На правах рукописи

Дудкин Федор Анатольевич

ПОДГРУППЫ ГРУПП БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2010

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Чуркин Валерий Авдеевич.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Тимошенко Евгений Иосифович,
кандидат физико-математических наук,
Храмцов Дмитрий Геннадьевич.

Ведущая организация:
Омский государственный университет.

Защита состоится 17 сентября 2010 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: ауд. 417, пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан "__" августа 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Группа называется *хопфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т. е. является автоморфизмом. Это свойство было отмечено Х. Хопфом (H. Hopf) в связи с исследованием проблемы, связаны ли отображения степени 1 между замкнутыми многообразиями гомотопической эквивалентностью.

Очевидно, любая конечная группа хопфова, а свободная группа счетного ранга нехопфова. Мальцев [3] доказал, что любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа хопфова, в частности, это верно для конечно порожденных линейных групп. Первые примеры [21] конечно порожденных нехопфовых групп были достаточно сложны. В 1962 году Г. Баумслаг и Д. Солитер [6] нашли серию нехопфовых групп с одним соотношением простого вида в классе групп

$$BS(p,q) = \langle a,\ t \parallel t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Здесь p, q – пара ненулевых целых чисел (параметры).

Отметим сразу, что группы $BS(p,q)$, $BS(q,p)$ и $BS(-p,-q)$ изоморфны. Поэтому можно считать, что $p > 0, p \leqslant |q|$. Если $p = |q| = 1$, то $BS(p,q)$ – абелева или почти абелева (фундаментальная группа тора или бутылки Клейна). Если $p = 1$, то $BS(p,q)$ – линейная группа, порожденная целочисленными матрицами

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Можно так же считать, что $BS(1,q)$ — расширение аддитивной группы кольца q-адических рациональных чисел $\mathbb{Z}[1/q]$ с помощью автоморфизма

$$x \mapsto qx, x \in \mathbb{Z}[1/q].$$

В частности, это метабелева группа при $q \neq 1$, каждый её элемент единственным образом представим в форме слова $t^i a^k t^{-j}$, где $i, j \geqslant 0$ и, если $i, j > 0$, то k не делится на q.

Если $p > 1$ и $|q| > 1$, то группа $BS(p, q)$ — HNN-расширение с базисной бесконечной циклической группой $\langle a\rangle$ и сопрягаемыми подгруппами $\langle a^p\rangle$ и $\langle a^q\rangle$. Её элементы представимы единственным способом в виде левой (или правой) нормальной формы. Произвольное редуцированное слово $w = w(t, a)$ свободной группы $F(t, a)$, представляющее единичный элемент группы $BS(p, q)$, либо имеет подслово $t^{-1}a^kt$, где $p \mid k$, либо имеет подслово ta^kt^{-1}, где $q \mid k$ (лемма Бриттона, см., например, [2], гл. 4, §2). Отсюда коммутатор $[t^{-1}at, a]$ не равен единице в $BS(p, q)$ при $p > 1$, а его образ при гомоморфизме $\varphi\colon a \mapsto a^p, t \mapsto t$ равен $[t^{-1}a^pt, a^p] = [a^q, a^p] = 1$. Если p и q взаимно просты (обозначение: $p \perp q$), то образ φ содержит элементы $a^p, t, a^q = t^{-1}a^pt$ и, следовательно, элемент a, то есть $Im\,\varphi = BS(p, q)$. Это доказывает нехопфовость неразрешимых групп $BS(p, q)$ при $p \perp q$.

Мескин [20] доказал, что группа $BS(p, q)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p|q$ или $q|p$. Группа $BS(p, q)$ хопфова (см. [6]) тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема или p и q имеют одинаковые множества простых делителей. В частности, простейшая нехопфова группа — это $BS(2, 3)$.

Коллинз [10] описал группу автоморфизмов $BS(p, q)$ при взаимно простых p и q. Коллинз и Левин [11] заметили, что группа $BS(2, 4)$, или, более общо, $BS(p, q)$, где $|p|, |q| \neq 1$ и одно из чисел p, q делит другое, имеет бесконечно порожденную группу автоморфизмов.

В [17] доказано, что конечно порожденные (не циклические) разрешимые подгруппы групп с одним соотношением в точности — метабелевы группы Баумслага–Солитера.

