На правах рукописи

Кукина Екатерина Георгиевна

Усредненная функция Дена и спектр Райдемайстера свободных абелевых и близких к ним групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск–2009

Работа выполнена в Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Виталий Анатольевич Романьков

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент САН ВШ
Тимошенко Евгений Иосифович

кандидат физико-математических наук
Храмцов Дмитрий Геннадьевич

Ведущая организация:
Омский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 25 декабря 2009 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр.Акад.Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 20 ноября 2009г.

Ученый секретать диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.Н.Рябкин

Общая характеристика работы

Тематика диссертации

Свободные абелевы группы — достаточно хорошо изученный математический объект. Поэтому при возникновении нового понятия, функции возникает естественное желание в первую очередь исследовать это понятие для свободных абелевых групп, потом пытаться изучать какие-нибудь близкие группы. В данной диссертации рассматриваются два сравнительно новых понятия в теории групп: усредненная функция Дена и спектр Райдемайстера, которые в первую очередь исследуются как раз для свободных абелевых групп.

Усредненная функция Дена. Идея рассмотрения изопериметрической функции для конечно определенных групп восходит к работам Макса Дена 1910–12 годов. Ден доказывает, что проблема равенства слов для стандартного представления фундаментальной группы замкнутой ориентируемой поверхности второго рода и выше разрешима. Теперь алгоритм ее решения так и называется алгоритмом Дена. Прямым следствием этого факта является то, что функция Дена этих групп удовлетворяет неравенству $D(n) \leq n$. Этот результат был расширен М.Д. Гриндлингером в 1960 году, представившим группы, удовлетворяющие условию C($\frac{1}{6}$) малого сокращения ([14]).

Однако, понятие изопериметрической функции и функции Дена оформилось только в конце 80-х – начале 90-х в связи с возникновением и развитием теории словесно-гиперболических групп. В своей монографии "Гиперболические группы" в 1987 году Громов впервые вводит определение функции Дена ([16]) и показывает, что словесно-гиперболические группы удовлетворяют линейному изопериметрическому неравенству.

Изучение изопериметрических функций (и в особенности функции Дена) быстро стало одной из основных тем геометрической теории групп, поскольку тип роста этих функций — естественный квази-изометрический инвариант конечно определенных групп. Кроме того, рекурсивность функции Дена эквивалентна тому, что в данной группе разрешима проблема равенства слов.

Площадью единичного слова называют площадь минимальной диаграммы ван Кампена этого слова (или, что эквивалентно, минимальное количество преобразований Дена, необходимое для этого слова). Изопериметрические функции (как и в геометрии) ограничивают сверху рост площади слова в зависимости от его длины. Функция Дена — минимальная из всех изопериметрических функций.

Известно ([16] и [26]), что линейность функции Дена эквивалентна тому, что группа гиперболическая.

А.Ю.Ольшанский [19] (см.также [4] и [20]) доказал теорему о том, что если функция Дена субквадратична, то группа гиперболическая.

Функция Дена автоматных групп (а в частности, и свободных абелевых групп) квадратична ([6]).

В работе ([5]) Брэйди и Бридсон доказали, что множество действительных чисел d, для которых существует конечно-определенная группа с функцией Дена, эквивалентной n^d, плотно в интервале $[2;+\infty)$.

В статье [13] Герстен, Хольт и Райли полностью доказали известную $(c+1)$-гипотезу (а именно: любая конечно порожденная нильпотентная группа ступени c допускает в качестве изопериметрической функцию эквивалентную n^{c+1}).

Бывают группы с экспоненциальной функцией Дена. Такова, например, группа Баумслага-Солитера $B(1,2) =< a, b | ab = b^2 a >$ ([11]).

У группы Баумслага-Герстена $G =< a, t | (t^{-1}a^{-1}t)a(t^{-1}at) = a^2 >$ функция Дена растет быстрее, чем любая фиксированная башня экспонент (а именно, $D(n) \simeq \underbrace{exp(exp(\ldots(exp(1))}_{[\log_2 n] \text{ экспонент}}\ldots)))$ ([12]).

В 90-х годах XX века в теории алгоритмов и теории сложности появилась новая тенденция: оценивать сложность алгоритмов не в "худшем" случае, а в среднем. Тут же эта идея была подхвачена и во многих других отраслях математики, в частности, в теории групп стали возникать попытки усреднить функцию Дена.

