

На правах рукописи

Гаврюшкина Александра Анатольевна

**АВТОМАТНЫЕ И ВЫЧИСЛИМЫЕ
УПОРЯДОЧИВАЕМЫЕ МНОЖЕСТВА**

01.01.06 — математическая логика,

алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск–2010

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН
Гончаров Сергей Савостьянович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Алаев Павел Евгеньевич

доктор физико-математических наук, профессор
Добрица Вячеслав Порфирьевич

Ведущая организация:
Иркутский государственный университет

Защита диссертации состоится 18 июня 2010 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «17» мая 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Тематика диссертации. Диссертация посвящена исследованию некоторых теоретико-модельных и алгоритмических свойств автоматных и разрешимых упорядочиваемых множеств.

В 50-е годы прошлого столетия в работах А. Фрелиха, Д. Шефердсона, А. И. Мальцева, М. О. Рабина, Р. Воота и других появилось понятие вычислимой или конструктивной модели, то есть модели, основное множество, все отношения и функции которой могут быть заданы алгоритмически. В связи с богатством и сложностью класса вычислимых моделей возникло стремление выделить подкласс моделей, являющихся простейшими с алгоритмической точки зрения. Одним из таких классов был, предложенный А. Нероудом и Дж. Б. Реммелем, класс p -структур, то есть моделей которые могут быть заданы алгоритмами с полиномиальной сложностью [21]. Но вскоре выяснилось, что любая вычислимая модель в предикатной сигнатуре вычислимо изоморфна p -структуре [7] и, следовательно, желаемого упрощения такое ограничение не дает. Следующим претендентом на роль простейшего стал класс автоматных структур, то есть структур, задаваемых с помощью элементарных устройств — конечных автоматов. Одной из причин выбора именно этого класса является разрешимость элементарной теории автоматных структур [10, 13].

Упоминания такого рода моделей впервые появились в работах Дж. Р. Бюхи и М. О. Рабина [5, 6, 23, 24]. С выходом статьи А. Нероуда и Б. Хусаинова [13], в которой было вновь введено понятие автоматной структуры и были предложены направления исследований в этой области, автоматные структуры подверглись активному изучению.

Дадим более точное определение автоматной структуры. Автоматная структура — это структура в конечной предикатной сигнатуре, основное множество и все отношения ко-

торой распознаются конечными автоматами. Остается не ясным, что подразумевается под словами «отношение распознаётся конечным автоматом», так как отношения в таком случае состоят из n -ок слов. Рассмотрим n -ку слов некоторого алфавита Σ , запишем слова этой n -ки одно под другим и выравним слева. Далее выравним длины слов в этой n -ке добавлением к правым концам слов минимального количества символов $\perp$, где $\perp \notin \Sigma$. Прделав такую процедуру с каждым словом из отношения, мы получим некоторый язык (конволюцию отношения), состоящий из n -мерных слов, записанных в алфавите $(\Sigma \cup \{\perp\})^n$. Будем говорить, что отношение распознаётся автоматом, если полученный язык распознаётся некоторым конечным автоматом, переходы в котором осуществляются по n -мерным буквам.

Очевидно, что любая конечная модель является автоматной, примерами бесконечных структур, обладающих автоматным представлением, могут служить: $(\mathbb{N}, \leq, +)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, полное бинарное дерево. В то время как такие модели как $(\mathbb{N}, \times)$ [4], $(\mathbb{Q}, +)$ [28], безатомная булева алгебра [15, 26], автоматными не являются.

Как уже говорилось выше, теория первого порядка автоматных структур разрешима, более того, она разрешима в некоторых кванторных расширениях. Рассмотрим квантор $\exists^\infty$, трактуемый как «существует бесконечно много», и кванторы $\exists^{(k,m)}$, обозначающие «существует k по модулю m много», тогда теория первого порядка в языке, расширенном квантором $\exists^\infty$ и кванторами $\exists^{(k,m)}$, автоматных структур является разрешимой [4, 17, 26]. Следствием этого является замкнутость класса автоматных структур относительно естественных операций, таких как объединение, декартово произведение, взятие фактора и других, и разрешимость многих свойств автоматных структурах, так, например, проблема существования бесконечной клики в автоматном графе является разрешимой [27].

