конечное кольцо с планарным графом делителей нуля. Отметим, что ранее нильпотентные кольца с планарными графами делителей нуля не исследовались.

В §3.2 получен полный список конечных неразложимых ненильпотентных колец с планарными графами делителей нуля. Основным результатом этого параграфа является теорема 3.2, формулировку которой мы здесь также не приводим в силу ее громоздкости. Напомним, что ранее, в [13], были описаны все коммутативные неразложимые конечные кольца с единицей, имеющие планарные графы делителей нуля. Поэтому мы включили список таких колец из работы [13] в формулировку теоремы 3.2, а доказательство этой теоремы вели в предположении, что кольцо либо не является коммутативным, либо не содержит единицу.

Параграф §3.3 посвящен описанию конечных разложимых ненильпотентных колец с планарными графами делителей нуля. Основным результатом является теорема 3.3, формулировка которой и содержит полный список таких колец. В [6] уже описаны разложимые коммутативные конечные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны, поэтому при доказательстве мы также предполагали, что кольцо либо не является коммутативным, либо не содержит единицу.

Таким образом, теоремы 3.1, 3.2 и 3.3 дают полное описание конечных колец с планарными графами делителей нуля (см. теорему 3.4).

Основным результатом параграфа §3.4 является теорема 3.5, в которой полностью описываются конечные кольца без 2-кручения, графы делителей нуля которых полные двудольные. Сначала мы доказываем следующий результат.

Предложение 3.4. *Пусть R – такое кольцо без 2-кручения, что его граф делителей нуля является полным двудольным графом. Тогда либо в кольце R нет ненулевых нильпотентных элементов, либо его граф делителей нуля является звездой.*

Из этого предложения следует, что если граф делителей нуля конечного кольца без 2-кручения является полным двудольным графом, то само кольцо либо является прямой суммой двух конечных полей, либо его граф делителей нуля является звездой, т.е. планарен. Поэтому выбрав из списка конечных колец с планарными графами делителей нуля те кольца, графы делителей нуля которых являются звездами, мы и получим доказательство теоремы 3.5.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность и сердечную признательность своему научному руководителю профессору Юрию Николаевичу Мальцеву за постановку задач, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку. Автор также искренне благодарит заведующего кафедрой алгебры Алтайской государственной педагогической академии доцента Ю.А. Моторинского и коллектив этой кафедры за оказанную моральную и материальную помощь.

Список литературы

[1] Волков М.В. Дистрибутивность некоторых структур многообразий ассоциативных колец // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 25. – № 6. – С. 23–30.

[2] Мальцев Ю.Н. Строение некоторых специальных критических алгебр // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т.25. – № 1. – С. 91–100.

[3] Пайсон О.Б. Индикаторные характеризации некоторых свойств многообразий ассоциативных колец: Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1998.

[4] Рябухин Ю.М., Захарова Е.Н. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных колец // Исследования по алгебре и топологии: Математические исследования. – Вып. 74. – Кишинев: Штиинца, 1983. – С.122–131.

[5] Шеврин Л.Н., Суханов Е.В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Известия вузов. Математика. – 1989. – № 6. – С. 3–39.

[6] Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph // Journal of Algebra. – 2003. – 270. – pp.169–180.

[7] Akbari S., Mohammadian A. On Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // Journal of Algebra. – 2007. – 314. – pp.168–184.

[8] Anderson D.D., Camillo V. Armendariz Rings and Gaussian Rings // Journal of Algebra. – 1999. – 217. – pp.434–447.

[9] Anderson D.F., Livingston P.S. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring // Journal of Algebra. – 1999. – 217(2). – pp. 434–447.

[10] Antoine R. Nlipotent Elements and Armendariz Rings // Journal of Algebra. – 2008. – 319. – p. 3128–3140.

[11] Armendariz E.P. A Note on Extensions of Baer and p.p.-Rings // J. Austral. Math. Soc. – 1974. – 18. – P. 470–473.

[12] Beck I. Coloring of Commutative Rings // Journal of Algebra. – 1988. – 116. – pp.208–226.

[13] Belshoff R., Chapman J. Planar Zero-Divisor Graphs // Journal of Algebra. – 2007. – 316. – pp.471–480.

[14] Hong C.Y., Kim N.K., Kwak T.K. On Skew Armendariz Rings // Communications in algebra. – 2003. – Vol. 31. – № 1. – pp. 103–122.

[15] Huh C., Lee Y., Smoctunowicz A. Armendariz Rings and Semicommutative Rings // Communications in algebra. – 2002. – Vol. 30. – № 2. – pp. 751–761.

[16] Kim N.K., Lee Y. Armendariz Rings and Reduced Rings // Journal of Algebra. – 2000. – 223. – pp. 477–488.

