

На правах рукописи

Кабанов Александр Николаевич

**О верхних центральных рядах группы
автоморфизмов и примитивных элементах
свободных метабелевых алгебр Ли**

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск, 2009

Работа выполнена в Омском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Романьков Виталий Анатольевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Будкин Александр Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент
Сосновский Юрий Васильевич

Ведущая организация:

Красноярский государственный аграрный университет

Защита диссертации состоится 25 декабря 2009 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 15 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Исследование алгебр Ли и их автоморфизмов является классической задачей алгебры. Норвежский математик Софус Ли в конце XIX века впервые рассмотрел алгебры, названные потом его именем, в связи с теорией непрерывных групп преобразований. Основным результатом последней является сведение "локальных" задач, относящихся к группам Ли, к соответствующим задачам теории алгебр Ли, т. е. к задачам линейной алгебры. Каждой группе Ли сопоставляется алгебра Ли над полем вещественных и комплексных чисел, и устанавливается соответствие между аналитическими подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли, при котором инвариантным подгруппам соответствуют идеалы, абелевым подгруппам – абелевы подалгебры и т.д. Изоморфизм алгебр Ли эквивалентен локальному изоморфизму соответствующих групп Ли.

Алгебры Ли прочно вошли в математику. Их теория благодаря вниманию многих выдающихся математиков обогатилась целым рядом тонких и красивых результатов, влияние которых простирается далеко за пределы алгебры. В современной математике алгебры Ли играют важнейшую роль и находят приложение почти в каждом ее разделе.

Основные теоремы о структуре алгебр Ли были получены одним из крупнейших математиков XX века Эли Картаном. В частности, в 1926 г. им была найдена классификация простых вещественных алгебр Ли.

Выполнение тех или иных тождеств является одним из наиболее существенных свойств алгебраических систем. Алгебры Ли с тождествами стали предметом исследования уже в самом начале развития теории этих алгебр. Значительная часть обычно изучаемых классов алгебр Ли выделяется по признаку выполнения (или невыполнения) некоторых тождеств. Таковы классы разрешимых, нильпотентных, свободных алгебр и некоторые другие. Многие из классических теорем теории алгебр Ли могут быть сформулированы на языке тождеств. Конечно, в

случае таких теорем, как теорема Энгеля, Ли и других, подобная переформулировка является в известной мере формальной. Однако логика развития алгебры привела к задачам, в которых существенно именно наличие тождества в алгебре Ли. К числу наиболее важных примеров следует отнести цикл работ А. И. Кострикина [10-12] по проблеме Бернсайда, где один из основных моментов – изучение колец Ли с тождеством энгелевости.

Именно ко времени написания этих работ (середина 50-х – начало 60-х) следует отнести начало изучения тождеств в алгебрах Ли. Фундаментом многих рассмотрений становятся работы А. И. Ширшова, доказавшего теорему о свободности подалгебр в свободных алгебрах Ли и давшего очень полезные конструкции линейных базисов в свободных алгебрах Ли [22-24]. Л. А. Бокуть изучал полинильпотентные алгебры Ли [6]. В. Н. Латышев ввел в рассмотрение стандартные тождества в алгебрах Ли и исследовал специальные алгебры Ли [13-14]. А. Л. Шмелькин применил методы теории алгебр Ли для изучения многообразий групп [21]. Важное тождество энгелевости изучали также П. Кон [28] и П. Хиггинс [33].

Следующий этап в развитии теории тождеств в алгебрах Ли – изучение систем тождеств вне зависимости от их конкретного вида, а также изучение многообразий алгебр Ли, т. е. классов алгебр Ли, определенных системами тождеств, – начался в конце 60-х – начале 70-х годов. Этот этап был в значительной мере подготовлен развитием теории многообразий групп. Поэтому сначала теория многообразий алгебр Ли как бы "догоняла" теорию многообразий групп. Так появился пример многообразия алгебр Ли без конечного базиса тождеств над полем характеристики 2, была доказана свобода полугруппы многообразий алгебр Ли над бесконечным полем относительно операции умножения, получены многие другие аналоги теоретико-групповых результатов в случае бесконечного поля [2-4, 15, 44].