Центральными проблемами в теории автоматных структур являются: характеристика подклассов автоматных структур, таких как отношения эквивалентности, линейные, частичные порядки, графы, булевы алгебры, группы и другие; исследование теоретико-модельных свойств автоматных структур; проблемы, связанные с алгоритмической сложностью автоматных структур, такие как сложность проблемы изоморфизма для автоматных структур и подклассов автоматных структур, проблема автоустойчивости автоматных структур, оценка индексных множеств различных подклассов автоматных структур.

Типы изоморфизма некоторых подклассов автоматных структур полностью описаны, так, например, было показано, что автоматными ординалами являются в точности те ординалы, которые строго меньше ω^ω [8]. Бесконечная булева алгебра является автоматной тогда и только тогда, когда она является конечным декартовым произведением алгебр конечных и коконечных подмножеств натуральных чисел [15, 26]. Конечно порождённая группа является автоматной в том и только в том случае, когда она является виртуально абелевой [22]. Для линейных порядков, как и для отношений эквивалентности, полной характеристики не было получено, но для автоматных линейных порядков доказано, что они обладают конечным FC -рангом [16].

Мерой сложности типа изоморфизма модели является её ранг Скотта, Б. Хусаинов и М. Миннес доказали, что для любого $\alpha \leq \omega_1^{CK} + 1$ существует автоматная структура, ранг Скотта которой равен α [11, 12, 20]. Таким образом, исходя из того факта, что вычислимые структуры обладают рангом Скотта, не превосходящим $\omega_1^{CK} + 1$, получается, что автоматные структуры устроены настолько сложно, насколько это могло быть возможно.

Теоретико-модельные свойства автоматных структур довольно слабо изучены, хотя существует ряд работ, посвящён-

ных этим вопросам [4, 18].

В [15, 26] доказана Σ_1^1 -полнота проблемы изоморфизма для класса всех автоматных структур. Проблема изоморфизма автоматных ординалов и булевых алгебр является разрешимой [15, 16, 26]. Недавний ещё неопубликованный результат Д. Куске М. Лори и Дж. Лю говорит о том, что проблема изоморфизма для отношений эквивалентности является Π_1^0 -полной, а для линейных порядков не является арифметической [19].

В работе [1] приведены оценки индексных множеств для некоторых подклассов автоматных структур.

Понятие автоустойчивости появилось в работах А. И. Мальцева [3]. Если любые два вычислимых представления модели вычислимо изоморфны, то такая модель называется автоустойчивой. Для автоустойчивой модели все разрешимые свойства в одном её вычислимом представлении остаются разрешимыми и во всех других её вычислимых представлениях. То есть, можно сказать, что автоустойчивые модели обладают единственным вычислимым представлением. Исследование автоустойчивости моделей и более общего понятия алгоритмической размерности моделей было продолжено С. С. Гончаровым, А. Т. Нуртазиным, Дж. Б. Реммелем, Б. Хусаиновым, Р. Шором и другими известными математиками. В диссертации изучается вопрос автоустойчивости моделей относительно автоматных представлений, то есть вопрос существования вычислимого изоморфизма между любыми двумя автоматными представлениями модели.

Из упомянутых фактов следует, что класс всех автоматных структур является довольно сложным, хотя для некоторых подклассов сформулированные проблемы являются разрешимыми. Таким образом, настоящая задача состоит в исследовании описанных проблем для подклассов автоматных структур.

Сводка результатов, открытые вопросы и направления для дальнейших исследований в теории автоматных структур сформулированы в обзорных статьях Б. Хусаинова и А. Нероуда [14] и С. Рубина [27].

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации.