Первое определение усредненной функции Дена дает М.Громов в работе [15] в 1993 году. В этой же работе он утверждает без доказательства, что усредненная функция Дена свободных абелевых групп субквадратична и задает вопрос: "Верно ли, что для любой группы ее усредненная функция Дена субассимптотична по отношению к функции Дена? Т.е. верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma(k)}{D(k)} = 0$."

Этот вопрос в данное время и определяет основные направления в исследовании усредненной функции Дена.

В 2003 году в статье Е.Г.Кукиной и В.А.Романькова [30] доказана гипотеза Громова о субквадратичности усредненной функции Дена для свободных абелевых групп в естественном представлении. Эта работа и составила главу 2 данной диссертации.

Если про функцию Дена известно ([6]), что она не зависит от представления группы, то про усредненную функцию Дена пока такого факта доказать не удалось.

В.А.Романьков ([28]) замечает, что доказательство результата из статьи [30] легко распространить на все абелевы группы в любых конечных представлениях.

В 2008 году оценку на усредненную функцию Дена существенно улучшили О.В.Богопольский и Э.Вентура ([1]), доказав, что усредненная функция Дена абелевых групп ограничена сверху функцией $n \log^2 n$. Это наилучшая полученная оценка сверху на усредненную функцию Дена для свободных абелевых групп.

В работах [28], [27] В.А. Романьков доказывает, что усредненная функция Дена произвольной конечнопорожденной нильпотентной группы ступени нильпотентности $c \geq 1$ субассимптотична по отношению к функции k^{c+1}. Этот результат в частности дает положительный ответ на вопрос Громова для свободных нильпотентных конечно порожденных групп любой ступени $c \geq 1$ в любом конечном представлении.

Р.Янг ([24]) доказывает субассимптотичность для большинства нильпотентных групп. В частности, если нильпотентная группа удовлетворяет изопериметрическому неравенству $D(k) \preceq k^{\alpha}$ для $\alpha > 2$ тогда усредненная функция Дена $\sigma(k) \preceq k^{\frac{\alpha}{2}}$, причем в случае неабелевых свободных нильпотентных групп эта оценка точна. Однако, определение Янга отличается от классического определения, введенного Громовым. Янг добавляет единичный элемент в систему порождающих. От шара (множества всех единичных элементов длины $\leq n$) переходит к сфере (множеству всех единичных элементов длины ровно n), что может существенно уменьшить площади единичных слов в среднем, поскольку короткие слова с небольшой площадью теперь учитываются много раз (в единичное слово можно в любое место вставить этот новый порождающий и снова получить единичное слово).

В работе [33] (и в главе 3 данной диссертации) разобран пример группы с сублинейной усредненной функией Дена.

Была предпринята попытка ([31]) по-другому усреднить функцию Дена. Классическое определение усредняет функцию Дена равномерно; а новое — относительно любого вероятностного распределения. Идея введения на группах вероятностного распределения восходит к работам Боровика, Мясникова, Шпильрайна и Ремесленникова [3] и [2]. Кроме того, естественные распределения вероятности на группе возникают и в других случаях (например, в случае рассмотрения случайного блуждания по графу Кэли группы).

Доказано, что в этом случае при некоторых ограничениях на распределение и функцию Дена группы, новая усредненная функция Дена не превосходит константы. Этот результат составляет главу 4 данной диссертации.

Спектр Райдемайстера. Изучение свойства скрученной сопряженности мотивировано топологической теорией фиксированных точек отображений, также именуемой теорией Нильсена. В 1927–1932гг цикле статей [18] Нильсен вводит классы фиксированных точек гомеоморфизмов поверхностей. Впоследствии Райдемайстер разработал алгебраические основания для теории Нильсена для любого образа любого компактного многогранника (см. [21]). В этой работе Райдемайстера появляются классы скрученной сопряженности групп гомеоморфизмов. Оказалось, что классы фиксированных точек образов могут быть легко отождествленны с классами сопряженности лифтинга образа универсального замощения компактного многогранника; и классы сопряженности лифтинга могут быть отождествленны с классами скрученной сопряженности гомоморфизма, индуцированного на фундаментальную группу многогранника.

