На правах рукописи

КАРПЕНКО Анастасия Валерьевна

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА В СЛАБО ТРАЗИТИВНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 2010

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Максимова Лариса Львовна

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Пальчунов Дмитрий Евгеньевич

кандидат физико-математических наук, доцент
Шрайнер Павел Александрович

Ведущая организация:
Сибирский федеральный университет

Защита состоится 16 сентября 2010 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «29» июля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.003.015.02
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертационная работа посвящена изучению интерполяционных свойств модальных логик.

Первые модальные системы были построены К. Льюисом в начале XX века [12]. Многие известные на данный момент модальные системы ведут начало от таких областей знания, как философия, основания математики, информатика, когнитология и математическая лингвистика.

Наблюдающийся в последнее время интерес к модальной логике обусловлен связью между этой логикой и логическими основаниями программирования. Благодаря данной связи стало возможным применение методов и результатов модальной логики в развитии теории программирования.

Алгебраическая семантика, а также реляционная семантика модальной логики, построенная С. Крипке [10], открыли возможность для изучения всей совокупности систем модальной логики. К этому направлению относятся исследования В. Блока, Л. Л. Максимовой, К. Сегерберга, Е. Расевой, В. Раутенберга, В. В. Рыбакова, С. Томасона, К. Файна, В. Б. Шехтмана, Л. Л. Эсакиа и многих других.

В нашей работе будут рассматриваться как расширения известных модальных систем $K4$, $S4$ и $S5$, так и менее известных $wK4$ и DL. Логики $S4$ и $S5$ были получены при характеризации различных вариантов интерпретации оператора $\Box$ («необходимость»), в то же время системы K и $wK4$ появились из чисто технических соображений.

Логика $wK4$ изучалась рядом авторов. В работе Л. Л. Эсакиа [37] изучение логики $wK4$ связано с рассмотрением шкал Крипке со слабо транзитивным отношением достижимости, то есть удовлетворяющим условию $(x \neq z \& xRy \& yRz \Rightarrow xRz)$. Данная логика является промежуточной между минимальной модальной логикой K и логикой $K4$. Л. Л. Эсакиа нашел топологическую семантику для $wK4$ и дал определение алгебр с деривацией, образующих алгебраическую семантику этой модальной системы. В диссертации мы будем называть данные алгебры слабо транзитивными.

Заключительный параграф работы [37] посвящен рассмотрению логики KS (Krister Segerberg). Данная логика построена К. Сегербергом в работе [20] при аксиоматизации модальной системы, характеризуемой шкалами $\langle W, R\rangle$, в которых отношение достижимости R совпадает с отношением неравенства. Логика KS позднее изучалась рядом авторов, среди которых можно отметить В. Горанко [8] и М. Де Рийке [5], и получила название логики неравенства DL (Difference logic). Кроме того, было отмечено (см., например, [11]), что добавление к другим модальным операторам модальности неравенства существенно увеличивает выразительность языка.

Как правило, при изучении модальных логик выделяются классы логик, обладающих теми или иными свойствами. К таким свойствам можно отнести полноту относительно семантики некоторого типа, разрешимость, финитную аппроксимируемость, табличность, дизъюнктивное и интерполяционные свойства. Под разрешимостью свойства P мы будем понимать существование алгоритма, позволяющего по выбранной формуле A определить, обладает ли логика с аксиомой A этим свойством. Остановимся подробнее на последнем из перечисленных свойств, которому посвящена данная диссертационная работа.

Интерполяционная теорема была доказана В. Крейгом в 1957 г. для классической логики предикатов [4]. Это доказательство послужило поводом для изучения интерполяции в различных формальных теориях. В классической логике предикатов интерполяционная теорема Крейга имеет ряд эквивалентных формулировок, однако для модальных логик данные формулировки становятся неэквивалентными. В этой связи было сформулировано несколько основных вариантов интерполяционного свойства: интерполяционное свойство Крейга CIP, дедуктивное интерполяцинное свойство IPD, ограниченное интерполяционное свойство IPR [13] и, наконец, слабое интерполяционное свойство WIP [16].