1. Опровергнута гипотеза о том, что линейные порядки разрешимые в расширенном квантором $\exists^\infty$ языке являются автоматными. Доказано, что любой автоматный линейный порядок формульно определим в подходящем автоматном линейном порядке FC -ранга 1.
2. Доказана автоустойчивость отношений эквивалентности, ординалов и некоторого подкласса линейных порядков относительно автоматных представлений. Изучена связь между автоустойчивостью линейных порядков в классе автоматных представлений и в классе разрешимых представлений.
3. Показано, что автоматные частичные порядки могут обладать сколь угодно высоким рангом Скотта.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях теории автоматных структур.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны: доклад на конференции «Мальцевские чтения 2005» (Новосибирск, Россия), доклад на «Международной студенческой конференции 2006» (Новосибирск, Россия), доклады на конференциях «Logic Colloquium 2007» (Вроцлав, Польша), «Logic Colloquium 2009» (София, Болгария). Кроме того, результаты докладывались на семинаре НГУ

«Конструктивные модели», на совместном семинаре ИМ СО РАН – The University of Notre Dame «Constructive models» (Новосибирск, Россия), на школе-семинаре ИМ СО РАН «Workshop on Computable Models and Numberings» (Новосибирск, Россия), а также на логических семинарах университетов The University of Notre Dame (Нотр-Дам, США), Cornell University (Итака, США), The City University of New York (Нью-Йорк, США).

Публикации. Основные результаты изложены в работах [29]–[31], опубликованных в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, и в работах [32]–[34].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы (50 наименования). Объём диссертации 73 стр.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении представлен обзор исследований в области автоматных структур и мотивация к изучению вопросов исследуемых в диссертации.

В первой главе вводятся определения автоматной и разрешимой моделей и представлены необходимые сведения из теории автоматных структур.

Вторая глава посвящена линейным порядкам. В ней представлены классические сведения о линейных порядках, такие как определения рангов, характеристика линейных порядков.

Рассмотрим линейный порядок $\mathcal{L}$ и введём на нем отношение эквивалентности, при котором элементы эквивалентны, если между ними лишь конечное число элементов. Профакторизовав этот линейный порядок по введённому отношению эквивалентности, сохраняя исходное упорядочение, мы вновь получаем линейный порядок. Мы можем продолжить эту процедуру конденсирования по всем счётным ординалам.

FC -ранг линейного порядка — это наименьший ординал α , такой, что после конденсирования α раз мы получаем плотный линейный порядок или линейный порядок, состоящий из одного элемента. Как мы уже говорили, в [15] доказано, что FC -ранг любого автоматного линейного порядка конечен. В разделе 2.3 формулируется и доказывается, что в некотором смысле можно рассматривать лишь автоматные линейные порядки ранга 1.

Теорема 1. *Любой автоматный линейный порядок определим в подходящем автоматном линейном порядке FC -ранга 1.*

Эта теорема является следствием замкнутости класса автоматных структур относительно декартова произведения и определимости.

В связи с разрешимостью теории автоматных структур в расширенном кванторе $\exists^\infty$ языке возникает предположение, что обратное утверждение тоже верно. В разделе 2.4 это предположение опровергнуто.

Теорема 2. *Существует линейный порядок, являющийся разрешимым в расширенном кванторе $\exists^\infty$ языке, но не являющийся автоматным.*

Доказательство этой теоремы основано на лемме о накачке, за счёт которой локально конечные отношения (функции в более общем смысле, то есть отношения, в которых каждый элемент связан этим отношением лишь с конечным числом элементов) в автоматных структурах имеют ограниченный рост (см. [26]).

В заключении второй главы приводятся некоторые примеры автоматных линейных порядков, которые дают некоторое представление о нетривиальности класса автоматных линейных порядков.

Третья глава посвящена автоустойчивости в классе автоматных структур и в классе разрешимых структур. Пусть $\mathcal{C}$ — класс моделей, обладающих определёнными алгоритмическими свойствами, назовём $\mathcal{C}$ -представлением модели $\mathcal{A}$ модель $\mathcal{B}$, принадлежащую классу $\mathcal{C}$, такую, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Таким образом, если взять в качестве класса $\mathcal{C}$ класс автоматных моделей, то $\mathcal{C}$ -представление есть в точности автоматное представление модели. Будем говорить, что модель автоустойчива в классе $\mathcal{C}$ -представлений, если любые два её $\mathcal{C}$ -представления вычислимо изоморфны. В разделе 3.1 доказана теорема:

Теорема 3. *Отношения эквивалентности автоустойчивы в классе автоматных представлений.*

В разделе 3.2 речь идет об автоустойчивости линейных порядков в различных классах. Доказана теорема:

Теорема 4. *Ординалы автоустойчивы в классе автоматных представлений.*

Будем называть линейный порядок *разреженным*, если он не содержит плотных подпорядков. Любой счётный линейный порядок может быть представлен как плотная сумма разреженных линейных порядков [25]. Таким образом, первым шагом в изучении автоустойчивости линейных порядков является изучение разреженных линейных порядков.