Довольно скоро, однако, выявилось значительное своеобразие теории многообразий алгебр Ли. Например, в отличие от многообразий групп, в случае конечного поля операция умножения многообразия алгебр Ли уже не обязана быть

ассоциативной [4]. Произведение конечно базлируемых многообразий алгебр Ли над бесконечным полем всегда конечно базлируемо [4]. По-иному ведут себя многообразия алгебр Ли и при рассмотрении решеток их подмногообразий [20], и при нахождении их базисного и аксиоматического рангов [26]. Эти и ряд других результатов привели к тому, что проблематика и методы теории многообразий алгебр Ли приобрели достаточно отчетливые очертания и интересную специфику.

Один из простейших классов многообразий алгебр Ли – разрешимые степени 2, или метабелевы многообразия.

Некоторые начальные сведения о теории метабелевых алгебр Ли можно посмотреть в работах В. А. Артамонова [1, 25] и Ю. А. Бахтурина [5].

В работе В. А. Романькова, И. В. Чиркова и М. А. Шевелина [17] была установлена матричная непредставимость групп автоморфизмов свободных алгебр Ли, свободных ассоциативных алгебр, абсолютно свободных алгебр и алгебр многочленов при условии, что ранг алгебры не меньше четырех, а основное поле имеет характеристику 0. Во всех указанных случаях в группе автоморфизмов выделялась подгруппа унитарных автоморфизмов, которая оказывалась разрешимой, но не представимой матрицами.

В статье Ю. В. Сосновского [18] описывалось гиперцентральное строение этой подгруппы, но только для алгебры многочленов, зато без ограничения на характеристику поля и с понижением минимального числа порождающих с 4 до 3.

В диссертации описывается гиперцентральная структура группы унитарных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли ранга n над полем произвольной характеристики. Как следствие из описания гиперцентрального строения получается матричная непредставимость группы унитарных автоморфизмов ни над каким полем.

Напомним, что автоморфизм свободной алгебры называется элементарным, если каждый элемент x_i множества свободных порождающих этой алгебры под действием этого автоморфизма переходит в элемент $ax_i + u_i$, где a – элемент поля, над которым

рассматривается алгебра, а элемент u_i не зависит от порождающего x_i .

Автоморфизм, принадлежащий подгруппе, порожденной всеми элементарными автоморфизмами, называется ручным. В противном случае он называется неручным или диким.

В 1954 г. Кон [29] доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли являются ручными. Хорошо известно [30, 34, 35, 36], что группы автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры A_2 (индекс обозначает ранг, то есть мощность множества свободных порождающих) и алгебры многочленов P_2 над любым полем состоят только из ручных автоморфизмов.

В 1972 г. Нагата [37] предположил, что ставший в последствии известным автоморфизм

$$s = (x_1 + (x_1^2 - x_2 x_3) x_3, x_2 + 2(x_1^2 - x_2 x_3) x_1 + (x_1^2 - x_2 x_3)^2 x_3, x_3)$$

алгебры многочленов $P_3 = K[x_1, x_2, x_3]$ является неручным, если поле K имеет характеристику 0.

И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев [19, 40, 41], используя метод скобок Пуассона, ограничение степени и слабую редукцию, доказали, что автоморфизм Нагаты s действительно неручной.

В случае свободной ассоциативной алгебры ранга 3 вопрос о существовании диких автоморфизмов известен как проблема Кона. У. У. Умирбаев [43] доказал, что так называемый автоморфизм Аника

$$d = (x_1 + x_3(x_1 x_3 - x_3 x_2), x_2 + (x_1 x_3 - x_3 x_2) x_3, x_3)$$

свободной ассоциативной алгебры $A_3 = K\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ над полем K характеристики 0 является диким.

В случае свободных метабелевых алгебр Ли M_n ранга n , $n \geq 2$, кроме ручных автоморфизмов выделяется естественная подгруппа $\text{Inn } M_n$ так называемых внутренних автоморфизмов, аналог сопряжений в группах. Автоморфизм $m \in \text{Inn } M_n$ задается как

$$m = m(u) = (x_1 + [x_1, u], x_2 + [x_2, u], \dots, x_n + [x_n, u]),$$

где $u \in M'_n$. В. А. Артамонов [25] доказал, что $\text{Aut } M_2 = \text{TAut } M_2 \cdot \text{Inn } M_2$. Легко видеть, что группа $\text{TAut } M_2$ изоморфна группе $GL_2(K)$, а любой автоморфизм $j \in \text{TAut } M_2$ взаимно однозначно соответствует невырожденной линейной замене $\{x_1, x_2\}$. Итак, $\text{Aut } M_2$ изоморфна $GL_2(K) \cdot (M_2, +)$ и очевидным образом содержит неручные автоморфизмы. Ю. А. Бахтурин и С. Набиев [27] установили подобным же образом наличие неручных автоморфизмов в группе $\text{Aut } M_n$ при любом $n \geq 3$.