Соотношения Баумслага–Солитера активно исследовалось для фундаментальных групп многообразий и комплексов (см., например, монографии [7], гл. III.Г, §7 и [16], гл. 1, §10). Известно, что фундаментальные группы компактных 2-многообразий всегда хопфовы. Фундаментальные группы компактных 4-многообразий могут быть любыми конечно представленными группами. Доказано, что группа $BS(p, q)$ при $|p| \neq |q|$ не может быть подгруппой фундаментальной группы связного ориентируемого 3-многообразия (см. [25] и [15]). Зела [23] доказал, что гиперболическая группа без кручения хопфова, если она не разлагается в нетривиальное свободное произведение. В частности, фундаментальные группы замкнутых многообразий отрицательной кривизны хопфовы.

Никакая группа Баумслага–Солитера не может быть подгруппой гиперболической группы (см., например, [7], стр. 462). Группа $BS(p,q)$ обладает автоматной структурой тогда и только тогда, когда $|p| = |q|$. Ослабленному условию автоматности, известному как "асинхронная автоматность удовлетворяют все группы Баумслага–Солитера (см. [12], §7.4).

Предположим, что для любого слова длины $\leqslant n$, представляющего единицу группы, существует не более, чем $f(n)$ вставок и сокращений нетривиальных определяющих соотношений, необходимых для установления равенства слова единице. Класс эквивалентности функции f не зависит от выбора конечного копредставления группы. Говорят, что в этом случае группа удовлетворяет изопериметрическому неравенству класса f. Неравенство линейно тогда и только тогда, когда группа гиперболическая (см., например, [22], гл. 2, §8 или [1], §2). Для автоматных групп неравенство квадратичное (см. [12], §2.3). Изопериметрическое неравенство для групп $BS(p,q)$ экспоненциально при $|p| \neq 1, |q| \neq 1$, см. [14].

Одна из классических задач теории групп состоит в описании подгрупп данной группы. Нильсен и Шрайер доказали, что подгруппы свободной группы сами свободны. Курош получил описание подгрупп свободного произведения групп. В дальнейшем исследовались подгруппы свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений. Эти исследования завершились известной теорией Басса–Серра, где описание подгрупп задавалось в виде "фундаментальной группы подходящего графа групп". При этом оставалось неясным, какие "фундаментальные группы графов групп" задают подгруппы данной группы. Указанный недостаток позднее исправил Басс [5], однако предложенные им условия были трудно проверяемы даже в конкретной ситуации групп Баумслага–Солитера.

Цель работы. Описание всех подгрупп групп Баумслага–Солитера в виде фундаментальных групп графов групп, решение проблемы изоморфизма для подгрупп конечного индекса, поиск рекурсивной формулы числа подгрупп данного конечного индекса.

Методика исследований. В диссертации используются методы работы с группами, действующими на деревьях, в частности, теория Басса–Серра и теория погружений Басса; так же используются методы работы с копредставлениями групп — преобразования Тице и переписывающий процесс Радемайстера–Шрайера.

Новизна и научная значимость. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Работа носит теоретический характер. Получена информация о классе групп Баумслага-Солитера, который играет активную тестовую роль в теории групп и топологии.

Апробация работы. Результаты работы прошли апробацию на следующих международных конференциях: на XLVI–XLVIII международных научных студенческих конференциях "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2008–2010); на VII Международной школе-конференции, посвященной 60-летию А.С. Кондратьева (Челябинск, 2008); на международных конференциях "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2008, 2009); на восьмой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения 2009" (Казань, 2009). Результаты диссертации отмечены стипендией Сибирского Математического Журнала для аспирантов в 2010 году. Автор неоднократно докладывал результаты диссертации на семинарах Института математики СО РАН и НГУ "Теория групп"и "Алгебра и логика".

Основные результаты диссертации.

1. При различных простых параметрах p и q в терминах графов групп описаны все подгруппы группы $BS(p,q)$. А именно, найдены простые необходимые и достаточные условия на граф групп, при которых его фундаментальная группа изоморфно вкладывается в группу $BS(p,q)$.

2. При взаимно простых параметрах p и q описаны все подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$.

2.1. Доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$ порождена двумя элементами.

2.2. Найдено простое копредставление для произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$.