Д. Габбаем (см., например, [7]) доказана интерполяционная теорема для логик $S4$ и K, а Г. Шуммом [23] для логики $S5$. Данные результаты были существенно расширены Л. Л. Максимовой, получившей доказательство того, что среди расширений логики $S5$ ровно четыре логики, включая $S5$ и противоречивую логику For, обладают интерполяционным свойством Крейга [29]. В работе [7] приведен список из 37 логик, содержащий все непротиворечивые расширения $S4$, в которых верна теорема Крейга, а также список из 49 логик, содержащий все непротиворечивые расширения $S4$ со свойством IPD. Доказано, что CIP и IPD разрешимы над логикой $S4$. Однако А. В. Чагровым [3,35] доказано, что над $K4$ данные свойства неразрешимы. Семейство расширений логики $K4$, обладающих свойством CIP, имеет мощность континуума [7].

Цель работы.

Работа посвящена изучению слабой интерполяции над логиками $K4$ и $wK4$, а также над логикой неравенства DL, расширяющей $wK4$.

Основное содержание диссертации.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Получен критерий простоты слабо транзитивных модальных алгебр. На основании критерия найдено полное описание конечно порожденных простых слабо транзитивных модальных алгебр. Описана структура вложений конечно порожденных простых DL-алгебр. Описана решетка многообразий DL-алгебр, а вместе с ней и решетка расширений логики неравенства. Представлена классификация многообразий DL-алгебр.

2. Найдены необходимые условия амальгамируемости многообразий DL-алгебр. Замечено, что для многообразий DL-алгебр слабая амальгамируемость эквивалентна амальгамируемости. Доказано, что существует в точности 16 амальгамируемых многообразий DL-алгебр. Кроме того, получен критерий слабой амальгамируемости многообразий слабо транзитивных модальных алгебр.

3. Доказана разрешимость слабого интерполяционного свойства над логиками $S4$, $K4$ и $wK4$ и дедуктивного интерполяционного свойства над логикой неравенства. В частности, доказано, что сами логики $wK4$ и DL не обладают слабым интерполяционным свойством.

Основные методы.

Интерполяционное свойство было первоначально сформулировано синтаксически. Л. Л. Максимовой найдены алгебраические эквиваленты основных форм интерполяционного свойства для многих классов неклассических логик. Таким образом, изучение интерполяции в модальных логиках сводится к изучению амальгамируемости соответствующих многообразий модальнух алгебр. В работе используются семантические и алгебраические методы исследования.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации имеют теоретическое значение, они могут быть использованы при дальнейших исследованиях по неклассическим логикам и универсальной алгебре, а также для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в указанных областях.

Научная новизна работы.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Апробация работы.

Результаты дисссертации докладывались на семинарах «Неклассические логики» и «Алгебра и логика», проходящих на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета, а также на следующих международных конференциях: «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2007), «Международная научная студенческая конференция» (Новосибирск, 2007 и 2009), «Logic Colloquium» (Швейцария, Берн, 2008), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009 и 2010).

Публикации.

Основные результаты изложены в работах [39]— [48]. Статьи [46]—[48] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации.

Диссертация содержит 86 страниц, состоит из введения, трех глав, содержащих 13 параграфов, и библиографии. Библиография включает 48 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации носит вспомогательный характер. В ней вводятся все определения и обозначения, необходимые для изложения результатов основной части. Приведем основные из них.

Формулы пропозициональной модальной логики строятся с помощью операций $\to$ и $\Box$ и константы $\bot$. Остальные связки: $\&, \vee, \neg$ — определяются через исходные обычным образом. Полагаем $\Diamond A := \neg\Box\neg A$, $\top := \bot \to \bot$.

Нормальной модальной логикой называется множество модальных формул, содержащее все классические тавтологии и аксиому $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ и замкнутое относительно подстановки и правил:

R1. $\dfrac{A, (A \to B)}{B}$ (modus ponens);

R2. $\dfrac{A}{\Box A}$ (правило для необходимости).