Пусть X — связный компактный многогранник и $f : X \to X$ его непрерывное отображение. Число Райдемайстера R(f) (то есть количество ϕ-сопряженных классов, где $\phi = f_\#$ — индуцированный гомоморфизм фундаментальной группы) очень значимо для изучения неподвижных точек f. В частности, конечность числа Райдемайстера играет очень важную роль.

В настоящее время важна проблема получения аналога известной теоремы Бернсайда-Фробениуса для скрученной сопряженности. С этой целью важно описать класс групп R_∞ (класс тех групп, для которых $R(\phi) = \infty$ для любого автоморфизма ϕ) (см.[10]). Для следующих групп показана их принадлежность к классу R_∞:

- неэлементарные гиперболичные по Громову группы [29],[17];
- группы Баумслага-Солитера за исключением B(1,1) [8];
- относительно гиперболичные группы [9];
- группы Григорчука и Гупты-Сидки [10];
- свободные нильпотентные группы ранга 2 ступени $c \geq 4$, ранга 3 класса $c \geq 12$, ранга $r \geq 4$ класса $c \geq 2r$ [22, 34].

Довольно естественно возникает понятие спектра Райдемайстера группы (т.е. множества всех чисел Райдемайстера автоморфизмов этой группы). Оно впервые введено в работах [32] и [34].

В работе [25] доказано, что спектр группы Гейзенберга N_{22} содержит кроме бесконечности любое четное число, но не изучен вопрос о принадлежности спектру нечетных чисел. В работе диссертанта [32] получено, что нечетные числа не принадлежат спектру группы Гейзенберга N_{22}. В этой же работе показано, что спектр свободной абелевой группы ранга $r \geq 2$ содержит все натуральные числа и бесконечность, а спектр свободной нильпотентной группы N_{32} ранга 3 ступени 2 содержит все нечетные числа, все числа, делящиеся на 4 и бесконечность. Эти результаты составляют главу 5 данной диссертации. Кроме того, в части 5.3 полностью закрыт вопрос о спектре конечно порожденных абелевых групп.

В работе [34] В.А.Романьковым вычислен спектр свободной нильпотентной группы ранга 2 ступени 3 $S(N_{23}) = \{2k^2 | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$.

Совсем недавно появилась новая работа [7], в которой изучен спектр Райдемайстера метабелевых групп вида $\mathbb{Q}^n \rtimes \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[1/p]^n \rtimes \mathbb{Z}$.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации.

1. Доказана субквадратичность усредненной функции Дена для абелевых групп.

2. Найден пример группы с сублинейной функцией Дена.

3. Изучен неклассический способ усреднения функции Дена — усредненная функция Дена относительно заданной вероятности.

4. Вычислен спектр Райдемайстера конечно порожденных абелевых групп и свободных нильпонентных групп ступени 2 рангов 2 и 3.

Апробация работы. Результаты докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 17–19 ноября 2003); неоднократно на Омском алгебраическом семинаре (в 2002 и 2003 годах); в рамках международной школы-семинара «Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических системах» (Омск, 16–22 августа 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы [30], [31], [33], [32], [34]. Работы [30] и [34] выполнены совместно с В.А.Романьковым в неразделимом соавсторстве.

Структура работы. Диссертационная работа изложена на 54 страницах и состоит из введения, пяти глав, разделенных на 17 частей, и списка литературы. Библиографический список содержит 48 наименований.

Обзор содержания диссертации

В первой главе диссертации собраны необходимые предварительные сведения: основные определения и известные результаты.

Вторая глава диссертации посвящена доказательству гипотезы Громова о том, что усредненная функция Дена свободных абелевых групп субквадратична. Доказано даже более сильное утверждение.

Теорема 1. *Усредненная функция Дена конечно порожденной абелевой группы в любом конечном представлении субквадратична.*

Кроме того, в части 2.6 доказывается

Предложение 1. *Для плоских кристаллографических групп с графом Кэли, соответствующим регулярному замощению плоскости, усредненная функция Дена субквадратична.*

Сформулируем основные определения для понимания сути теоремы.

Пусть $X_r = \{x_1, \ldots, x_r\}$ — конечный алфавит. Обозначим через $\Sigma(X_r)$ свободный моноид на множестве $X_r \cup X_r^{-1}$, где $X_r^{-1} = \left\{x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}\right\}$ — множество формально обратных элементов. Элементы моноида $\Sigma(X_r)$ будем называть словами. Обозначим через $|w|$ длину слова w.