Однако, по существу, внутренние автоморфизмы из $\text{Inn } M_n$ в силу их простоты следует также считать ручными. Если придерживаться этой точки зрения, то естественно возникает вопрос о наличии в группах $\text{Aut } M_n$, $n \geq 3$, автоморфизмов, не принадлежащих подгруппе, порожденной всеми ручными и всеми внутренними автоморфизмами. Назовем автоморфизмы вне указанной подгруппы строго неручными.

В. А. Романьков [38] доказал, что строго неручные автоморфизмы существуют в группе $\text{Aut } M_3$ при любом поле K . Он указал способ массового построения таких автоморфизмов. Кроме того, в работе [38] установлен ряд существенно более сильных утверждений, касающихся структуры группы $\text{Aut } M_3$. Из анонсированного В. А. Романьковым утверждения [16] о порождающих элементах группы $\text{Aut } M_n$, $n \geq 4$, следует, что при $n \geq 4$ строго неручных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли не существует.

В диссертации для свободной метабелевой алгебры Ли ранга 3 рассматривается подгруппа автоморфизмов, тождественных на линейной части. Устанавливается, что в этой подгруппе существуют строго неручные автоморфизмы. Доказывается, что в данной алгебре существует строго неручной примитивный элемент.

Скрученная сопряженность и ее классы эквивалентности в конечно порожденных нильпотентных алгебрах Ли является аналогом хорошо известного отношения в теории групп. Имеется целый ряд работ, в которых изучаются алгоритмические аспекты и структура классов сопряженных элементов (см., например, [7, 31, 32, 39, 42]).

В данной работе вычислено число Райдемайстера для произвольной пары эндоморфизмов конечно порожденной нильпотентной алгебры Ли над произвольным полем, допускающим эффективные вычисления.

Цель работы.

Основной целью настоящей диссертации является исследование вопроса о наличии в свободной метабелевой алгебре Ли ранга 3 над произвольным полем строго неручных примитивных элементов и исследование гиперцентрального ряда группы унитарных автоморфизмов для свободных метабелевых алгебр Ли произвольного ранга над произвольным полем. Кроме того, в работе исследуется проблема скрученной сопряженности и ее классы эквивалентности в конечно порожденных нильпотентных алгебрах Ли над полем, допускающим эффективные вычисления.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут найти применение в дальнейших исследованиях алгебр Ли.

Методы исследования.

Методы, используемые автором для доказательства результатов, опираются на теорию групп, линейную алгебру.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре кафедры алгебры Омского государственного университета, были представлены на Международной конференции по алгебре и математической логике "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2007 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах [45-48]. Работа [48] выполнена в нераздельном соавторстве с В. А. Романьковым.

Структура диссертации.

Диссертация содержит 59 страниц, состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка литературы, который включает 53 наименования.

Содержание диссертации

В первой главе приводятся основные определения и сведения, которые понадобятся в дальнейшем.

В первом параграфе первой главы приводятся необходимые сведения о метабелевых алгебрах Ли. Во втором параграфе вводятся понятия унитарных автоморфизмов, IA-автоморфизмов, внутренних, ручных и строго ручных автоморфизмов, понятие скрученной сопряженности элементов алгебры Ли относительно эндоморфизмов этой алгебры. В третьем параграфе дается определение гиперцентральной серии группы и точного представления группы матрицами над некоторым полем. В четвертом параграфе приводится понятие дифференцирований Фокса и их свойства.

Во второй главе доказывается, что группа унитарных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли ранга n над полем произвольной характеристики гиперцентральна длины $(n-2)w + n - 2$, и дается описание строения гиперцентральной серии.

Пусть M_n – свободная метабелева алгебра Ли над полем K произвольной характеристики с множеством свободных порождающих $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Будем считать, что на X_n определена линейная упорядоченность: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Хорошо известно, что базис метабелевой алгебры M_n состоит из всевозможных одночленов вида $[[\dots[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots], x_{i_k}]$.

