На правах рукописи

УДК 519.6

Ковыркина Оляна Александровна

МЕТОДЫ АНАЛИЗА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЁТА

Специальность: 01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2009

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Остапенко Владимир Викторович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Роменский Евгений Игоревич, кандидат физико-математических наук Хотяновский Дмитрий Владимирович
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Защита состоится 16 апреля 2009 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу:

630090 г. Новосибирск– 90, проспект ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан « 11 » марта 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук В. Л. Мирошниченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. В настоящее время широкое распространение получили явные двухслойные по времени монотонные разностные схемы повышенной точности для сквозного расчета разрывных решений гиперболических систем законов сохранения (в частности законов сохранения газовой динамики и гидравлики). В большинстве работ, посвящённых построению таких схем, под точностью схемы понимается порядок её тейлоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при передачи условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн. Несмотря на это, долгое время было распространено ошибочное мнение о том, что указанные схемы сохраняют повышенный порядок сходимости во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. В работах (*Годунов С.К.* 1997; *Остапенко В.В.* 1997, 2000; *Casper J., Carpenter M.H.* 1998; *Engquist B., Sjogreen B.* 1998) на ряде примеров было показано, что эти схемы могут снижать порядок сходимости до первого и ниже в областях влияния нестационарных ударных волн (т. е. ударных волн, распространяющихся с переменной скоростью).

Одним из эффективных методов исследования разностных схем является метод дифференциального приближения (*Жуков А.И.* 1959; *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* 1985), который позволяет сводить исследование разностной схемы к изучению аппроксимирующего её дифференциального уравнения. Однако на основе классических дифференциальных приближений по шагам схемы невозможно построить асимптотическое разложение её решения на сильном разрыве и, тем самым, эти приближения нельзя использовать для детального анализа поведения разностного решения в окрестности разрыва.

В связи с этим актуальным является развитие теоретических и численных методов, позволяющих оценивать реальную точность разностных схем при сквозном расчёте нестационарных ударных волн, а также качественно описывать поведение разностных решений в окрестностях ударных волн.

Целью диссертационной работы является теоретическое и экспериментальное исследование точности разностных схем при сквозном расчёте нестационарных ударных волн и разработка методов построения асимптотических разложений разностных решений на сильных разрывах на основе неклассических дифференциальных приближений разностных схем.

Научная новизна. Путём численного эксперимента показано, что разностные схемы повышенной точности, имеющие достаточно гладкие функции численных потоков (в отличие от своих TVD модификаций) сохраняют повышенный порядок слабой сходимости при сквозном расчёте нестационарных ударных волн. Частичным обоснованием этого экспериментального результата служит доказанная в работе теорема о том, что такие схемы сохраняют повышенную точность при аппроксимации ε-условий Гюгонио на нестационарных ударных волнах.

Разработан метод, позволяющий на основе предложенных в работе неклассических дифференциальных приближений разностных схем строить асимптотические разложения их решений в окрестностях сильных разрывов. На основе этого метода получены обоснование и границы применимости классического первого дифференциального приближения при описании поведения разностных решений на ударных волнах.

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена корректностью постановок рассматриваемых задач, строгостью используемых методов доказательств и сравнением теоретических результатов с данными численных экспериментов.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов состоит в том, что разработанные методики могут быть использованы для анализа поведения и оценки реальной точности достаточно широкого класса разностных схем, предназначенных для сквозного расчёта разрывных решений гиперболических систем законов сохранения.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались на конференциях:
— Четвёртая Сибирская школа-семинар «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, 2000);
— конференция молодых ученых, посвященная 10-летию ИВТ СО РАН (Новосибирск, 2000);
— Международная конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Казахстан, Усть-Каменогорск, 2003);
— XXXV Региональная молодежная школа-конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2004);
— Международная конференция по вычислительной математике МКВМ–2004 (Новосибирск, 2004);
— 3-я Всероссийская конференция с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2008);
— Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений» (Новосибирск, 2008);
а также обсуждались на семинарах Института математики им. С. Л. Со-

болева СО РАН; Института вычислительных технологий СО РАН; Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН; кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 статей в научных журналах и изданиях, а также тезисы докладов на научных конференциях. Список публикаций приведён в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 89 страниц состоит из введения, четырёх глав, заключения, 25 иллюстраций и списка литературы из 95 наименований.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю д.ф.-м.н. Владимиру Викторовичу Остапенко за постоянное внимание и поддержку на всех этапах выполнения работы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, дано краткое описание работы.

