На правах рукописи

ГАЛЬТ Алексей Альбертович

ВОПРОСЫ СОПРЯЖЕННОСТИ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2010

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Вдовин Евгений Петрович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Созутов Анатолий Ильич

кандидат физико-математических наук
Лыткина Дарья Викторовна

Ведущая организация:

Ярославский государственный университет

Защита состоится « 17 » сентября 2010 г. в « 15 » ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» августа 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

После объявления о завершении классификации конечных простых групп одной из основных задач в теории конечных групп стала задача изучения различных свойств известных конечных простых групп. Основной массив конечных простых групп составляют конечные группы лиева типа, которые делятся на 16 классов. Шесть классов составляют, так называемые, классические группы, и десять — исключительные. Изучению вопросов сопряженности, являющихся центральными в теории конечных групп и приложениях, в конечных группах лиева типа посвящена данная работа.

Подгрупповому строению конечных групп лиева типа посвящено множество работ различных отечественных и зарубежных авторов. Одними из важнейших подгрупп в конечных группах лиева типа являются редуктивные подгруппы максимального ранга. Они возникают естественным образом как централизаторы полупростых элементов и факторы Леви параболических подгрупп, а также как подгруппы, содержащие максимальный тор. Кроме того, редуктивные подгруппы максимального ранга играют важнейшую роль в индуктивном изучении подгруппового строения конечных групп лиева типа. Однако некоторые вопросы о внутреннем строении редуктивных подгрупп максимального ранга до сих пор остаются открытыми. В частности, известно, какие квазипростые группы могут возникнуть как центральные множители полупростой части произвольной редуктивной подгруппы максимального ранга, но неизвестно, каким образом устроены нормализаторы этих квазипростых групп. Решению этой проблемы посвящена первая часть диссертации.

Одним из важнейших вопросов в теории групп является вопрос о сопряженности элемента со своим обратным. Напомним, что элемент x группы G называется *вещественным* (соответственно, *строго вещественным*), если элементы x и x^{-1} сопряжены в группе G (соответственно, сопряжены инволюцией в группе G). Данный термин связан с тем, что значения обыкновенных характеров на вещественных элементах, очевидно, являются вещественными. Группа G называется *вещественной* (соответственно, *строго вещественной*), если все элементы группы G являются вещественными (соответственно, строго вещественными). Проблема вещественности и строгой вещественности конечных простых групп и конечных групп в том или ином смысле близких к простым изучалась различными авторами, см. [1, 5, 14, 16–18, 20–22, 26–28]. Отметим, что если элемент x является вещественным, то порядок элемента, инвертирующего x, всегда можно выбрать равным степени двойки. Поэтому инволюция является неединичным элементом минимально возможного порядка, инвертирующим x.

В 2005 году А.И. Созутовым в «Коуровскую тетрадь» под номером 14.82 была записана известная проблема.

Проблема. [3, 14.82]. Описать конечные простые группы, в которых каждый элемент является произведением двух инволюций.

Поскольку в любой неабелевой конечной простой группе любая инволюция вкладывается в элементарную абелеву группу порядка 4, проблема 14.82 эквивалентна проблеме классификации конечных простых строго вещественных групп.

В 2005 году Тьепом и Залесским в [26] была получена классификация конечных квазипростых вещественных групп. В частности, описаны все конечные простые вещественные группы. Таким образом, для решения вопроса 14.82 достаточно выяснить какие из конечных простых вещественных групп являются строго вещественными. Вопрос о строгой вещественности знакопеременных групп решен в [5]. Спорадические строго вещественные группы описаны в [21]. В работах [14,17,18] доказано, что симплектические группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ являются строго вещественными тогда и только тогда, когда $q \not\equiv 3 \pmod 4$. В [22] доказана строгая вещественность групп $\Omega^{\varepsilon}_{4n}(q)$ при четном q и $\varepsilon \in \{+,-\}$. В случае нечетного q из [20, Теорема 8.5] можно понять, что строго вещественными являются группы $\mathrm{P}\Omega^{+}_{4n}(q)$ и $\Omega_{2n+1}(q)$ при $q \equiv 1 \pmod 4$; $\mathrm{P}\Omega^{-}_{4n}(q)$ при любом нечетном q, а также группы $\Omega_9(q)$ и $\mathrm{P}\Omega^{+}_{8}(q)$ при $q \equiv 3 \pmod 4$. Во второй части данной работы завершается описание конечных простых строго вещественных групп.

Основные результаты диссертации.