Пусть $G = F_r/R$ — конечно определенная группа, представленная как фактор группа свободной группы F_r конечного ранга r от множества свободных порождающих X_r по нормальной подгруппе $R = ncl(r_1, \ldots, r_m)$. Обозначим как $\mathfrak{P}(G) =< x_1, ..., x_r | r_1, ..., r_m >$ соответствующее представление группы G через порождающие элементы и определяющие соотношения. Любое (не обязательно редуцированное) слово w моноида $\Sigma(X_r)$ определяет элемент группы F_r. Естественный гомоморфизм $\varphi : F_r \to G$ позволяет говорить о значении слова w в группе G. В частности, запись $w =_G v$ означает, что значения слов w, v в группе G совпадают.

Очевидно, что равенство $w =_G 1$ и включение $w \in R$ равносильны. Они эквивалентны тому, что в группе F_r существует запись вида:

$$w = g_1 g_2 \ldots g_p, \tag{1}$$

где $g_i = \left(r_{i_j}^{\varepsilon_i}\right)^{f_i}$ для некоторого $f_i \in F_r$, $\varepsilon_i \in \pm 1$, $i_j \in \{1, \ldots m\}$, $i \in \{1, \ldots p\}$. Как обычно, запись g^f означает сопряжение $f^{-1} g f$.

Определение 1. *Площадью S_w слова $w =_G 1$ относительно представления $\mathfrak{P}(G)$ называется наименьшее значение p, для которого существует запись вида (1).*

Определим $\Omega_k = \left\{ w =_G 1 \Big| |w| \leq k \right\}$ — множество слов алфавита X_r, значения которых в группе G равны 1, а длина не превосходит фиксированного числа k.

Определение 2. *Функцией Дена группы G относительно представления $\mathfrak{P}(G)$ называется функция*

$$D(k) = \max_{w \in \Omega_k} S_w. \tag{2}$$

Определение 3. *Будем писать $f \preceq g$, если для функций f и g существуют константы a, b, c, d ($a, b \neq 0$), такие, что для любого $n > 0$ верно*

$$f(n) \leq a g(bn) + cn + d$$

Определение 4. *Если одновременно $f \preceq g$ и $g \preceq f$, функции f и g называют эквивалентными. Обозначение: $f \simeq g$.*

Определение 5. *Усредненной функцией Дена группы G относительно представления $\mathfrak{P}(G)$ называется функция*

$$\sigma(k) = \frac{\sum\limits_{w\in\Omega_k} S_w}{card\Omega_k}. \tag{3}$$

В третьей главе используется немного другое определение эквивалентности функций.

Определение 6. *Мы пишем, что $f \preceq' g$, если существуют константы a, b, c, d $(a, b \neq 0)$, такие что для всех n выполнено неравенство*

$$f(n) \leq ag(bn + c) + d$$

Функции f и g называются эквивалентными, если $f \preceq' g$ и одновременно $g \preceq' f$. Обозначение: $f \simeq' g$

Это определение удобно тем, что позволяет (в отличие от классического определения 3) выделять функции, меньшие линейных, чего не позволяет классическое определение. Заметим, что функция Дена $D(k)$ меньше линейной только в одном случае: в случае свободной группы в ее естественном представлении (здесь $D(k) = 0$). Усредненная же функция Дена может быть сублинейной, поэтому нам и потребовалось новое определение эквивалентности функций.

В третьей главе найден пример группы с сублинейной усредненной функцией Дена. Доказана теорема:

Теорема 2. *Усреденная функция Дена группы $\mathbb{Z}_2$ в естественном представлении $< a|a^2 >$ эквивалентна $\sqrt{k}$ (т.е. $\sigma(k) \simeq' \sqrt{k}$.*

Кроме того, из теоремы 2 получено следствие. Оно отвечает на вопрос В.Н.Ремесленникова, заданный автору: "Какова средняя длина слов в свободной абелевой группе после сокращения?"

Рассмотрим свободную абелеву группу ранга r в ее стандартном представлении $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^r)$. Введем $\Psi_{r,k}$ — множество слов длины k в алфавите X_r. Определим функцию

$$c_r(k) = \frac{\sum\limits_{|w|=k} |w|_{\mathbb{Z}^r}}{card\Psi_{r,k}},$$

т.е. средняя длина слов длины k после сокращения.