В работе рассматриваются только нормальные модальные логики, поэтому слово «нормальная» опускается. Семейство всех модальных логик, расширяющих модальную логику L, обозначается с помощью $NE(L)$.

Минимальная модальная логика обозначается K. Перечислим расширения логики K, которые используются в работе:

$wK4 = K + ((A\&\Box A) \to \Box\Box A)$;

$DL = wK4 + (A \to \Box\Diamond A)$;

$K4 = K + (\Box A \to \Box\Box A)$;

$S4 = K4 + (\Box A \to A)$;

$S4.1 = S4 + (\Box\Diamond A \to \Diamond\Box A)$;

$S5 = S4 + (A \to \Box\Diamond A)$.

Пусть $\mathbf{p}$ — список пропозициональных переменных, $A(\mathbf{p})$ — формула, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ — попарно не пересекающиеся списки переменных.

Говорят, что логика L *обладает интерполяционным свойством Крейга (CIP)*, если выполнено условие: для любых формул $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ следует существование формулы $C(\mathbf{p})$, такой, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

Логики K, $K4$, $S4$, $S4.1$, $S5$, а также противоречивая логика For обладают интерполяционным свойством Крейга (см., например, [7]).

Логика L обладает *дедуктивным интерполяционным свойством IPD*, если выполнено условие: для любых формул $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ следует существование формулы $C(\mathbf{p})$, такой, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

Говорят, что логика L *обладает слабым интерполяционным свойством WIP*, если выполнено условие: для любых формул $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ условие $A(\mathbf{p},\mathbf{q}),\ B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$ влечет существование формулы $C(\mathbf{p})$, такой, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}),\ B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$.

Для интерполяционных свойств выполнено следующее соотношение: $CIP \Rightarrow IPD \Rightarrow WIP$. В модальной логике обратные стрелки не выполняются. В то же время в классической логике все эти свойства эквивалентны.

В [16] отмечено, что для любой логики $L \in NE(S5)$ свойства CIP, IPD, IPR и WIP эквивалентны. Кроме того, все пропозициональные логики над $S4.1$ обладают WIP.

Поскольку семейство расширений логики $S4.1$ континуально, существует континуум расширений логики $S4$, обладающих слабым интерполяционным свойством. Таким образом, WIP существенно отличается от CIP и IPD, так как свойством IPD, а следовательно, и CIP, обладает лишь конечное число расширений $S4$ [7].

Параграф 1.2 посвящен описанию алгебраической семантики модальной логики. Известно (см., например, [3, 7]), что существует дуальный изоморфизм между классом расширений логики и классом подмногообразий соответствующего мноообразия алгебр. Это позволяет исследовать перечисленные классы логик при помощи методов универсальной алгебры.

Модальной алгеброй называется алгебра $\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, \to, 0, \Box)$, которая удовлетворяет тождествам булевой алгебры для операций $\to, 0$ и, кроме того, условиям $\Box 1 = 1$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$, где $1 = 0 \to 0$. Модальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *транзитивной*, если $\Box x \leq \Box\Box x$, и *слабо транзитивной*, если $\boxdot x = x \& \Box x \leq \Box\Box x$. В свою очередь, слабо транзитивная модальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *DL-алгеброй*, если она удовлетворяет условию $x \leq \Box\Diamond x$, где $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

Пусть A — формула модального языка. Формула A называется *общезначимой* в $\mathfrak{A}$ (пишем $\mathfrak{A} \models A$), если в $\mathfrak{A}$ выполнено тождество $A = 1$.

Пишем $\mathfrak{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathfrak{A} \models A)$. Пусть $V(L) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models L\}$. Очевидно, что $V(L)$ является многообразием для всякой нормальной модальной логики.