Теорема 1. *Пусть $G = \overline{G}_\sigma$ — конечная универсальная группа лиева типа, где $\overline{G}$ — простая односвязная линейная алгебраическая группа и σ — автоморфизм Фробениуса. Пусть R — редуктивная подгруппа максимального ранга группы G, $L \leq R$ — подсистемная подгруппа группы G. Обозначим через Φ и Ψ корневые системы групп $\overline{G}$ и $\overline{L}$ соответственно. Пусть $\varepsilon = +$, если L — расщепленная группа и $\varepsilon = -$, если*

L одна из групп ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_6(q^2)$. Обозначим через q порядок базового поля подгруппы L (он может быть больше порядка базового поля группы G).

Тогда справедливо одно из следующих утверждений.

(1) $\Phi = B_{2n}$, $\Psi = A_{2n-1}$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (n, q-\varepsilon 1)$. *Подразумевается, что в корневой системе B_n подсистема A_1 порождается длинным корнем, а подсистема B_1 порождается коротким корнем.*

(2) $\Phi = B_n$, $\Psi = D_n$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$.

(3) $\Phi = B_n$, $\Psi = D_k$, $3 \leq k < n$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$. *Подразумевается, что подсистемы D_3 и A_3 в корневой системе B_n, с точностью до действия группы Вейля порождаются корнями $r_1, r_2, -r_0$ и r_1, r_2, r_3 соответственно.*

(4) $\Phi = C_n$, $\Psi = C_k$, $1 \leq k < n$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$. *Подразумевается, что в корневой системе C_n подсистема A_1 порождается коротким корнем, а подсистема C_1 порождается длинным корнем.*

(5) $\Phi = D_{2n}$, $\Psi = A_{2n-1}$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (n, q-\varepsilon 1)$.

(6) $\Phi = D_n$, $\Psi = D_k$, $3 \leq k < n$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$. *Подразумевается, что подсистемы D_3 и A_3 в корневой системе D_n, с точностью до действия группы Вейля порождаются корнями $r_1, r_2, -r_0$ и r_1, r_2, r_3 соответственно.*

(7) $\Phi = F_4$, $\Psi = B_4$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$.

(8) $\Phi = F_4$, $\Psi = D_4$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$.

(9) $\Phi = F_4$, $\Psi = A_3$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$.

(10) $\Phi = E_8$, $\Psi = A_8$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (3, q-\varepsilon 1)$.

(11) $\Phi = E_8$, $\Psi = D_8$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$.

(12) $\Phi = E_7$, $\Psi = A_7$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$.

(13) $\Phi = E_7$, $\Psi = D_6$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q-\varepsilon 1)$.

(14) $\Phi = E_6$, $\Psi = A_5$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = (2, q - \varepsilon 1)$.

(15) $\Phi = G_2$, $\Psi = A_2$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$.

(16) $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$, $R = L \simeq A_1(3^{4n+2})$, $|\mathrm{Aut}_R(L) : L/Z(L)| = 1$.

(17) *В остальных случаях* $\mathrm{Aut}_R(L)$ *совпадает с группой всех внутренне-диагональных автоморфизмов группы* L.

Теорема 2. *Группа* $G = {}^3D_4(q)$ *является строго вещественной.*

В качестве непосредственного следствия теоремы 2 и работ [5,14,17, 18,20–22,26,30] справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Любая конечная простая вещественная группа является строго вещественной.*

Теорема 4. *В конечной простой группе* G *любой элемент представим в виде произведения двух инволюций в том и только в том случае, если* G *изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ *при* $q \not\equiv 3 \pmod 4$, $n \geq 1$;

(2) $\Omega_{2n+1}(q)$ *при* $q \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 3$;

(3) $\Omega_9(q)$ *при* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(4) $\mathrm{P}\Omega^-_{4n}(q)$ *при* $n \geq 2$;

(5) $\mathrm{P}\Omega^+_{4n}(q)$ *при* $q \not\equiv 3 \pmod 4$, $n \geq 3$;

(6) $\mathrm{P}\Omega^+_8(q)$;

(7) ${}^3D_4(q)$;

(8) A_{10}, A_{14}, J_1, J_2.