2.3. Решена проблема изоморфизма для подгрупп конечного индекса группы $BS(p, q)$.

2.4. Найдена формула числа классов сопряженных подгрупп данного конечного индекса в группе $BS(p, q)$.

3. Найдена рекурсивная формула для числа подгрупп данного конечного индекса в группе $BS(p, q)$ при произвольных ненулевых параметрах p и q .

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [26–34], из них [26–28] входят в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (36 наименований). Объем диссертации 62 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится обоснование актуальности темы диссертации, кратко описана история возникновения и исследования групп Баумслага–Солитера, приведены определения, необходимые для формулировки результатов диссертации и сформулированы сами результаты.

В первой главе с помощью теории Басса–Серра групп действующих на деревьях и теории накрытий Басса получено описание (в терминах графов групп) всех подгрупп групп $BS(p, q)$ с различными простыми параметрами p и q. Для формулировки результатов потребуется несколько определений.

Граф A задается множеством "вершин" $V(A)$, множеством "ребер" $E(A)$, двумя отображениями ∂_0 – "начало" ребра и ∂_1 – "конец" ребра из множества ребер в множество вершин и инверсией ребер $^-\colon E(A) \to E(A)$ такой, что $\partial_i\bar{e} = \partial_{1-i}e$, $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$.

Пара $\mathbb{A} = (A, \mathscr{A})$ называется *графом групп*, если A – связный граф, $\mathscr{A}$ – такое семейство групп и гомоморфизмов, что всякой вершине a графа A сопоставлена группа $\mathscr{A}_a$, всякому ребру e графа A сопоставлена группа $\mathscr{A}_e = \mathscr{A}_{\bar{e}}$ и, если $a = \partial_0 e$, то задано изоморфное вложение $\alpha_e\colon \mathscr{A}_e \to \mathscr{A}_a$.

Пусть T — максимальное поддерево графа A. *Фундаментальная группа* $\pi_1(\mathbb{A})$ *графа групп* $\mathbb{A}$ задается копредставлением, где порождающие – это

1) порождающие вершинных групп $\mathscr{A}_v, v \in V(A)$,

2) новые символы $t_e, e \notin T$,

а определяющие соотношения –

1) определяющие соотношения $\mathscr{A}_v, v \in V(A)$,

2) $\alpha_e(g) = \alpha_{\overline{e}}(g)$, для всех $g \in \mathscr{A}_e, e \in T$.

3) $t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e = \alpha_{\overline{e}}(g)$, для всех $g \in \mathscr{A}_e, e \notin T$,

относительно поддерева T.

Это определение не зависит от выбора максимального поддерева T (см., например, [24] или [5]).

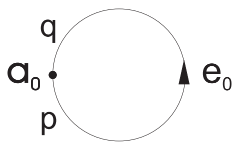

Рис. 1: Петля групп $\mathbb{A}'$,

Все группы Баумслага–Солитера являются фундаментальными группами графов групп. Обозначим через $\mathbb{A}'$ – петлю групп как на рисунке 1: граф A' имеет одну вершину a_0 и два ребра $e_0, \bar{e}_0$; вершинная и реберные группы бесконечные циклические: $\mathscr{A}'_{a_0} = \langle a_0 \rangle = \mathbb{Z}$, $\mathscr{A}'_{e_0} = \mathscr{A}'_{\overline{e}_0} = \langle e_0 \rangle = \mathbb{Z}$. Если считать, что оба вложения сохраняют ориентацию, то индексы вложения $|\mathscr{A}'_{a_0} : \alpha'_{e_0}\mathscr{A}'_{e_0}| = p$ и $|\mathscr{A}'_{a_0} : \alpha'_{\overline{e}_0}\mathscr{A}'_{\overline{e}_0}| = q$, , где p и q – целые ненулевые числа, полностью задают α'_{e_0} и $\alpha'_{\overline{e}_0}$. При этом $\pi_1(\mathbb{A}') = BS(p, q)$.