Кроме того, известно, что $L = \{A \mid (\forall \mathfrak{A} \in V(L))(\mathfrak{A} \models A)\}$ (см. [7]). Для любого класса K модальных алгебр множество $L(K) = \{A \mid (\forall \mathfrak{A} \in K)(\mathfrak{A} \models A)\}$ будет модальной логикой. В частности, если K есть семейство слабо транзитивных модальных алгебр, то $L(K)$ будет логикой, расширяющей $wK4$, если K — семейство DL-алгебр, то $L(K)$ расширяет DL.

Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции. Алгебра называется *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа собственных фактор-алгебр.

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *амальгамируемым*, если выполнено условие (AP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и мономорфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Наряду со свойством амальгамируемости введен и слабый его вариант.

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *слабо амальгамируемым*, если выполнено условие (WAP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и гомоморфизмы

$\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ и алгебра $\mathfrak{D}$ невырожденная, если $\mathfrak{A}$ невырожденная.

При этом, алгебра называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов.

В работах Л. Л. Максимовой изучаются различные варианты амальгамируемости многообразий модальных алгебр. В частности, в [28] показано, что не более 50 многообразий топобулевых алгебр являются амальгамируемыми, среди них не более 38 имеют свойство сверхамальгамируемости. В работе [30] найдены необходимые и достаточные условия амальгамируемости, что позволило свести вопрос о наличии указанных свойств у данного многообразия модальных алгебр к рассмотрению подкласса конечно порожденных финитно неразложимых алгебр. Слабое интерполяционное свойство сводится к амальгамируемости класса конечно порожденных простых алгебр [31].

Приведем необходимые теоремы Л. Л. Максимовой:

Теорема [30] *Для любой модальной логики L следующие условия эквивалентны:*

1. L обладает интерполяционным свойством IPD;

2. многообразие $V(L)$ амальгамируемо;

3. для любых финитно неразложимых, конечно порожденных $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ из $V(L)$, для любых мономорфизмов $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ существуют такие алгебра $\mathfrak{D}$ из $V(L)$ и мономорфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$.

Теорема [14,31] *Для каждой модальной логики L следующие условия эквивалентны:*

1. L обладает слабым интерполяционным свойством WIP;

2. класс простых алгебр многообразия $V(L)$ амальгамируем;

3. класс конечно порожденных простых алгебр многообразия $V(L)$ амальгамируем.

Кроме того, доказано [16], что WIP равносильно слабой амальгамируемости многообразия $V(L)$.

Заключительный параграф данной главы посвящен семантике Крипке. Семантический подход к изучению логик является наиболее распространенным, он использует «геометрические» особенности шкал Крипке.

Шкалой Крипке называется пара $\mathcal{W} = \langle W, R\rangle$, где W множество возможных миров и R – бинарное отношение на W. *Моделью Крипке* называется тройка $M = \langle W, R, \Vdash\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — шкала Крипке, а $\Vdash$ — отношение между возможным миром и формулой, удовлетворяющее условию, что для любого $x \in W$ и формул A и B (пишем $x \nVdash A$, если $x \Vdash A$ не выполнено):

(M0) $x \nVdash \bot$;

(M1) $x \Vdash A \to B \Leftrightarrow (x \nVdash A$ или $x \Vdash B)$;

(M2) $x \Vdash \Box A \Leftrightarrow \forall y\,(xRy \Rightarrow y \Vdash A)$.

Известно [37], что логика $wK4$ полна по Крипке и характеризуется шкалами со слабо транзитивным отношением R, а логика DL полна относительно шкал, где R есть отношение неравенства [5]. Логика $K4$ полна относительно шкал с транзитивным отношением, $S4$ — с транзитивным и рефлексивным отношением, наконец, $S5$ — с транзитивным, рефлексивным и симметричным отношением (см., например, [3, 7]).

Семантика Крипке для всех перечисленных логик безусловно более наглядна, однако не все модальные логики полны по Крипке (К. Файн [6], С. Томасон [24]). В этой связи удобным представляется подход, сочетающий в себе семантические и алгебраические методы. В его основе лежит теорема о представлении, доказанная Б. Йонссоном и А. Тарским [9] для булевых алгебр с оператором.