Новизна и научная значимость работы. Основные результаты диссертации являются новыми. Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях подгруппового строения конечных групп лиева типа. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В диссертации используются классические методы теории конечных групп, линейных алгебраических групп и конечных групп лиева типа.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинарах Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета «Теория групп» и «Алгебра и логика». Результаты второй главы также докладывались на XLV Международной научной студенческой конференции (см. текст тезисов [32]); на Региональных молодежных конференциях в Екатеринбурге (см. [34], [35]); на VI Международной школе-конференции по теории групп в Нальчике и на Международной конференции «Мальцевские чтения» в Новосибирске. Результаты третьей главы докладывались на XLVI Международной научной студенческой конференции (см. [33]); на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (см. [36]); на VII Международной школе-конференции по теории групп в Челябинске; на Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина; на VIII Международной школе-конференции по теории групп в Нальчике (см. [37]) и на Международной конференции «Мальцевские чтения» в Новосибирске.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [29–37]. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29–31], входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из трех глав, включая введение, и списка литературы. Она изложена на 76 страницах, библиография содержит 36 наименований.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Точные формулировки основных результатов приведены во введении. Все утверждения после первого параграфа первой главы, также как и известные результаты, имеют тройную нумерацию: первое число - номер главы, второе - номер параграфа в текущей главе, третье - номер утверждения в текущем параграфе.

Глава 1 содержит точные формулировки основных результатов диссертации и важные следствия, а также необходимые определения и известные вспомогательные результаты, которые используются далее на протяжении всей работы.

Глава 2 посвящена доказательству теоремы 1 и состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводятся необходимые известные структурные результаты о редуктивных подгруппах максимального ранга в линейных алгебраических группах и конечных группах лиева типа, а также дается определение подсистемных подгрупп. Второй параграф посвящен рассмотрению группы индуцированных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_R(L)$ подсистемной подгруппы L в редуктивной подгруппе максимального ранга R. В этом параграфе доказывается теорема, позволяющая находить строение группы $\mathrm{Aut}_R(L)$ при помощи решеток соответствующих корневых систем. Третий параграф полностью посвящен доказательству теоремы 1. В начале доказательства приводится полезная лемма, позволяющая рассматривать только максимальные связные корневые подсистемы, после чего последовательно разбираются все неразложимые корневые системы соответствующих конечных групп лиева типа.

Глава 3 посвящена завершению решения вопроса 14.82 из «Коуровской тетради». В первом параграфе главы доказывается строгая вещественность ортогональных групп $\mathbf{P}\Omega^-_{4n}(q)$ в случае нечетной характеристики поля. Во втором параграфе доказывается строгая вещественность элементов специального вида. В частности, доказана строгая вещественность всех полупростых элементов в конечных группах лиева типа G, имеющих тип отличный от A_n, D_{2n+1} или E_6. Более того, доказано, что для любого максимального тора T группы G найдется инволюция из алгебраического нормализатора $N(G,T)$, инвертирующая любой элемент тора T. Третий параграф посвящен доказательству теоремы 2.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Евгению Петровичу Вдовину за всестороннюю помощь, полезные советы и постоянную поддержку на протяжении всего периода руководства. Автор благодарен своему научному руководителю по работе на соискание степени бакалавра Виктору Даниловичу Мазурову. Автор признателен всем сотрудникам лаборатории теории групп ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики НГУ.

Литература

[1] *М.А. Газданова, Я.Н. Нужин*, *О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2*, Сибирский математичексий журнал, Т.47 (2006), № 5. с. 1031–1051.

[2] *Е.Б.Дынкин*, *Полупростые подалгебры полупростых алгбер Ли*, Математический сборник, Т.30, N 2 (1952), 349–462.

[3] *В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро*,*Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, издание 17-е, Новосибирск, 2010.

[4] *Дж. Хамфри*, *Линейные алгебраические группы.* Москва, «Наука», 1980.

[5] *C. Baginski*, *On sets of elements of the same order in the alternating group A_n*, Publ. Math. 1987, V. 34, N 1, p. 13—15. (1987).

[6] *A. Borel and J. de Siebental*, *Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment.Math.Helv., 23 (1949), p. 200–221.

[7] *R.W. Carter*, *Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc., (3) 37 (1978), p. 491–507.

[8] *R.W. Carter*, *Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups*, Proc. London Math. Soc., (3) 42 (1981), N 1 , p. 1–41.

[9] *R.W. Carter*, *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, John Wiley and Sons, 1985.

[10] *R.W. Carter*, *Simple groups of Lie type*, Wiley and sons, 1972.

[11] *J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson*, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[12] *D. Deriziotis*, *Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematic der Universität Essen*, 11 (1984).

[13] *D.I. Deriziotis, G.O. Michler*, *Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$*, Transactions of the AMS, V. 1 (1987), N 1, p. 39–70.

[14] *E.W. Ellers, W. Nolte*, *Bireflectionality of orthogonal and symplectic groups*, Arch. Math., V. 39 (1982), N 1, p. 113–118.