В **первой главе** проведено экспериментальное исследование точности разностных схем при сквозном расчёте нестационарных ударных волн, возникающих при решении начально-краевых задач для системы уравнений теории «мелкой воды». Поставлена начально-краевая задача на отрезке $[0, X]$ для системы уравнений Сен-Венана

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$$H(0,x) = 2 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x, \quad q(0,x) = 0, \quad q(t,0) = q_0(t),\ q(t,X) = q_1(t), \quad (2)$$

где $H(t,x) > 0$ и $q(t,x)$ — глубина и расход жидкости, g — ускорение свободного падения, $q_0(t)$ и $q_1(t)$ — гладкие монотонно возрастающие функции такие, что $q_0(0) = q_1(0) = 0$.

Рассмотрены два способа задания функций $q_0(t), q_1(t)$. В первом случае (задача I) при решении задачи (1), (2) в момент времени $t \approx 1$ в результате градиентной катастрофы формируется прерывная волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x с возрастающей амплитудой и скоростью (см. рис. 1), а во втором (задача II) — формируются две прерывные волны, распространяющиеся навстречу друг другу

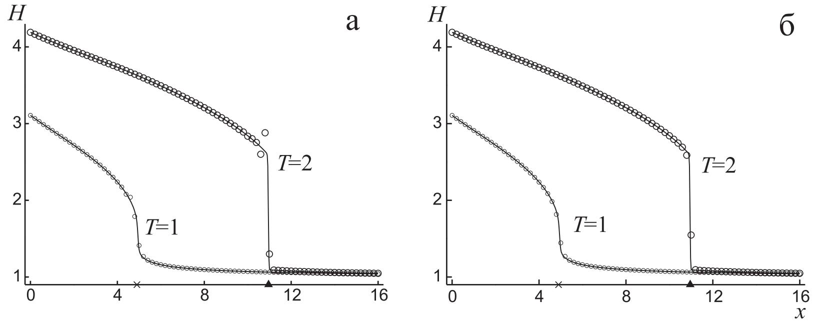

Рис. 1: профили глубины в задаче с одной прерывной волной; сплошная линия — точное решение, кружки — численные решения по схеме Лакса-Вендроффа (а) и по TVD схеме Хартена (б).

с возрастающими амплитудами и скоростями; эти волны соударяются, в результате чего образуются две новые прерывные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях (см. рис. 4).

Для расчёта задач I и II использовались пять разностных схем: схема Лакса-Вендроффа (1960), её TVD модификация Хартена (1983), схема МакКормака (1969), схема Русанова (1968) и компактная схема, предложенная Остапенко В.В. (2000). Первые четыре из них относятся к классу явных двухслойных по времени и симметричных по пространству консервативных разностных схем, а пятая является компактной неявной трёхслойной по времени консервативной разностной схемой. Проведено исследование точности этих разностных схем на разрывных решениях путём вычисления порядков их слабой сходимости и путём определения точности вычисления инвариантов в областях влияния нестационарных ударных волн.