Пусть $\mathcal{W} = \langle W, R\rangle$ шкала Крипке. Обозначим через W^+ множество подмножеств множества W. Тогда $\mathcal{W}^+ = \langle W^+, \to, 0, \Box\rangle$, где $0 = \emptyset$, $X \to Y = (W - X) \cup Y$, $\Box X = \{x \in W | \forall y(xRy \Rightarrow y \in X)\}$ для $X, Y \subseteq W$, является модальной алгеброй.

Справедлива теорема Йонссона - Тарского о представлении модальных алгебр (см., например, [7]):

Теорема. Любая модальная алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в подходящую алгебру $\mathcal{W}^+$. Если $\mathfrak{A}$ конечна, то она изоморфна $\mathcal{W}^+$.

Глава 2 посвящена описанию простых транзитивных и слабо транзитивных модальных алгебр, а также простых DL-алгебр и их вложений.

В частности доказаны следующие утверждения:

Теорема 2.4. *Слабо транзитивная алгебра $\mathfrak{A}$ является простой тогда и только тогда, когда выполнено*

$$\boxdot x = \begin{cases} 1, \text{ при } x = 1; \\ 0, \text{ при } x \neq 1. \end{cases}$$

Теорема 2.5. *Любая простая слабо транзитивная алгебра является DL-алгеброй.*

Через V_n^m обозначим конечную модальную алгебру с $(n+m)$ атомами $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$, такими, что для любого атома x:

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = a_i \quad \text{для некоторого } 1 \leq i \leq n; \\ \neg x, & x = b_j \quad \text{для некоторого } 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Поскольку любой элемент алгебры V_n^m однозначно представим как сумма атомов и $\Diamond(y \vee z) = \Diamond y \vee \Diamond z$, то операция $\Diamond$ однозначно определяется для всех элементов из V_n^m.

Теорема 2.7. *Любая конечно порожденная финитно неразложимая DL-алгебра является простой и изоморфной алгебре V_n^m для подходящих n, m, где $n + m > 0$.*

Таким образом, класс конечно порожденных простых DL-алгебр с точностью до изоморфизма совпадает с классом $\{V_n^m | \ m + n > 0\}$, обозначим его $\mathcal{K}(DL)$. В силу теоремы 2.5, класс конечно порожденных простых слабо транзитивных модальных алгебр также с точностью до изоморфизма совпадает с $\mathcal{K}(DL)$.

Известно (см. [7]), что существует взаимно однозначное соответствие между вложениями конечных алгебр и p-морфизмами шкал.

Отображение θ шкалы $F = \langle T, R\rangle$ на шкалу $F' = \langle T', R'\rangle$ называется *p-морфизмом*, если для всех $x, y \in T$, $z \in T'$ выполнены условия:

(p1) $xRy \Rightarrow \theta(x)R'\theta(y)$,

(p2) $\theta(x)R'z \Rightarrow (\exists y' \in T)(xRy'$ и $\theta(y') = z)$.

Третий параграф данной главы посвящен изучению p-морфизмов DL-шкал.

Шкалы, удовлетворяющие условию: $x \neq y \Rightarrow xRy$, будем называть *DL-шкалами.* Определим DL-шкалы $\mathcal{X}_n^m = \langle X_n^m, R\rangle$ следующим образом:

$$X_n^m = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\},$$

$$uRv \iff (u \neq v \text{ или } u = a_i \text{ для некоторого } i,\ 1 \leq i \leq n).$$

Семейство всех таких шкал обозначим через DLF.

Лемма 2.12. *Любая конечная DL-шкала изоморфна $\mathcal{X}_n^m$ для подходящих m и n.*

Введено понятие элементарного p-морфизма. Найдено полное описание элементарных p-морфизмов DL-шкал. Доказано, что любой p-морфизм из $\mathcal{X}_{n'}^{m'}$ на $\mathcal{X}_n^m$ является изоморфизмом или композицией элементарных p-морфизмов шкал из DLF.

Для любых m, n алгебра V_n^m изоморфна $(X_n^m)^+$.