[17] Kruse R.L.,Price D.T. Nilpotent Rings. – Gordon and Breach, 1969. – 126 p.

[18] Lee T.-K., Wong T.-L. On Armendariz Rings // Houston Journal of Mathematics. – 2003. – Vol. 29. – № 3. – P. 583–593.

[19] Lee T.-K., Zhou Y. Armendariz and Reduced Rings // Communications in algebra. – 2004. – Vol. 32. – № 6. – pp. 2287–2299.

[20] Liu Z. Armendariz Rings Relative to a Monoid // Communications in Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 649–661.

[21] Liu Z., Zhao R. On Weak Armendariz Rings // Communications in Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 2607–2616.

[22] Osba E.A., Al-Addasi S., Jaradeh N.A. Zero-Divisor Graph for the Ring of Gaussian Integers Modulo n // Communications in Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3865–3877.

[23] Rege M.B., Chhawchharia S. Armendariz Rings // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 1997. – 73. –P. 14–17.

[24] Smith N. Infinite Planar Zero-Divisor Graphs // Communications in Algebra. – 2007. – 35. – pp.171-180.

[25] Wu T. On Directed Zero-Divisor Graphs of Finite Rings // Discrete Mathematics. – 2005. – 296. – pp.73–86.

Работы автора по теме диссертации

[26] Кузьмина А.С. Локальные кольца, удовлетворяющие тождеству $x^2 = x^3f(x), f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, и имеющие планарные графы делителей нуля // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2008. – Вып 8. – С. 47–50.

[27] Кузьмина А.С. О многообразиях алгебр, подпрямо неразложимые алгебры которых являются армендеризовскими // Известия Алтайского государственного университета. – 2007. – № 1(53). – С. 10–14.

[28] Кузьмина А.С. О многообразиях колец, в которых все подпрямо неразложимые конечные кольца являются армендеризовскими // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 7. – С. 45–52.

[29] Кузьмина А.С. О строении колец с планарными графами делителей нуля // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – № 1. – С. 17–26.

[30] Кузьмина А.С. Об армендеризовских и слабо армендеризовских PI-кольцах // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2007. – Вып. 7. – С. 24–35.

[31] Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Многообразия колец, в которых все конечные кольца имеют эйлеровы графы делителей нуля // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2008. – Вып. 8. – С. 51–53.

[32] Kuz'mina A.S., Maltsev Yu.N. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 1. – № 4. – pp. 565–574.

[33] Кузьмина А.С. О многообразиях ассоциативных колец, все критические кольца которых являются слабыми армендеризовскими // Материалы 10-й региональной конференции по математике "МАК-2007"(Барнаул, июнь 2007 г.). - Барнаул: Изд-во АГУ, 2007. - С. 15-16.

[34] Кузьмина А.С. О строении колец с планарными графами делителей нуля // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. – М.: Изд-во МГУ, 2008. – С. 150-151.

[35] Кузьмина А.С. О строении конечных колец, имеющих планарные графы делителей нуля // Материалы 11-й региональной конференции по математике "МАК-2008"(Барнаул, июнь 2008 г.). - Барнаул: Изд-во АГУ, 2008. - С. 12-14.

[36] Кузьмина А.С. Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля // Материалы 12-й региональной конференции по математике "МАК-2009"(Барнаул, июнь 2009 г.). - Барнаул: Изд-во АГУ, 2009. - С. 14–15.

[37] Кузьмина А.С. Подпрямо неразложимые конечные армендеризовские кольца, удовлетворяющие тождеству вида $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ // Труды научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России"(Барнаул, 26 октября 2007 г.). – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2007. – С. 34-36.

[38] Кузьмина А.С., Мальцев Ю.Н. Об эйлеровых графах делителей нуля ассоциативных колец // Материалы всероссийской научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России"(Барнаул, 21 ноября 2008г.). – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2008. – С. 57–58.

[39] Kuz'mina A.S. About varieties of associative rings all critical rings of which are weak Armendariz // Тезисы докладов международной конференции "Алгебра и ее приложения"(Красноярск, 12–18 августа 2007 г.). – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2007. – С. 164–166.

[40] Kuz'mina A.S. About varieties of associative rings all critical rings of which are weak Armendariz // Тезисы международной конференции "Algebraic system and their applications in differential equations and other domain of mathematics (ASADE-2007)"(Молдова, Кишинев, 21–23 августа 2007) [Электронный

ресурс]. – Режим доступа: http://www.math.md/imi-site/asade2007/ participants.shtml

[41] Kuz'mina A.S. On Finite Non-Nilpotent Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские чтения"(Новосибирск, Ин-т математики СО РАН, 24–28 августа 2009г.) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/09/Abstracts/ abstracts-09.pdf