Идея метода вычисления порядков слабой сходимости принадлежит С. К. Годунову и В. С. Рябенькому. Данный метод основан на экспериментальной проверке скорости сходимости первых интегралов от получаемого разностного решения, которые берутся по областям, содержащим различные особенности аппроксимируемого точного решения. Для определения порядков слабой сходимости r (рис. 2) и относительных погрешностей вычисления инвариантов Δw_{1h}, Δw_{2h}(рис. 3, 5) проводилось три расчёта соответствующей начально-краевой задачи с достаточно малыми пространственными шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$ и применялось

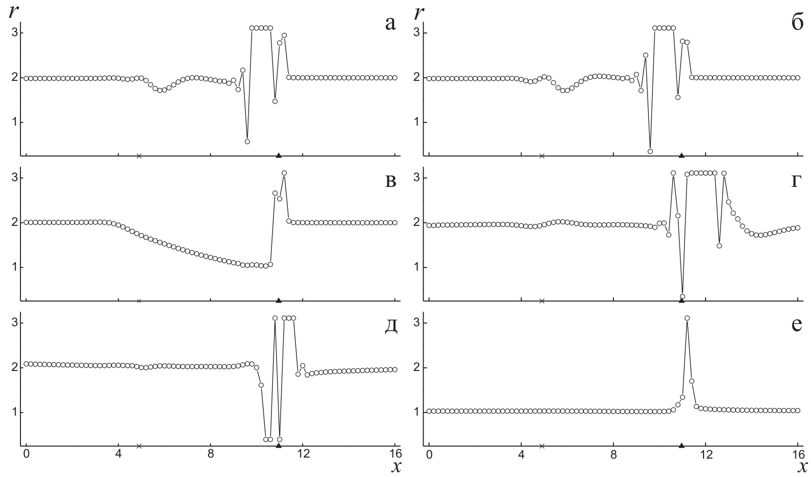

Рис. 2: порядки слабой сходимости при численном интегрировании разностного решения через фронт нестационарной прерывной волны «справа налево» для схемы Лакса-Вендроффа (а), схемы МакКормака (б), TVD схемы Хартена (в), схемы Русанова (г), компактной схемы (д) и схемы Годунова (е).

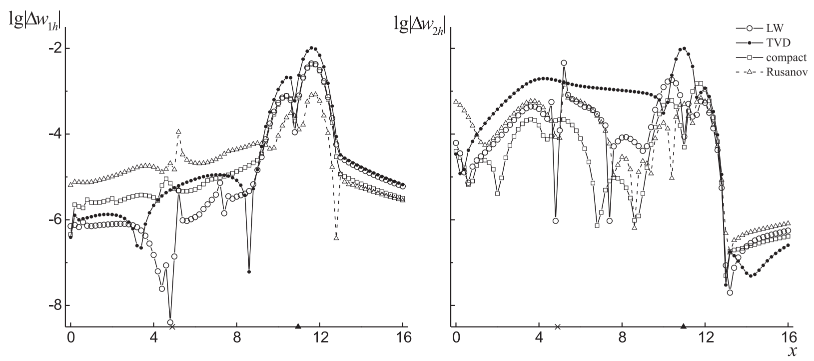

Рис. 3: относительные погрешности вычисления инвариантов в задаче с одной прерывной волной для схемы Лакса-Вендроффа (кружки), TVD схемы Хартена (точки), компактной схемы (квадратики) и схемы Русанова (треугольники).

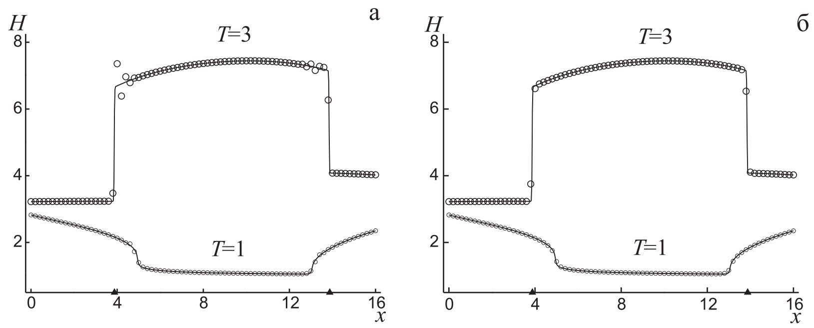

Рис. 4: профили глубины в задаче с двумя прерывными волнами; сплошная линия — точное решение, кружки — численные решения по схеме Лакса-Вендроффа (а) и по TVD схеме Хартена (б).