Следствие 1. *Для любого натурального r функция $c_r(k)$ эквивалентна $\sqrt{k}$.*

Усреднение при определении функции $\sigma(k)$ происходит в соответствии с равномерной вероятностью на множестве Ω_k. Существует другая возможность определения усредненной функции.

Например, как в четвертой главе, усредненная функция Дена может быть определена в соответствии со сложностью γ и распределением $\{p_k\}$.

Покажем, как в соответствии с идеями статей [3] и [2] можно ввести на моноиде $\Sigma(X_r)$ вероятностную меру.

Определение 7. *Функцию $\gamma : \Sigma(X_r) \to \mathbb{N}$ будем называть сложностью, если она имеет конечное слоение, т.е. для всех k выполнено условие $card\Gamma_k < \infty$, где $\Gamma_k = \big\{w \in \Sigma(X_r) \big| \gamma(w) = k\big\}$.*

Пусть на множестве $\mathbb{N}$ определена некоторая вероятность $p_k = P\{\xi = k\}$. Это позволяет определить вероятность на моноиде $\Sigma(X_r)$ следующим образом:

$$\forall w \in \Gamma_k \; p(w) = P\{\xi = w\} = \pi_k = \frac{p_k}{card\Gamma_k}, \tag{4}$$

т.е. $P\{\xi \in \Gamma_k\} = p_k$, а все элементы одинаковой сложности равновероятны.

Теперь усредним функцию Дена по-другому.

В этом случае определим множество $\Omega'_k = \big\{w =_G 1 \big| \gamma(w) \leq k\big\}$ слов из моноида $\Sigma(X_r)$, значения которых в группе G равны 1, а сложность не превосходит фиксированного числа k.

Определение 8. *Относительной усредненной функцией Дена группы G, отвечающей представлению $\mathfrak{P}(G)$, сложности $\gamma(w)$ и вероятности $\{p_k\}$, назовем функцию*

$$\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(k) = \zeta(k) = \frac{\sum\limits_{w \in \Omega'_k} p(w) S_w}{p(\Omega'_k)} \tag{5}$$

Корректность определения 8 обеспечивается следующим свойством распределения $\{p_k\}$.

Определение 9. *Распределение $\{p_k\}$ назовем хорошим, если $p_k \neq 0$ для всех k.*

Только для хороших распределений вероятность любого непустого подмножества $\Sigma(X)$ не равна нулю. Это одно из естественных требований, накладываемых на распределение в работе [3].

Мы рассматриваем только функцию $\gamma(w) = |w|$, которая является одним из основных примеров сложности. Заметим, что тогда $\Omega'_k = \Omega_k$.

В четвертой главе диссертации доказано, что относительная усредненная функция Дена $\zeta(k)$ группы G ограничена сверху ненулевой константой при некоторых (не слишком жестких) ограничениях на распределение $\{p_k\}$ и саму группу G.

Теорема 3. *Пусть G — конечно-определенная группа с условием $\delta(k) \prec k^\beta$ для некоторого $\beta \geq 0$, и пусть $\{p_k\}$ — хорошая вероятность на $\mathbb{N}$ с условием $M\xi^\beta = M < \infty$. Тогда относительная усредненная фукнция Дена $\zeta(k)$ группы G, отвечающая сложности $\gamma(w) = |w|$ и вероятности $\{p_k\}$, не превосходит некоторой положительной константы.*

Кроме того, доказано, что относительная усредненная функция Дена $\zeta(k)$ ограничена снизу положительной константой для любого хорошего распределения и любой конечно-определенной группы G, кроме свободной группы в естественном представлении.

В исключительном случае свободной группы $F(X)$ в естественном представлении $\mathfrak{P}(F(X)) = \langle x_1, \ldots, x_r | \rangle$ относительная усредненная функция Дена тождественно равна нулю.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{P}(G) = \langle x_1, \ldots, x_r | r_1, \ldots, r_m \rangle$ — произвольное конечное представление, кроме единственного исключения — естественного представления свободной группы. Пусть $\gamma(w) = |w|$ и распределение $\{p_k\}$ хорошее. Тогда усредненная функция Дена $\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(n)$ ограничена снизу положительной константой начиная с некоторого номера n_0.*

В частности, получено

Следствие 2. *Если $\{p_k\}$ – произвольная вероятность, имеющая дисперсию, то относительно него функция $\zeta(k)$ свободной абелевой группы в любом представлении ограничена положительными константами сверху и снизу.*

В пятой главе вводится и изучается новое понятие — спектр Райдемайстера.