Для конечных простых DL–алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ пишем $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если и только если $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в $\mathfrak{B}$.

Исходя из найденного описания p-морфизмов получаем, что для $m \geq 0, n \geq 1$ имеют место вложения:

$$V_n^m \prec V_{n+1}^m, V_n^m \prec V_n^{m+1}, V_n^m \prec V_{n-1}^{m+2}. \tag{1}$$

Вся структура вложений описывается в следующей теореме.

Теорема 2.9. *Отношение $\preccurlyeq$ является рефлексивным и транзитивным замыканием отношения (1).*

Диаграмма отношения $\preccurlyeq$ представлена на рисунке:

Рис. 1: Структура вложений

Доказано, что семейство DL-логик имеет мощность континуума.

Теоремы 2.7 и 2.9 позволяют дать следующее описание решетки многообразий DL-алгебр.

Назовем класс $\mathcal{K}$ *замкнутым вниз*, если для любой алгебры $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ имеем $(\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K})$.

Теорема 2.10. *Существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями DL-алгебр и подклассами класса $\mathcal{K}(DL)$, замкнутыми вниз.*

Заключительная глава работы посвящена изучению амальгамируемости и интерполяции. В параграфе 3.1 получены необходимые условия амальгамируемости многообразий DL-алгебр, которые позволяют доказать, что число амальгамируемых многообразий DL-алгебр конечно. В параграфе 3.2 доказано, что существует в точности 16 амальгамируемых многообразий DL-алгебр, и найдено их полное описание.

Теорема 3.1. *Существует в точности 16 слабо амальгамируемых многообразий DL-алгебр, им соответствуют следующие подклассы класса $\mathcal{K}(DL)$:*

1. пустой. В этом случае многообразие содержит только одноэлементную алгебру и соответствует противоречивой логике For;

2. порожденный алгеброй V_0^1;

3. порожденный всеми алгебрами $V_n^0 (n > 0)$ (в этом случае многообразие $V(L)$ соответствует логике $S5$);

4. порожденный алгебрами $V_n^0 (n > 0)$ и V_0^1;

5. порожденные алгеброй V_j^0, для $(j = 1, 2)$;

6. порожденные парой алгебр V_j^0 и V_0^1, для $(j = 1, 2)$;

7. порожденный алгеброй V_1^1;

8. порожденный парой алгебр V_1^1 и V_0^1;

9. порожденные алгеброй V_0^k, для $(k = 2, 3, 4)$;

10. порожденные парой алгебр V_0^k и V_0^1, для $(k = 2, 3, 4)$.

Показано, что амальгамируемость многообразия DL-алгебр эквивалентна его слабой амальгамируемости. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 3.2. *Все многообразия теоремы 3.1 и только они являются амальгамируемыми многообразиями DL-алгебр.*

Следующий параграф посвящен изучению слабой интерполяции в расширениях логик $K4$ и $S4$, в нем доказана разрешимость WIP для этих логик.

На основании результатов параграфа 3.2 в параграфе 3.4 доказано, что существует в точности 16 расширений DL, обладающих дедуктивным интерполяционным свойством. Получена аксиоматизация всех этих расширений (теорема 3.9). Показано, что все они конечно аксиоматизируемы.

Заметим, что среди данных шестнадцати логик не присутствует сама DL, так как она не обладает свойством IPD.

Теорема 3.10. *Дедуктивное интерполяционное свойство разрешимо над логикой DL.*

Для проверки справедливости IPD в логике $DL+A$ достаточно проверить общезначимость формулы A в конечном числе конечных алгебр.

В этом же параграфе отмечено, что свойства IPD и WIP эквивалентны над логикой DL. Над логикой $S5$ эти свойства равносильны также свойству CIP [16]. Однако это не так в расширениях логики DL. В [30] доказано, что логика алгебры V_1^1 не обладает CIP, хотя имеет IPD.

Заключительный параграф диссертации посвящен интерполяции над логикой $wK4$. Доказывается, что логика $wK4$ не обладает слабым интерполяционным свойством.