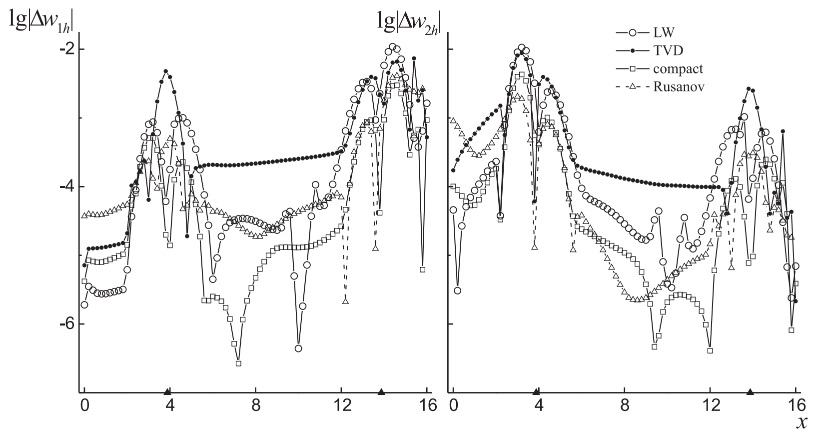

Рис. 5: относительные погрешности вычисления инвариантов в задаче с двумя прерывными волнами для схемы Лакса-Вендроффа (кружки), TVD схемы Хартена (точки), компактной схемы (квадратики) и схемы Русанова (треугольники).

правило Рунге. При этом для порядков слабой сходимости

$$r = \log_2 \frac{|\bar{\delta}\boldsymbol{V}_1|}{|\bar{\delta}\boldsymbol{V}_2|}, \quad \bar{\delta}\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}^a_{h_i} - \boldsymbol{V}^a_{h_{i+1}}, \quad i = 1, 2,$$

где интеграл $\boldsymbol{V}^a_h(t,x) = \int\limits_x^a \boldsymbol{v}_h(t,y)dy$ вычисляется по формуле трапеций. Поскольку формула трапеций имеет второй порядок точности на гладких функциях, то приведённые на рис. 2 значения r отражают реальный порядок слабой сходимости только при $r \le 2$. В расчётах полагалось $a = X$, $x \in [0, X]$.

Пусть $p(t,x) = \xi(\boldsymbol{u}(t,x))$ — некоторая скалярная функция от точного решения $\boldsymbol{u}(t,x)$ и $p_h(t,x) = \xi(\boldsymbol{v}_h(t,x))$ — приближающая её функция от разностного решения $\boldsymbol{v}_h(t,x)$. Тогда относительные погрешности вычисления функции $p(t,x)$ будем определять по формулам

$$\Delta p_h = \frac{\delta p_h}{p_h}, \tag{3}$$

где, с учётом правила Рунге,

$$\delta p_h = \frac{\bar{\delta} p_1}{1 - |\bar{\delta} p_2|/|\bar{\delta} p_1|}, \quad \bar{\delta} p_i = p_{h_i} - p_{h_{i+1}}, \quad i = 1, 2.$$

Формулы (3) использовались для определения относительных погрешностей вычисления инвариантов $w_1 = q/H + 2\sqrt{gH}$, $w_2 = q/H - 2\sqrt{gH}$ системы уравнений «мелкой воды» (1) (рис. 3, 5).

Результаты проведённых численных расчётов демонстрируют (рис. 2, 3, 5), что TVD монотонизация схемы Лакса-Вендроффа, связанная со снижением гладкости её разностных потоков при применении минимаксных процедур их коррекции, приводит к снижению реальной точности разностной схемы при расчёте нестационарных прерывных волн. Теоретическое объяснение этого экспериментального факта дано в главе 4.

Следует отметить, что рассмотрены прерывные волны, возникающие и распространяющиеся строго внутри расчётной области. Это сделано с целью отделить проблему, связанную с повышенной точностью сквозного расчёта прерывных волн, от проблемы аппроксимации с повышенной точностью разрывных начальных и граничных условий.