Определение 10. *Пусть ϕ — эндоморфизм группы G. Два элемента f и g группы G назовем ϕ-сопряженными (или скрученно-сопряженными), если существует такой $x \in G$, что $\phi(x)f = gx$. Будем писать $f \sim_\phi g$*

Определение 11. *Количество классов ϕ-сопряженности называется числом Райдемайстера $R(\phi)$ эндоморфизма ϕ.*

Определение 12. *Множество $S(G) = \{R(\phi) | \phi \in Aut(G)\}$ всех чисел Райдемайстера автоморфизмов назовем спектром Райдемайстера группы G.*

Теорема 4. *Спектр Райдемайстера группы N_{22} состоит из всех четных чисел и бесконечности.*

Теорема 5. *Спектр Райдемайстера группы N_{23} состоит из всех нечетных чисел, всех чисел, делящихся на 4, и бесконечности.*

Теорема 6. *Пусть G — произвольная конечно порожденная абелева группа, разложенная в прямое произведение циклических*

$$G = \mathbb{Z}^{n_0} \bigotimes \mathbb{Z}_2^{n_1} \bigotimes_{p_i \in \mathbb{P}, p_i > 2} \mathbb{Z}_{p_i}^{n_i}$$

1. *Если $n_0 = 0$, $n_1 \neq 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех делителей порядка группы.*

2. *Если $n_0 \geq 2$, $n_1 \neq 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех натуральных чисел и бесконечности.*

3. *Если $n_0 = 1$, $n_1 \neq 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех удвоенных делителей числа $\Pi_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$ и бесконечности.*

4. *Если $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех четных делителей порядка группы.*

5. *Если $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех четных натуральных чисел и бесконечности.*

6. *Если $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, спектр Райдемайстера состоит из всех учетверенных делителей числа $\Pi_{i=2}^{r} p_i^{n_i}$ и бесконечности.*

Автор выражает огромную благодарность и сердечную признательность своему научному руководителю, Виталию Анатольевичу Романькову, за понимание и долготерпение.

Литература

[1] O.Bogopolski, E.Ventura *The mean Dehn function of abelian groups*//J. of Group Theory, 2008, v.11, 569–586.

[2] A.V. Borovik, A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov *Multiplicative measures on free groups* // Internat. J. Algebra Comput., 13 №6, 2003, 705-731.

[3] A.V.Borovik, A.G.Myasnikov, V.Shpilrain *Measuring sets in infinite groups*// Contemp.Math, 2002, v.298, 21–42.

[4] B.Bouditch, *A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one*// Michigan J. Math., 1995,v.42, 103-107.

[5] N.Brady, and M.R.Bridson, *There is only one gap in the isoperimetric spectrum*// Geometric and Functional Analysis, v.10, 2000, 1053-1070.

[6] J.W.Cannon, D.B.A.Epstein, D.F.Holt, S.V.F.Levy, M.S.Paterson, W.P.Thurston *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett, Boston M.A.,1992

[7] A.L.Fel'shtyn, L.Daciberg, D.Gonçalves *Reidemeister spectrum for metabelian groups of the form* $Q^n \rtimes \mathbb{Z}$ *and* $\mathbb{Z}[1/p]^n \rtimes \mathbb{Z}$*, p prime*//arXiv:math.GR/0909.3128, 2009.

[8] A.L.Fel'shtyn, D.Gonçalves *Reidemeister number of any automorphism of Boumslag-Soliter group is infinite*// Geometry and Dynamics of Groups and Spaces, Progress in Math., Birkhauser, 265, 2008, 286–306.

[9] A.L.Fel'shtyn, D.Gonçalves *Twisted conjugacy classes in symplectic groups, Mapping class groups amd Braid groups*// arXiv:math.GR/0708.2628, 2007.

[10] A.L.Fel'shtyn, Y.Leonov, E.Troitsky *Twisted conjugacy classes in saturated weakly branch groups*, Geom.Dedicata 134, 2008, 61–73.

[11] S.M.Gersten, *Dehn functions and l_1-norms of finite presentations. Algorithms and classification in combinatorial group theory.//* Math. Sci. Res. Inst. Publ., 23, Springer, New York, 1992, 195–224.