Проблема слабой интерполяции над $wK4$ сводится к проблеме дедуктивной интерполяции над логикой DL.

Теорема 3.13. *Логика L, расширяющая логику $wK4$, обладает WIP тогда и только тогда, когда логика $L + (A \to \Box\Diamond A)$ обладает IPD.*

Из теорем 3.10 и 3.13 непосредственно следует

Теорема 3.14. *Слабое интерполяционное свойство разрешимо над логикой $wK4$.*

В заключение автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю Ларисе Львовне Максимовой за постановку интересных задач, всестороннюю поддержку и внимание в течение всей работы.

Список литературы

[1] *Blok W. J.* The lattice of modal logics, an algebraic investigation.// The Journal of Symbol Logic. 1980. Vol. 45, No. 6 , pp. 221-236.

[2] *Birkhoff G.* On the combination of subalgebras.// Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1933. Vol. 29, pp. 441–464.

[3] *Chagrov A. and Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, Oxford, 1997.

[4] *Craig W.* Three uses of Herberand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory.// Journal of Symbol Logic. 1957. Vol. 22, pp. 269–285.

[5] *De Rijke M.* The Modal logic of inequality.// The Journal of Symbol Logic. 1992. Vol. 57, No. 2, pp. 566-584.

[6] *Fine K.* An incomplete logic containing S4.// Theoria. 1974. Vol. 40, pp. 23–29.

[7] *Gabbay D. M., Maksimova L. L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics (Oxford Logic Guides, 46; Oxford Sci. Publ). Oxford, Clarendon Press, 2005.

[8] *Goranko V.* Modal definability in enriched languages.// Notre Dame J. of Formal Logic. 1990. Vol. 31, No. 1, pp. 81–105.

[9] *Jonsson B. and Tarski A.* Boolean algebras with operators.// American Journal of Mathematics. 1951. Vol. 73, pp. 891–939.

[10] *Kripke S.* Semantic analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.// Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Vol. 9, pp. 67–96

[11] *Kudinov A.* Topological modal logics with difference modality.// In: Advances in Modal Logic. 2006. College Publications, London. Vol. 6, pp. 319–332.

[12] *Lewis C. I. and Langford C. H.* Symbolic Logic.// Appleton-Centyre-Croft. 1932. New York.

[13] *Maksimova L.* Restricted interpolation in modal logics.// In: P. Balbiani, N. - Y. Suzuki, F. Wolter, M. Zakharyashev, eds. Advances in Modal Logics. Kings's College London Publications, London. 2003. Vol. 4, pp. 297 — 312.

[14] *Maksimova L.* On a form of interpolation in modal logic.// Logic Colloq. 2005, Bull. Symb. Log. 2006. Vol. 12, No. 2, p. 340.

[15] *Maksimova L.* Interpolation and joint consistency.// In: We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay. Volume 2, S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb and J. Woods, eds. King's College Publications, London. 2005. pp. 293–305.

[16] *Maksimova L.* Definability and Interpolation in Non-Classical Logics.// Stud. Log. 2006. Vol. 82, No. 2, pp. 271–291.

[17] *Rautenberg W.* Klassische und nicht-classische Aussagenlogik.// Wiesbaden, Vieweg, Braunschweig, 1979.

[18] *Rautenberg W.* Splitting lattice of logics.// Arch. math. Logik. 1980. Vol. 20, pp. 155–159.

[19] *Segerberg K.* Essay in classical modal logic.// Uppsala. 1971.

[20] *Segerberg K.* «Somewhere else» and «some other time».// In: Wright and Wrong: mini-essay in honor of G.H. von Wright, Publ. the group in logic and methodology of Real Finland. 1976. pp. 61–64.

[21] *Segerberg K.* A note on the logic of elsewhere.// Theoria. 1980. Vol. 46, No. 2/3, pp. 183–187.

[22] *Shehtman V.* «Everywhere» and «Here».// J. of Applied Non-classical Logic. 1999. Vol. 9, No. 2/3, pp. 369–380.