Во **второй главе** на основе неклассических дифференциальных приближений разработан метод построения асимптотических разложений разностных решений на сильном разрыве.

Для гиперболической системы законов сохранения

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{u}(t,x)$ — искомая, а $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ — заданная вектор-функции, рассмотрена задача распада разрыва

$$\boldsymbol{u}(0,x) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_1\,, & x < 0 \\ \boldsymbol{u}_0\,, & x \geq 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Аппроксимируем систему (4) явной двухслойной по времени консервативной разностной схемой

$$\frac{\boldsymbol{v}_h(t+\tau,x) - \boldsymbol{v}_h(t,x)}{\tau} + \frac{\boldsymbol{f}_h(t,x+h/2) - \boldsymbol{f}_h(t,x-h/2)}{h} = 0, \tag{6}$$

где $\lambda = \tau/h = \mathrm{const}$, τ, h — шаги схемы по времени и по пространству,

$$\boldsymbol{f}_h(t,x+h/2) = \overline{\boldsymbol{f}}\big(\boldsymbol{v}_h(t,x-(l-1)h), \boldsymbol{v}_h(t,x-(l-2)h), \ldots, \boldsymbol{v}_h(t,x+lh), \lambda\big) \tag{7}$$

есть функция численного потока, согласованная с потоком $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ системы (4) в смысле выполнения условия

$$\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u},\lambda) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости Куранта по формуле

$$\tau = \tau(t) = zh / \max_i \sup_x |a^i(\boldsymbol{v}_h(t,x))|, \tag{9}$$

в которой $a^i(\boldsymbol{u})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — собственные значения матрицы Якоби $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}$ системы (4), $z \leq 1$ — постоянный положительный «коэффициент запаса».

Поскольку схема (6), так же, как и начальные данные (5), инвариантна относительно преобразования подобия

$$t' = \alpha t, \quad x' = \alpha x, \quad \tau' = \alpha\tau, \quad h' = \alpha h, \tag{10}$$

то имеет место

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{\nu}(t,x)$ — решение разностной задачи Коши (6)–(9), (5) при шаге $h = 1$. Тогда решение $\boldsymbol{v}_h(t,x)$ этой задачи при любом шаге $h > 0$ имеет вид*

$$\boldsymbol{v}_h(t,x) = \boldsymbol{\nu}(t/h, x/h), \tag{11}$$

т. е. получается из решения $\boldsymbol{\nu}(t,x)$ в результате его сжатия в $1/h$ раз к началу координат $t = x = 0$.

Из теоремы 1 следует, что внутренняя структура разностного решения $\boldsymbol{v}_h(x,t)$ не зависит от h и, тем самым, классический метод дифференциальных приближений (*Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* 1985) нельзя использовать для построения асимптотических разложений этого разностного решения.

В работе (*Остапенко В.В.* 1991) для разностных схем (6) первого порядка с линейной искусственной вязкостью был предложен способ построения асимптотических разложений их разностных решений на фронте бегущей ударной волны, в котором в качестве параметра разложения выбиралась величина обратная коэффициенту линейной искусственной вязкости. В этой работе был применён переход к автомодельной переменной, что не позволяет описывать начальный этап формирования разностного фронта ударной волны из разрывных начальных данных (5). Для описания этого этапа во **второй главе** предложен метод построения асимптотического разложения разностного решения, изложенный на примере задачи Коши

$$u(0,x) = \begin{cases} 1\,, & x < 0, \\ 0\,, & x \geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

для линейного уравнения переноса

$$u_t + u_x = 0 \tag{13}$$

для которого, из-за отсутствия сходящегося поля характеристик, не происходит выход разностного решения на автомодельный режим, в силу чего этап формирования схемного фронта ударной волны «продолжается неограниченно долго». В данном случае получаемая асимптотика существенно зависит от двух независимых переменных t и x.