Введем на алгебре M_n функцию $m : M_n \rightarrow \mathbb{Z}$, полагая $m(h) = i_1$ для базисного одночлена $h = [[\dots[x_{n-i_1}, x_{n-i_2}], \dots], x_{n-i_k}]$. Максимум μ -показателей одночленов, входящих в состав нормальной записи многочлена, будем называть μ -показателем этого многочлена.

Кроме того, введем функцию $l : M_n \rightarrow \mathbb{Z}$, положив для одночлена указанного вида $l(h) = i_1 + \dots + i_k$. Аналогично λ -

показателем многочлена будем называть максимум λ -показателей его одночленов, а λ_k -показателем – максимум λ -показателей одночленов, для которых μ -показатель равен k .

Выделим в группе U_n следующие подгруппы:

$$Z_1 = \{j = (x_1 + f_1, x_2, \dots, x_n) \mid m(f_1) \leq 1, l(f_1) \leq 1, m(l(f_1)) = 0\},$$

$$Z_a = \{j = (x_1 + f_1, x_2, \dots, x_n) \mid m(f_1) \leq 1, l(f_1) \leq a\}, \quad 1 < a < w,$$

$$Z_w = \{j = (x_1 + f_1, x_2, \dots, x_n) \mid m(f_1) \leq 1\},$$

$$Z_{(k-1)w} = \{j = (x_1 + f_1, \dots, x_{k-1} + f_{k-1}, x_k, \dots, x_n) \mid m(f_i) \leq k-i, l(f_j) = 0, \\ 1 \leq i \leq k-1, j > 1\}, \quad 1 < k \leq n-2,$$

$$Z_{(k-1)w+a} = \{j = (x_1 + f_1, \dots, x_k + f_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid m(f_i) \leq k-i+1, \\ l_{k-i+1}(f_i) \leq k-i+a, l(f_j) = 0, 1 \leq i \leq k-1, j > 1\}, \quad 1 < k \leq n-2,$$

$$Z_{(n-2)w} = \{j = (x_1 + f_1, \dots, x_{n-2} + f_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mid l(f_j) = 0, j > 1\},$$

$$Z_{(n-2)w+a} = \{j = (x_1 + f_1, \dots, x_{n-2} + f_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \mid m(l(f_i)) \leq a+1-i, l(f_j) = 0, \\ 1 < i < a+2, j \geq a+2\}, \quad 1 \leq a \leq n-2,$$

где f_i – произвольные многочлены алгебры M_n от указанных переменных.

Теорема 1. При $n \geq 3$ группа унитарных автоморфизмов U_n свободной метабелевой алгебры Ли гиперцентральна длины $(n-2)w + n-2$, и члены ее гиперцентрального ряда $\zeta_\alpha(U_n)$ совпадают с подгруппами Z_α , $1 \leq \alpha \leq (n-2)w + n-2$.

В первом параграфе второй главы приводится доказательство утверждения этой теоремы в случае $\alpha = 1$. Во втором параграфе утверждение теоремы доказывается для всех остальных α . В третьем параграфе как следствие теоремы 1 доказывается

Теорема 2. При $n \geq 4$ группа унитарных автоморфизмов U_n свободной метабелевой алгебры Ли не представима матрицами ни над каким полем.

В третьей главе исследуется вопрос о строго неручных примитивных элементах свободной метабелевой алгебры Ли ранга 3.

Рассматриваются IA-автоморфизмы (автоморфизмы, тождественные на линейной части) свободной метабелевой алгебры M_3 ранга 3, т. е. автоморфизмы, индуцирующие тождественное отображение на алгебре M_3 / M'_3 , где $M'_3 = [M_3, M_3]$.

В первом параграфе рассматриваются IA-эндоморфизмы и их матрицы Якоби. Во втором параграфе доказываются вспомогательные леммы о соотношениях между IA-автоморфизмами и матрицами, полученными из их матриц Якоби.

В третьем параграфе доказывается, что в $\text{IAut } M_3$ существуют строго неручные автоморфизмы. Доказывается

Теорема 3. Пусть $j \in \text{IAut } M_3$ – неручной автоморфизм. Тогда элемент $g = j(x_3) \in M_3$ – примитивный строго неручной.