Теорема 5. *Разреженные линейные порядки FC -ранга, не превосходящего 2, автоустойчивы в классе автоматных представлений.*

В заключении раздела 3.2 доказывается, что класс автоустойчивых в классе автоматных представлений линейных порядков не совпадает с классом автоустойчивых в классе разрешимых представлений линейных порядков.

Теорема 6. *Существует линейный порядок автоустойчивый в классе автоматных представлений, но не автоустойчивый в классе разрешимых представлений.*

Теорема 7. *Существует линейный порядок являющийся автоустойчивым в классе разрешимых представлений, но не являющийся автоматным.*

В 4 главе доказывается, что автоматные частичные порядки могут обладать сколь угодно высоким рангом Скотта.

Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ кортежи из $\mathcal{A}$. Будем говорить, что $\bar{x}$ 0-эквивалентен $\bar{y}$ в $\mathcal{A}$ (обозначим через $\bar{x} \equiv_{\mathcal{A}}^0 \bar{y}$), если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам в $\mathcal{A}$. И для $\alpha > 0$ будем говорить, что $\bar{x}$ α -эквивалентен $\bar{y}$ в $\mathcal{A}$ ($\bar{x} \equiv_{\mathcal{A}}^{\alpha} \bar{y}$), если для любого $\beta < \alpha$, для любого кортежа $\bar{u}$ существует кортеж $\bar{v}$ и для любого $\bar{v}$ существует $\bar{u}$ такие, что $\bar{x}, \bar{u} \equiv_{\mathcal{A}}^{\beta} \bar{y}, \bar{v}$.

Рангом Скотта кортежа $\bar{x}$ в $\mathcal{A}$ называется наименьший ординал β , такой, что для любого $\bar{y}$ из того, что $\bar{x} \equiv_{\mathcal{A}}^{\beta} \bar{y}$, следует, что $(\mathcal{A}, \bar{x}) \cong (\mathcal{A}, \bar{y})$. И *ранг Скотта модели $\mathcal{A}$* — это наименьший ординал α , превосходящий ранги всех кортежей из $\mathcal{A}$.

Ранг Скотта автоматных структур может принимать любое значение меньше либо равное $\omega_1^{CK} + 1$ [11, 12]. Используя конструкцию С. С. Гончарова сведения произвольной предикатной сигнатуры к частичному порядку [2, 9], может быть доказана следующая теорема:

Теорема 8. *Для любого ординала $\alpha < \omega_1^{CK} + 1$ существует автоматный частичный порядок, обладающий рангом Скотта равным α или $\alpha + 1$.*

В заключение автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю Сергею Савостьяновичу Гончарову, за постановку интересных задач, всестороннюю поддержку и внимание в течение всей работы.

Список литературы

- [1] Н. С. Винокуров. Индексные множества классов автоматных структур. *Сибирский математический журнал*, том 47(5), стр. 1019–1030, 2006.
- [2] С. С. Гончаров. Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций. *Алгебра и логика*, том 19(6), стр. 23–44, 1980.
- [3] А. И. Мальцев. О рекурсивных абелевых группах. *Доклады АН СССР*, 146(5), стр. 1009–1012, 1962.
- [4] A. Blumensath. Automatic Structures. Diploma thesis. RWTH Aachen, 1999.
- [5] J. R. Büchi. On a decision method in restricted second order arithmetic. *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 International Congress)*, pp. 1–11, 1962.
- [6] J. R. Büchi, L. H. Landweber. Definability in the monadic second-order theory of successor. *Journal of Symbolic Logic*, 34(2):166–170, 1969.
- [7] D. Cenzer and J. B. Remmel. Polynomial-time versus recursive models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 54:17–58, 1991.
- [8] C. Delhomme. Non-automaticity of ω^ω . 2001, unpublished.
- [9] S. S. Goncharov. Isomorphism and Definable Relations on Computable Models. *Lecture Notes in Logic (Logic Colloquium '05)*, 28, pp. 26–45, 2006.
- [10] B. R. Hodgson, Théories décidables par automate fini. PhD thesis, University of Montréal, 1976.