[15] *D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon*, *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups*, Mathematical Surveys and Monographs, 40, № 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[16] *W. Feit, G.J. Zuckerman*, *Reality properties of conjugacy classes in spin groups and symplectic groups*, Contemporary mathematics, V. 13, 1982, 239–253.

[17] *R. Gow*, *Commutators in the symplectic group*, Arch. Math. (Basel), 1988, V. 50, N 3, p. 204–209.

[18] *R. Gow*, *Products of two involutions in classical groups of characteristic* 2, J. Algebra, V. 71 (1981), N 2, p. 583–591.

[19] *J.E. Humphreys*, *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Mathematical Survey and Monographs, 43, 1995.

[20] *F. Knüppel, G. Thomsen*, *Involutions and commutators in orthogonal groups*, J. Austral. Math. Soc., 1998, V. 65, N 1, p. 1–36.

[21] *S.G. Kolesnikov, Ja.N. Nuzhin*, *On strong reality of finite simple groups*, Acta Appl. Math., 2005, V. 85, N 1-3, p. 195–203.

[22] *J. Rämö*, *Strongly real elements of orthogonal groups in even characteristic*, Принята к печати в J.Group Theory.

[23] *R. Steinberg*, *Automorphisms of finite linear groups*, Canad.J.Math., 12, N 4 (1960), p. 606–615.

[24] *R. Steinberg*, *Endomorphisms of algebraic groups*, Mem.AMS, 80, 1968.

[25] *M.C. Tamburini, E.P. Vdovin*, *Carter subgroups of finite groups*, J. Algebra, 2002, V. 255, N 1, p. 148–163.

[26] *P.H. Tiep, A.E. Zalesski*, *Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type*, J. Group Theory, 2005, V. 8, N 3, p. 291–315.

[27] *P.H. Tiep, A.E. Zalesski*, *Unipotent elements of finite groups of Lie tipe and realization fields of their complex representations*, J. Algebra, 2004, V. 271, N 1, p. 327–390.

[28] *Wonenburger M.J.*, *Transformations which are products of two involutions*, J. Math. Mech., 1966, V. 16, N 1, p. 327–338.

Работы автора по теме диссертации.

[29] *Е.П. Вдовин, А.А. Гальт*, *Нормализаторы подсистемных подгрупп в конечных группах лиева типа*, Алгебра и логика, 2008, Т. 47, № 1, с. 3–30. (Перевод *A.A. Gal't, E.P. Vdovin*, *Normalizers of subsystem subgroups in finite groups of Lie type*, Algebra and Logic, 2008, V. 47, No. 1, p. 1–17.)

[30] *А.А. Гальт*, *Строго вещественные элементы в конечных простых ортогональных группах*, Сибирский математичексий журнал, 2010, Т. 51, №2, с. 241–248. (Перевод *A.A. Gal't*, *Strongly real elements in finite simple orthogonal groups*, SMJ, 2010, V. 51, No. 2, p. 193–198.)

[31] *Е.П. Вдовин, А.А. Гальт*, *Строгая вещественность конечных простых групп*, Сибирский математический журнал, 2010, Т. 51, №4, с. 769–777. (Перевод *E.P. Vdovin, A.A. Galt*, *Strong reality of finite simple groups*, Siberian mathematical Journal, 2010, V. 51, No. 4, p. 610–615.)

[32] *А.А. Гальт*, *Нормализаторы подсистемных подгупп в конечных группах лиева типа*, Материалы XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2007, с. 5-6.

[33] *А.А. Гальт*, *Строго вещественные элементы в конечных простых группах*, Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2008, с. 4-5.

[34] *А.А. Гальт*, *Группы индуцированных автоморфизмов подсистемных подгрупп в конечных линейных, унитарных и ортогональных группах*, Труды 37-й Региональной молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной матемематики», Екатеринбург, 2006, с. 12-14.

[35] *А.А. Гальт*, *Группы индуцированных автоморфизмов подсистемных подгрупп в конечных группах лиева типа*, Труды 38-й Региональной молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной матемематики», Екатеринбург, 2007, с. 23-26.

[36] *A.A. Galt*, *Strongly real elements in finite simple groups*, Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвящен-

ной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, 2008, с. 297-298.

[37] *А.А. Гальт*, *Конечные простые строго вещественные группы*, Труды восьмой Международной школы-конференции, посвященной 75-летию В.А. Белоногова «Теория групп и ее приложения», Нальчик, 2010, с. 66-68.

Гальт Алексей Альбертович

Вопросы сопряженности
в конечных группах лиева типа

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 21.07.10	Формат 60 x 84 1/16
Печать офсетная	Усл. печ. л. 1.0
Заказ №	Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск–90, ул.Пирогова 2