[12] S.M.Gersten, *Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations* in Geometric group theory. London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1993, v.1, 1991, 79-96,

[13] S.M.Gersten, D.F.Holt.,T.R.Riley *Isoperimetric inequalities for nilpotent groups//* Geom.Funct.Anal. 2003, v.13, 795–814.

[14] M.Greendlinger *Dehn's algorithm for the word problem//* Communications in Pure and Applied Math., 13, 1960, 67-83.

[15] M.Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, in Geometric Group Theory. LMS Lecture Notes, 182 eds. G.A.Niblo and M.A.Roller, Cambridge Univ. Press, 1993.

[16] M. Gromov, *Hyperbolic groups.* Essays in Group Theory.-Springer, 1987, 75-263.

[17] G.Levitt, M.Lustig *Most automorphisms of a hyperbolic group have simple dynamics//* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 33, 2000, 507–517.

[18] J.Nielsen *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I, II, III//* Acta Math. 50, 1927, 189–358; 53, 1929, 1–76; 58, 1932, 87-167.

[19] A.Yu.Ol'shanskii, *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality//* Int. J. Alg. and Comput., v.1, 1991, 281-290.

[20] P.Papasoglou, *On the subquadratic isoperimetric inequality*, in Geometric Group Theory. Walter de Gruyter, Berlin - New-York, 1995, 149-158.

[21] K.Reidemeister *Automorohismen von Homotopiekettenringen//* Math. Ann., 112, 1936, 586–593.

[22] V.Roman'kov *Twisted conjugacy classes in nilpotent groups*// arXiv:math.GR/0903.3455, 2009.

[23] V.Roman'kov, E.Ventura *On the twisted conjugacy problem on the endomorphisms of nilpotent groups*// to be published.

[24] R.Young *Averaged Dehn function for nilpotent groups*// Topology, v.47, 2008, 351–367.

[25] Ф.К.Индукаев *Скрученная теория Бернсайда для дискретной группы Гейзенберга и сплетений некоторых групп*//Вестн.Моск.ун-та, сер.1, Математика. Механика. 2007, №6, 9–17.

[26] И.Г.Лысенок, *О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп*// Изв. АН СССР, сер. мат. Т.53, №4, 1989г. 814-832.

[27] В.А.Романьков *Об асимптотическом росте усредненной функции Дена для нильпотентных групп*//Алгебра и логика, 2007, т.46.1, 37–45

[28] В.А.Романьков *Субкубичность усредненной функции Дена нильпонетной группы ступени 2* //Сиб.мат.журн., 2005, т.46 №3, 663–672

[29] А.Л.Фельштын *Число Райдемайстера любого автоморфизма гиперболической по Громову группы бесконечно*//Зап.науч.семинаров ПОМИ РАН (Геом. и топол.), 2001, 229–241.

Работы автора по теме диссертации

[30] Е.Г.Кукина, В.А.Романьков В.А. *Субквадратичность усредненной функции Дена для свободных абелевых групп*// Сиб.мат.журн., 2004, 44, №4, 772–778.

[31] Е.Г.Кукина *Усредненная функция Дена относительно заданной вероятности*//Сиб.мат.журн., 2006, 47, №2, 361–364.

[32] Е.Г.Кукина *Спектры Райдемайстера свободных абелевых групп и свободных нильпотентных групп ступени 2 рангов 2 и 3*// В сб. «Математика и информатика: наука и образование : Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник» Вып. 8. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2009, 10–13.

[33] Е.Г.Кукина *Усредненная функция Дена для группы* $\mathbb{Z}_2$ //Вестник Омского университета, 2003, Выпуск 3 (29), 18–21.

[34] E.G.Kukina, V.Roman'kov *On the Reidemeister spectrum and the* R_∞ *property for some free nilpotent groups*// arXiv:math.GR/0903.4533, 2009.

[35] Е.Г.Кукина *Усредненная функция Дена для группы* $\mathbb{Z}_2$ //Молодежь III тысячелетия. Региональная научная студенческая конференция. Тезисы докладов., – Омск: Омск.гос.ун-т, 2003, 262.

[36] Е.Г.Кукина *Усредненная функция Дена относительно заданной вероятности*//Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических системах: Международная школа-семинар (16–22 августа): тезисы докладов. – Омск: Изд-во Ом.гос.ун-та, 2009, 40.