Обобщенной группой Баумслага–Солитера называется всякая группа, действующая на дереве с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и ребер. По теореме Басса–Серра (см., например, [24] или [4]) всякая обобщенная группа Баумслага–Солитера является фундаментальной группой графа групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами. Свойства этих групп исследовались в работах [9, 18]. Всякой обобщенной группе Баумслага-Солитера можно сопоставить граф с метками, например, как на рисунке 1. Метка $\lambda(e) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, написанная на ребре e с началом в вершине v, определяет вложение $\alpha_e : e \to v^{\lambda(e)}$ циклической реберной группы $\langle e \rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v \rangle$. В диссертации вершинные и реберные группы всех рассматриваемых графов групп бесконечные циклические.

В первой главе диссертации будут описаны *все* подгруппы групп $BS(p,q)$ при различных простых параметрах p и q. Группы Баумслага–Солитера действуют на дереве Басса-Серра так, что стабилизаторы вершин и ребер – бесконечные циклические группы. Их подгруппы действуют на том же дереве и, по теореме Басса-Серра (см., например, [24] или [4]), представимы в виде фундаментальной группы некоторого графа групп, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические или единичные. Это значит, что всякая подгруппа является либо обобщенной группой Баумслага-Солитера, либо соответственно свободной группой не более, чем счетного ранга. Так как группа $BS(p,q)$ содержит свободные группы, то проблема вложимости в качестве подгрупп остаётся только для обобщенных групп Баумслага-Солитера. Какие условия нужно наложить на граф групп, чтобы его фундаментальная группа вкладывалась в $BS(p,q)$?

В [5] Х.Басс показал, что если группа G изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп $\mathbb{A}$, то группа H является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда существует граф групп $\mathbb{A}_1$, погружаемый в $\mathbb{A}$, фундаментальная группа которого изоморфна H. Однако при заданном графе групп $\mathbb{A}$ описание всех таких $\mathbb{A}_1$ — трудная задача.

Мы покажем, что <u>всякая</u> подгруппа из $BS(p,q)$ может быть представлена в виде фундаментальной группы графа групп с метками на ребрах $1,p$ или q.

Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ – реберный путь в графе с метками. Обозначим

$$q(e_1,e_2,\ldots,e_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda(\overline{e_i})}{\lambda(e_i)}.$$

Лемма 1.9 *Пусть $\mathbb{A}$ – петля групп (см. рис. 2), вершинные и реберные группы которой бесконечные циклические, $\alpha_i,\beta_i\in\{1,p,q\}$, $i=1,2,\ldots,k$. Тогда фундаментальная группа графа групп $\mathbb{A}$ вкладывается изоморфно в группу $BS(p,q)$, если и только если $q(e_1,e_2,\ldots,e_k)=\left(\frac{p}{q}\right)^m, m\in\mathbb{Z}$.*

Лемма 1.10 *Пусть $\mathbb{A}$ – луч групп (см. рис. 2), вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические, α_i,β_i индексы вложения реберных групп в вершинные равны $1,p$ или q. Обо-*

значим $\lambda_n(\mathbb{A})$ – число индексов $\alpha_i = 1$ при $i \leqslant n$, $\mu_n(\mathbb{A})$ – число индексов $\beta_i = 1$ при $i \leqslant n$, $\Delta_n(\mathbb{A}) = \lambda_n(\mathbb{A}) - \mu_n(\mathbb{A})$. Тогда фундаментальная группа графа групп $\mathbb{A}$ вкладывается изоморфно в группу $BS(p, q)$, если и только если $\Delta_n(\mathbb{A})$ ограничена сверху как функция от n.

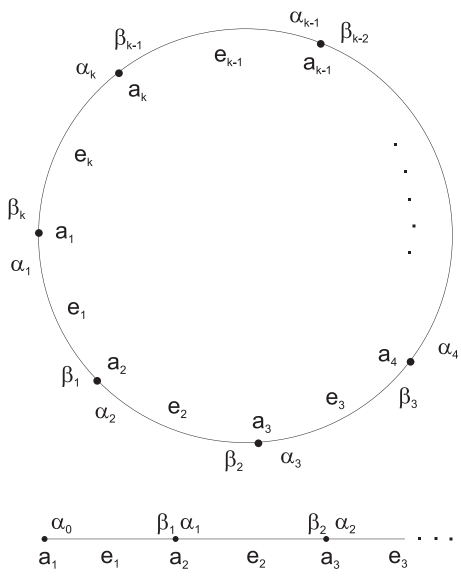

Рис. 2: вверху петля групп, внизу луч групп.