В четвертой главе исследуется проблема скрученной сопряженности и ее классы эквивалентности в конечно порожденных нильпотентных алгебрах Ли над полем, допускающим эффективные вычисления. Последнее подразумевает алгоритмическую разрешимость систем линейных уравнений над полем, в частности – вычисление базиса подпространства, порожденного данной системой элементов.

Пусть L – алгебра Ли над произвольным полем. Говорят, что элементы $f, g \in L$ скрученно сопряжены относительно эндоморфизмов $j, y \in \text{End } L$, если существует такой элемент $x \in L$, что $j(x) + f = y(x) + g$.

Скрученная сопряженность является отношением эквивалентности. Через $R(j, y)$ обозначим число классов j, y – эквивалентности, называемое числом Райдемайстера.

В первом параграфе доказывается

Теорема 4. Пусть N – линейное пространство конечной размерности k над полем F , допускающим эффективные вычисления. Тогда в случае бесконечного поля F число классов эквивалентности $R(j, y)$ для произвольной пары эндоморфизмов $j, y \in \text{End } N$ равно 1, либо ∞ . В случае, если $|F| = p^r$, p – простое число, число $R(j, y)$ равно $p^{k(r-s)}$, где s – размерность образа $\text{Im}(j - y)$ разности эндоморфизмов $j - y$. В данном случае классы j, y – эквивалентности совпадают со смежными классами пространства N по образу $\text{Im}(j - y)$.

Во втором параграфе доказывается аналогичная теорема для произвольного случая:

Теорема 5. Пусть N – произвольная конечно порожденная нильпотентная алгебра Ли над полем F , допускающим эффективные вычисления. Тогда в случае бесконечного поля F число классов эквивалентности $R(j, y)$ для произвольной пары эндоморфизмов $j, y \in \text{End } N$ равно 1 либо ∞ . В случае, если $|F| = p^r$, p – простое число, число $R(j, y)$ равно $p^{k(r-s)}$, где k – размерность алгебры N , s – размерность образа $\text{Im}(j - y)$ разности эндоморфизмов $j - y$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В. А. Романькову за постановку задач, внимание к работе и постоянную и разностороннюю помощь в ходе подготовки диссертации.

Список литературы

1. Артамонов В. А. Проективные метабелевы алгебры Ли конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, т. 36, с. 510-522.
2. Бахтурин Ю. А. Два замечания о многообразиях алгебр Ли // Матем. заметки, 1968, т. 4, № 4, с. 387-398.
3. Бахтурин Ю. А. О тождествах в алгебрах Ли, I // Вестник МГУ: Матем., мех., 1973, № 1, с. 12-18.
4. Бахтурин Ю. А. О тождествах в алгебрах Ли, II // Вестник МГУ: Матем., мех., 1973, № 2, с. 26-33.
5. Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. – М.: Наука, 1985.
6. Бокуть Л. А. База свободных полинильпотентных алгебр Ли // Алгебра и логика, 1963, т. 2, № 4, с. 13-20.
7. Вентура Э., Романьков В.А. Проблема скрученной сопряженности в метабелевых группах // Алгебра и логика, т. 48, № 2, с. 157-173.
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964.
9. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука. 1973 г.
10. Кострикин А. И. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля // ИАН СССР: Сер. матем., 1957, т. 21, с. 515-540.
11. Кострикин А. И. О проблеме Бернсайда. // ИАН СССР: Сер. матем., 1959, т. 23, с. 3-34.