В основе метода построения асимптотического разложения лежит понятие определяющего коэффициента асимптотического разложения C_m, изменение которого существенным образом влияет на внутреннюю структуру разностного решения $v_h(t,x)$. Коэффициент C_m выбирается как максимальный по модулю коэффициент при одной из пространственных производных в дифференциально-разностном представлении разностной схемы (метод I) или в П-форме дифференциального представления разностной схемы (метод II). Номер m равен порядку производной. После того, как коэффициент C_m выбран, в качестве параметра асимптотического разложения берётся величина

$$h_m = |C_m|^{-\frac{1}{m-1}}\,, \quad m \geq 2.$$

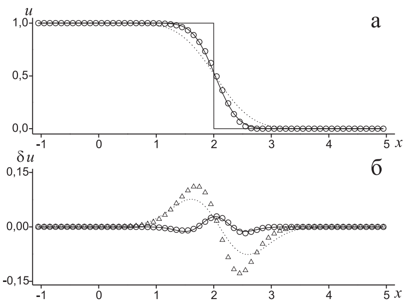

Рис. 6: сравнение разложений по параметру h_2 по методам I (пунктир) и II (сплошная линия) с разностным решением (кружки), полученным по схеме с линейной искусственной вязкостью. Начальные (а) и вторые (б) приближения.

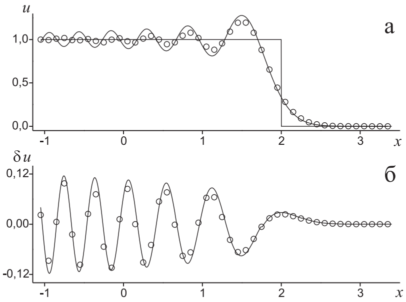

Рис. 7: сравнение разностного решения (кружки), полученного по схеме с линейной искусственной вязкостью, с его разложением по параметру h_3 (сплошная линия). Начальные (а) и вторые (б) приближения.

Метод изложен на примере явных двухслойных по времени линейных разностных схем (6), аппроксимирующих задачу Коши (12) для линейного уравнения переноса (13). Этот метод, как и теорема 1, остается верным и для неявных схем, в том числе многослойных по времени, если эти схемы являются инвариантными относительно преобразования подобия (10).

В **третьей главе** по методам I и II построены примеры асимптотических разложений разностных решений для явных двухслойных по времени схем с искусственной вязкостью и дисперсией, а также для симметричной компактной схемы с искусственными вязкостями второго и четвёртого порядка дивергентности. Рассмотрены случаи, когда определяющим коэффициентом разложения является C_2 (рис. 6), C_3 (рис. 7) или C_4. Показано, что асимптотическое разложение разностного решения, построенное по методу II, более точно описывает поведение разностного решения, чем разложение, построенное по методу I (рис. 6). На примерах разностной схемы с линейной искусственной вязкостью и схемы с искусственной вязкостью и дисперсией показано, что в случае $|C_2| < |C_3|$ разложение по параметру $h_2 = 1/C_2$, в отличие от разложения по параметру $h_3 = 1/\sqrt{C_3}$, неверно описывает поведение разностного решения на сильном разрыве. Этот факт подтверждает правильность предложенного метода выбора определяющего коэффициента разложения.

Для схемы с линейной искусственной вязкостью по методам I и II построены неклассические дифференциальные приближения, которые, как показали результаты расчётов, правильно описывают поведение разностного решения в окрестностях сильных разрывов. В частности, пользуясь методом II получим, что нулевое и первое неклассические приближения по параметру h_2 в переменных x, t имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=h\left(C-\frac{\lambda}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=h\left(C-\frac{\lambda}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+h^2\left(\lambda C-\frac{2\lambda^2+1}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

а по параметру h_3 записываются следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=-h^2\left|\lambda C-\frac{2\lambda^2+1}{6}\right|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=h\left(C-\frac{\lambda}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h^2\left|\lambda C-\frac{2\lambda^2+1}{6}\right|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \tag{16}$$

Проведено сравнение построенных приближений с классическими, которые, правильно передавая поведение разностного решения на гладких решениях аппроксимируемого уравнения, перестают его приближать в окрестностях сильных разрывов. Совпадение нулевого неклассического приближения (14) с первым классическим даёт обоснование того, что в работах (*Жуков А.И.* 1959; *Иванов М.Я.* 1982) на основе точного решения первого классического дифференциального приближения было получено описание поведения разностного решения на фронте изолированной ударной волны.