- [11] B. Khoussainov, M. Minnes. Model Theoretic Complexity of Automatic Structures. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4978, pp. 514–525, 2008.
- [12] B. Khoussainov, M. Minnes. Model Theoretic Complexity of Automatic Structures. *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 161, pp. 416–426, 2009.
- [13] B. Khoussainov, A. Nerode. Automatic presentations of structures. *Lecture Notes in Computer Science*, 960:367–392, 1995.
- [14] B. Khoussainov, A. Nerode. Open Questions in the Theory of Automatic Structures. *Bulleten of EATCS*, 94, pp. 181–204, 2008.
- [15] B. Khoussainov, A. Nies, S. Rubin, and F. Stephan. Automatic structures: Richness and limitations. *Proceedings of 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 44–53, 2004.
- [16] B. Khoussainov, S. Rubin, F. Stephan. Automatic Linear Orders and Trees. *ACM Transactions on Computational Logic*, 6(4), pp. 675–700, 2005.
- [17] B. Khoussainov, S. Rubin, F. Stephan. Definability and Regularity in automatic structures. *In STACS 2004, LNSC* vol. 2996, pp. 440–451, 2004.
- [18] D. Kuske. Is Cantor’s Theorem Automatic? *Proceedings of the 10th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning (LPAR)*, 2850, pp. 332–345, 2003.
- [19] D. Kuske, J. Liu, M. Lohrey. The Isomorphism Problem On Classes of Automatic Structures, manuscript.

- [20] M. Minnes PhD Thesis, Cornell University, 2008.
- [21] A. Nerode and J. B. Remmel. Polynomial time equivalence types. *In Logic and Computation, Proceedings of a Workshop held at Carnegie Mellon University 1987*, vol. 106, pp. 221–249, 1990.
- [22] G. Oliver and R. Thomas. Automatic presentations of finitely generated groups. *Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, LNCS*, vol. 3404, pp. 693–704, 2005.
- [23] M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Transactions of the American Mathematical Society*, 141:1–35, 1969.
- [24] M. O. Rabin, D. Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM Journal of Research and Development*, 3:114–125, 1959.
- [25] J. G. Rosenstein. Linear Orderings. Academic Press, 1982.
- [26] S. Rubin. Automatic Structures. PhD thesis, The University of Auckland, 2004.
- [27] S. Rubin. Automata presenting structures: A survey of the finite string case. *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 14, issue 2, pp. 169–200, 2008.
- [28] T. Tsankov. The additive group of rationals does not have an automatic presentation. <http://arxiv.org/abs/0905.1505>

Работы автора по теме диссертации

- [29] А. А. Ревенко. Автоустойчивость автоматных представлений ординалов и линейных порядков низкого ранга. *Вестник НГУ*, серия: Математика, механика, информатика, том 8, вып. 4, стр. 76–88, 2008.
- [30] А. А. Гаврюшкина. Ранг Скотта автоматных частичных порядков. *Вестник НГУ*, серия: Математика, механика, информатика, том 10, вып. 2, стр. 37–44, 2010.
- [31] А. А. Гаврюшкина. Об автоматных и разрешимых линейных порядках. *Сибирские электронные математические известия*, <http://semr.math.nsc.ru>, том 7, стр. 100–110, 2010.
- [32] А. А. Ревенко. Изоморфизм автоматных представлений полных порядков. *Материалы XLIV МНСК*, серия Математика, стр. 79, 2006.
- [33] A. Revenko. Automatic linear orders, *Logic Colloquium 2007*, Book of Abstracts, p. 68, 2007.
- [34] A. Revenko. The Complexity of Automatic Partial Orders, *Logic Colloquium 2009*, Abstracts, p. 79, 2009.

Гаврюшкина Александра Анатольевна

**АВТОМАТНЫЕ И ВЫЧИСЛИМЫЕ
УПОРЯДОЧИВАЕМЫЕ МНОЖЕСТВА**

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.04.10

Печать офсетная

Заказ №

Формат 60 x 84 1/16

Усл. печ. л. 1.0

Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул.Пирогова 2