12. Кострикин А. И. О связи между периодическими группами и кольцами Ли // ИАН СССР: Сер. матем., 1957, т. 21, с. 289-310.
13. Латышев В. Н. Алгебры с тождественными определяющими соотношениями // Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, с. 821-829.
14. Латышев В. Н. Два замечания о PI -алгебрах // Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, с. 1120-1121.
15. Парфенов В. А. О многообразиях Ли // Алгебра и логика, 1967, т. 6, № 4, с. 61-73.
16. Романьков В. А. Группы автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли // Междунар. конф. "Алгебра и ее приложения": Тез. докл. Красноярск, 12-18 авг. 2007 г. Сиб. фед. ун-т. Новосибирск: ИМ СОРАН, ИВМ СОРАН, 2007, с. 114-115.
17. Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А. Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. мат. ж. 2004, т. 45, № 5, с. 1184-1188.
18. Сосновский Ю. В. Описание гиперцентрального строения группы унитарных автоморфизмов алгебры многочленов // Сиб. мат. ж. 2007, т. 48, № 3, с. 689-693.
19. Умирбаев У. У., Шестаков И. П. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН, 2002, т. 386, № 6, с. 745-748.
20. Шеина Г. В. Многообразия метабелевых A -алгебр Ли, II // Вестник МГУ: Матем., мех., 1978, № 3, с. 52-59.
21. Шмелькин А. Л. Свободные полинильпотентные группы // ИАН СССР: Сер. матем., 1964, т. 28, с. 91-122.
22. Ширшов А. И. О базах свободных алгебр Ли // Алгебра и логика, 1962, т. 1, № 1, с. 14-19.
23. Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли // Матем. сб., 1958, т. 45, с. 113-122.
24. Ширшов А. И. Подалгебры свободных алгебр Ли // Матем. сб., 1953, т. 33, с. 441-452.
25. Artamonov V. A. The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Carolin, 1977, v. 18, № 1, p. 142-159.
26. Bahturin Y. On identical relations in free polynilpotent Lie algebras // J. London. Math. Soc., 1980, v. 20, p. 39-52.

27. Bahturin Y. A., Nabijev S. Automorphisms and derivations of Abelian Extensions of some Lie algebras // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1992, v. 62, p. 43-57
28. Cohn P. M. A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group // Proc. Cambridge Phil. Soc.: Math. and Phys. Sci., 1955, v. 51, № 3, p. 401-405.
29. Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc., 1964, v. 56, p. 618-632.
30. Czerniakiewicz A. G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II // Trans. Amer. Math. Soc., 1971, v. 160, p. 393-401; 1972, v. 171, p. 309-315.
31. Fel'shtyn A., Gonçalves D., Wong P. Twisted conjugacy classes for polyfree groups // arXiv:0802.2937v2 [math.GR], 2008.
32. Gonçalves D., Wong P. Twisted conjugacy classes in exponential growth groups // Bull. London Math. Soc. 2003. v. 35. № 2. P. 261–268.
33. Higgins P. J. Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambridge Phil. Soc.: Math. and Phys. Sci., 1954, v. 50, p. 8-15.
34. Jung H. W. E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math., 1942, Bd 184, S. 161-174.
35. Kulk, W. van der. On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wiscd. (5), 1953, Bd 3, № 1, S. 33-41.
36. Makar-Limanov L. The automorphisms of the free algebra of two generators // Funct. Anal. Appl., 1970, v. 4, № 3, p. 262-263.
37. Nagata M. On the automorphism group of $k[x, y]$ // Kinokuniya, Tokio, Kyoto Univ., 1972 (Lect. in Math.)
38. Roman'kov V. On the automorphism group of a free metabelian Lie algebra // Int. J. Algebra Comput., 2008, v. 18, № 2, p. 209-226.
39. Romankov V., Ventura E. Twisted conjugacy in nilpotent groups // В печати.
40. Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2003, v. 100, № 22, p. 12561-12563.
41. Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The tame and the wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc., 2004, № 17, p. 197-227.

42. Taback J., Wong P. The geometry of twisted conjugacy classes in wreath products // arXiv:0805.1371v2 [math.GR], 2008
43. Umirbaev U. U. Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras // Bonn, 2004. (Preprint of Max-Planck Institute fur Mathematik, MPIM: № 108).
44. Vaughan-Lee M. R. Varieties of Lie algebras // Quart. J. Math., 1970, v. 21, p. 297-308.

Работы автора по теме диссертации

45. Кабанов А. Н. Гиперцентральная структура группы унитарных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Вестник Омского университета, 2006, № 4, с. 13-14.
46. Кабанов А. Н. Гиперцентральная структура группы унитарных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Сиб. мат. ж., 2009, т. 50, № 2, с. 329-333.
47. Кабанов А. Н. О скрученной сопряженности элементов нильпотентной алгебры Ли // Вестник Омского университета, 2009, № 2, с. 43-45.
48. Кабанов А. Н., Романьков В. А. Строго неручные примитивные элементы свободной метабелевой алгебры Ли ранга 3 // Сиб. мат. ж., 2009, т. 50, № 1, с. 82-95.