[23] *Shumm G. F.* Interpolation in S5 and related systems.// Reports math. Logic. 1976. Vol. 6, pp. 107–110.

[24] *Thomason S. K.* An incompleteness theorem in modal logic.// Theoria. 1974. Vol. 40, pp. 30–34.

[25] *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Научная книга, Новосибирск, 1996.

[26] *Максимова Л. Л.* Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса. // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1, С. 28—55.

[27] *Максимова Л. Л.* Об одной классификации модальных логик.// Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3, С. 328–340.

[28] *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр.// Алгебра и логика. 1979. Т. 18, №5, С. 556—586.

[29] *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия.// Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №2, С. 194—213.

[30] *Максимова Л. Л.* Модальные логики и мноообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость.// Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 2, С. 145–166.

[31] *Максимова Л. Л.* Слабая форма интерполяции в эквациональной логике.// Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1, С. 94–107.

[32] *Максимова Л. Л.* Разрешимость проблемы интерполяции и родственных свойств в табличных логиках.// Алгебра и логика. 2009. Т. 48, №6, С. 754–792.

[33] *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М., Наука, 1970.

[34] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М. Наука, 1972.

[35] *Чагров А. В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости.// Алгебра и логика. 1990. Т. 29, №5, С. 350—367.

[36] *Шрайнер П. А.* Автоматическое распознавание интерполяции в модальных исчислениях. // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №1, С. 103—119.

[37] *Эсакиа Л. Л.* Слабая транзитивность - реституция.// Логические исследования. 2001. М., Наука. Т. 8, С. 244—255.

[38] *Янков В. А.* О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами.// Доклады АН СССР. 1963. Т. 151 , № 6, С. 1293 — 1294.

Работы автора по теме диссертации

[39] *Karpenko A.* Weak interpolation property in NE(K4).// Abstracts of Plenary Talks, Tutorial, Special Sessions, Contributed Talks. Logic Colloquium 2008, Bern, Switzerland. pp.35-36.

[40] *Karpenko A.* Weak interpolation property in NE(K4).// The Bulletin of Symbol Logic. March 2009. Vol. 15, No. 1, pp.119-120.

[41] *Карпенко А.В.* Слабое интерполяционное свойство в расширениях логики $S4$. // Студент и научно-технический прогресс. Материалы XLV Международной научно студенческой конференции. - Новосибирск, 2007. С. 136.

[42] *Карпенко А.В.* Слабая интерполяция в расширениях модальной логики $S4$ // Математика в современном мире. Материалы российской конференции. - Новосибирск, 2007. С. 33—34.

[43] *Карпенко А.В.* Финитно-неразложимые DL-алгебры // Студент и научно-технический прогресс. Материалы XLVII Международной научно студенческой конференции. - Новосибирск, 2009.

[44] *Карпенко А.В.* Описание простых слабо транзитивных модальных алгебр// Мальцевские чтения 2009 г. Материалы конференции, - Новосибирск, 2009, С. 225.

[45] *Карпенко А.В.* Амальгамируемые многообразия DL-алгебр// Мальцевские чтения 2010 г., Материалы конференции, - Новосибирск, 2010, С. 23.

[46] *Карпенко А. В.* Слабое интерполяционное свойство в расширениях логик $S4$ и $K4$.// Алгебра и логика. 2008. Т. 47, №6, С. 705–722.

[47] *Карпенко А. В., Максимова Л. Л.* Простые слабо транзитивные модальные алгебры.// Алгебра и логика. 2010. Т. 48, №3, С. 347–366.

[48] *Карпенко А. В.* Интерполяционные теоремы в расширениях логики неравенства.// Сибирский математический журнал. 2010 .Т. 51, № 3, С. 553—568.

Карпенко Анастасия Валерьевна

Интерполяционные свойства в слабо транзитивных модальных логиках

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 09.07.10	Формат 60 x 84 1/16
Печать офсетная	Усл. печ. л. 1.0
Заказ №166	Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск–90, ул.Пирогова 2