Будем рассматривать далее только связные графы. Основной результат первой главы диссертации –

Теорема 1.12 *Пусть p и q – различные простые числа. Пусть $\mathbb{A}$ – счетный граф групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами, реберные группы которого вкладываются в вершинные как подгруппы индекса $1, p$ или q. Тогда фундаментальная группа графа групп $\mathbb{A}$ вкладывается изоморфно в группу $BS(p, q)$, если и только если все базисные петли графа групп $\mathbb{A}$ удовлетворяют Лемме 1.9 и всякий луч групп из $\mathbb{A}$ удовлетворяет Лемме 1.10. Если фундаментальная группа графа групп $\mathbb{A}$ вкладывается изоморфно в группу $BS(p, q)$, то изоморфное вложение можно найти алгоритмически.*

Пусть $a_n(G)$ — число подгрупп индекса n в группе G, а $a_n^{\triangleleft}(G)$ — число нормальных подгрупп индекса n в группе G. Гелман [13] доказал, что если p и q взаимно просты, то

$$a_n(BS(p, q)) = \sum_{\substack{l|n \\ l \perp pq}} l. \tag{1}$$

Баттон [8] при тех же условиях доказал формулу

$$a_n^{\lhd}(BS(p,q)) = \sum_{\substack{n=lm \\ l|p^m-q^m}} \text{НОД}(l, p-q). \qquad (2)$$

Во **второй главе** дается явное описание <u>всех</u> подгрупп индекса n в группе $BS(p,q)$ при взаимно простых параметрах p и q . При этом используется только формула (1). Формула (2) получается как следствие.

Теорема 2.3 *Множество подгрупп индекса n в группе $BS(p,q)$, при $p \perp q$, совпадает с множеством подгрупп $H_{n,m}^s$, порожденных двумя элементами a^l и $t^m a^s$, где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \ldots, l-1$. Все подгруппы $H_{n,m}^s$ различны.*

В петле групп на рисунке 2 положим $k = m$, метки $\alpha_i = p, i = 1, \ldots, m$, метки $\beta_i = q, i = 1, \ldots, m$. Полученный граф групп обозначим через $\mathbb{B}_m$. Обозначим через H_m — фундаментальную группу графа групп $\mathbb{B}_m$. В следующей теореме найдено копредставление для произвольной подгруппы конечного индекса в группе $BS(p,q)$.

Теорема 2.6 *Пусть n, l, m — натуральные числа, $lm = n$ и $l \perp pq$. Тогда для любых $s = 0, 1, \ldots, l-1$ подгруппа $H_{n,m}^s$ изоморфна группе H_m. Группы H_m попарно неизоморфны.*

Обозначим через $N_G(n)$ – число классов сопряженных подгрупп индекса n. А. Д. Медных получил [19] формулу для $N_G(n)$ для произвольной группы G и числа n, однако для применения этой формулы необходимо хорошее описание подгрупп конечного индекса группы G. С помощью теоремы 2.6 и следствия из нее доказана следующая теорема.

Теорема 2.9 *Пусть p и q взаимно просты. Тогда*

$$N_{BS(p,q)}(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{dklm=n, \\ l \perp pq}} \mu(k) \cdot ld \cdot \textit{НОД}(d, p^m - q^m).$$

В **третьей главе** найдено обобщение формулы Гелмана (1) для произвольных целых ненулевых параметров k и l.

Обозначим через $\tau(b)$ — число делителей натурального числа b, а через $b_1, b_2, \ldots, b_{\tau(b)}$ — все различные делители этого числа.

Теорема 3.7 *Пусть d – любое натуральное число, а числа p и q взаимно просты. Тогда число $a_n\left(BS(dp,dq)\right)$ подгрупп индекса n в группе $BS(dp,dq)$ равно:*

$$\sum_{\substack{n=lrs \\ l\perp pq, d=rb \\ \pi(r)\subseteq\pi(l), b\perp l}} \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{\tau(b)}) \\ k_1b_1+\cdots+k_{\tau(b)}b_{\tau(b)}=s}} \frac{n\; l^{rs-K} T\left(r\cdot V(b,s)\right)}{k_1!\ldots k_{\tau(b)}!\; b_1^{k_1}\ldots b_{\tau(b)}^{k_{\tau(b)}} r^K}.$$