Как показали численные расчёты (рис. 7), приближения (15), (16) правильно передают поведение разностного решения на сильном разрыве в случае преобладания коэффициента схемной дисперсии. Существенное отличие в данном случае нулевого неклассического приближения (15) от первого классического показывает, что разработанная методика не только даёт обоснование применимости классического первого дифференциального приближения для описания поведения разностного решения в окрестностях сильных разрывов, но и указывает границы его применимости.

Четвёртая глава посвящена теоретическому исследованию точности разностных схем при сквозном расчёте нестационарных ударных волн. Изучается точность, с которой явные двухслойные по времени разностные схемы (6)–(9) аппроксимируют ε-условия Гюгонио (*Остапенко В.В.*

1998)

$$[D\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_\varepsilon + \frac{d}{dt}\int\limits_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} \boldsymbol{u}\,dx = 0 \tag{17}$$

— соотношения связывающие значения обобщённого решения $\boldsymbol{u}(t,x)$ системы (4) на границах ε-окрестности его линии разрыва $x = x(t)$, где $D = x_t$. Вводится разностный аналог условий (17)

$$\boldsymbol{\Omega}_h\big[\boldsymbol{v}_h(t,x)\big] \equiv \big[D\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{\varphi}_h\big]_\varepsilon + \frac{d}{dt}\int\limits_{x(t)-\varepsilon}^{x(t)+\varepsilon} \boldsymbol{w}_h dx = 0, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{w}_h(t,x) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \boldsymbol{v}_h(t',x)\,dt', \quad \boldsymbol{\varphi}_h(t,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} \boldsymbol{f}_h(t,x')\,dx'$$

и рассматривается невязка $\boldsymbol{\Omega}_h\big[\boldsymbol{u}(t,x)\big]$ разностной схемы (6), возникающая при аппроксимации ε-условий Гюгонио (17). Получена следующая

Теорема 2. *Пусть*

1. *в разностной схеме* (6), (7) *производящая функция разностного потока* $\overline{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{C}^k$, *где* $k \geq 2$;
2. $\varepsilon = lh$, $l \in \mathbb{N}$, *где* l *– число, определяющее шаблон разностного потока* $\overline{\boldsymbol{f}}$;
3. *схема* (6) *с* k*-м порядком аппроксимирует систему* (4) *на её гладких решениях;*
4. $x = x(t)$ *— изолированная достаточно гладкая линия разрыва обобщённого решения* $\boldsymbol{u}(t,x)$ *системы* (4);
5. *обобщённое решение* $\boldsymbol{u}(t,x)$ *имеет кусочно-непрерывные* k*-е частные производные в окрестности линии разрыва* $x = x(t)$.

Тогда соответствующее схеме (6) *разностное* ε*-условие Гюгонио* (18) *с* k*-м порядком аппроксимирует* ε*-условие Гюгонио* (17) *системы* (4).

Приводится подробное доказательство теоремы 2 для случая $k = 2$. Для случая произвольного k доказательство можно провести аналогичным образом.

Из теоремы 2 следует, что явные двухслойные по времени схемы Лакса-Вендроффа, МакКормака, Русанова, имеющие достаточно гладкие функции численных потоков, аппроксимируют ε-условия Гюгонио с тем же порядком, который они имеют при аппроксимации системы (1) на гладких решениях. TVD схема Хартена, получаемая путём монотонизации схемы Лакса-Вендроффа при помощи минимаксных процедур коррекции потоков, имеет лишь Липшиц-непрерывные функции численных потоков и поэтому TVD схема не удовлетворяет условию 1 теоремы 2. Это служит обоснованием результов расчётов, проведённых в главе 1, из которых следует, что схемы Лакса-Вендроффа, МакКормака, Русанова (в отличие от TVD схемы Хартена) сохраняют второй порядок слабой сходимости через фронт прерывной волны (рис. 2).

Компактная схема является неявной трёхслойной по времени консервативной разностной схемой и имеет третий порядок как классической, так и слабой аппроксимации, в силу чего она аппроксимирует ε-условия Гюгонио с повышенным порядком. Это проявляется в сохранении ею повышенного порядка слабой сходимости (рис. 2) и в высокой точности, с которой она вычисляет инварианты (рис. 3, 5).

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

1. Для явных двухслойных по времени разностных схем получены достаточные условия, при которых они с повышенным порядком аппроксимируют ε-условия Гюгонио на нестационарных ударных волнах. На примерах разностных схем Лакса-Вендроффа, МакКормака и Русанова (имеющих гладкие функции численных потоков) показано, что (в отличие от TVD схемы Хартена, функции численных потоков которой являются лишь Липшиц-непрерывными) такие схемы сохраняют повышенный порядок слабой сходимости при сквозном расчёте нестационарных ударных волн и, как следствие, сохраняют повышенную точность в областях их влияния. Методом численного эксперимента показана более высокая точность компактной схемы, обладающей повышенным порядком слабой аппроксимации, по сравнению с явными двухслойными по времени разностными схемами, имеющими лишь первый порядок слабой аппроксимации.

2. Введено понятие неклассических дифференциальных приближений и на их основе разработан метод построения асимптотических разложений разностных решений на сильном разрыве, в основе которого лежит понятие определяющего коэффициента асимптотического разложения. Определяющий коэффициент выбирается как максимальный по модулю коэффициент при одной из пространственных производных в дифференциально-разностном представлении разностной схемы (метод I) или в П-форме дифференциального представления разностной схемы (метод II). Построены асимптотические разложения разностного решения для явных двухслойных по времени схем с искусственной вязкостью и дисперсией, а также для симметричной компактной схемы с искусствен-

ными вязкостями второго и четвертого порядка дивергентности. Построенные асимптотические разложения правильно передают поведение разностных решений.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Остапенко В.В.*, ***Тюшева О.А.*** Асимптотическое разложение разностного решения на фронте ударной волны для линейного уравнения переноса // Динамика сплошной среды / Изд-во Института гидродинамики СО РАН. 2001. Вып. 118. С. 58–64.

[2] ***Ковыркина О.А.***, *Остапенко В.В.*, *Павлов А.А.* Неклассические дифференциальные приближения разностных схем // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. Ч. 2. С. 92–99.

[3] ***Ковыркина О.А.***, *Остапенко В.В.* Неклассические дифференциальные приближения разностных схем // Проблемы теоретической и прикладной математики. Изд-во Института математики и механики УрО РАН. 2004. С. 86–90.

[4] ***Ковыркина О.А.***, *Остапенко В.В.* Построение асимптотики разностного решения на основе неклассических дифференциальных приближений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 1. С. 88–109.

[5] ***Ковыркина О.А.***, *Остапенко В.В.* Асимптотическое разложение разностного решения в окрестности сильного разрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7. Вып. 4. С. 49–73.

[6] ***Ковыркина О.А.*** Численное моделирование течений мелкой воды с прерывными волнами // Тезисы докладов 3-й Всероссийской конференции «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения». Бийск. 2008. С. 53.

[7] ***Ковыркина О.А.*** О численном моделировании течений с прерывными волнами // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1. № 1. С. 48–56.

[8] ***Ковыркина О.А.*** О реальной точности разностных схем при сквозном расчёте нестационарных прерывных волн // Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений». Новосибирск. 2008. С. 505.

Подписано в печать 25.02.2009. Формат 60 × 84 1/16.
Уч. изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 82

Редакционно–издательский центр НГУ
630090 Новосибирск–90, ул. Пирогова, 2.