Здесь все числа – неотрицательные целые, $\pi(r)$ – множество простых делителей r, $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_{\tau(b)}$, $V(b,s)$ – вектор

$$\left(\overbrace{b_1, b_1 \ldots, b_1}^{k_1}, \overbrace{b_2, b_2 \ldots, b_2}^{k_2}, \ldots, \overbrace{b_r, b_r \ldots, b_r}^{k_r}\right),$$

а $T\left(\overrightarrow{v}\right)$ — число подстановок y из S_n, для которых подгруппа $\langle x, y\rangle$ группы S_n транзитивна (x – фиксированная подстановка, последовательность длин независимых циклов которой совпадает с вектором $\overrightarrow{v}$). Теорема 3.1 главы 3, которую мы не приводим ввиду большого количества необходимых определений, дает рекурсивную формулу подсчета $T\left(\overrightarrow{v}\right)$ для произвольного вектора $\overrightarrow{v}$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Валерию Авдеевичу Чуркину за постановку интересных задач и поддержку на пути их решения.

Литература

1. Громов М. *Гиперболические группы: Пер. с англ.* — Ижевск: Институт комп. исследований, 2002. — 160 с.

2. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп: Пер. с англ.* — М.: Мир, 1980.

3. Мальцев А. И. *Об изоморфных матричных представлениях бесконечных групп* // Матем. сб. — 1940. — Т. 8, № 3. — С. 405-422.

4. Чуркин В. А. *К теории групп действующих на деревьях* // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 218-225.

5. Bass H. *Covering theory for graphs of groups* // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1993. — V. 89, № 1. — P. 3-47.

6. Baumslag G., Solitar D. *Some two-generator one-relator non-hopfian groups* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1962. — V. 68, № 3. — P. 199-201.

7. Bridson M. R., Haefliger A. *Metric spaces of non-positive curvature.* — Berlin/Heidelberg/New York: Springer–Verlag, 1999. (Grundlehren der mathematishen Wissenschaften, V. 319).

8. Button J. O. *A formula for the normal subgroup growth of Baumslag-Solitar groups* // J. Group Theory. — 2008. — V. 11, № 6. — P. 879–884.

9. Clay M., Forester M. *On the isomorphism problem for generalized Baumslag-Solitar groups* // Alg. and Geom. topol. — 2008. — V. 8. — P. 2289–2322.

10. Collins D. J. *The automorphism towers of some one-relator groups* // J. London Math. Soc. — 1978. — V. 36, № 3. — P. 480-493.

11. Collins D. J., Levin F. *Automorphisms and Hopficity of certain Baumslag-Solitar groups* // Archiv Math. — 1983. — V. 40. — P. 385-400.

12. Epstein D. B. A. with Cannon J. W., Holt D. F., Levy S. V. F., Paterson M. S., Thurston W. P. *Word processing in groups.* — Boston/London: Jones and Bartlett Publishers, 1992. — 330 p.

13. Gelman E. *Subgroup growth of Baumslag-Solitar groups* // J. Group Theory. — 2005. — V. 8, № 6. — P. 801-806.

14. Gersten S. M. *Dehn functions and l_1-norms of finite presentations* — G. Baumslag (ed.), C.F. Miller, III (ed.), Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory. Springer, 1992.

15. Jaco W. H., Shalen P. B. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds* // Mem. Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 21, № 220. — P. 192-200.

16. Kapovich M. *Hyperbolic manifolds and discrete groups.* — Boston/Basel/Berlin: Birkhäuser, 2000. (Progress in Math. V. 183).

17. Karrass A., Solitar D. *Subgroups of HNN-groups and one-relator groups* // Canad. Math. J. — 1971. — V. 23. — P. 627-643.

18. Levitt G. *On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups* // Geometry and Topology. — 2007. — V. 11. — P. 473-515.

19. Mednykh A. *Counting conjugacy classes of subgroups in a finitely generated group* // Journal of Algebra. — 2008. — V. 320. — P. 2209-2217.

20. Meskin S. *Non-residually finite one-relator groups* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 64. — P. 105-114.

21. Neumann B. H. *A two generator group isomorphic to a proper factor group* // J. London Math. Soc. — 1950. — V. 25. — P. 465-479.

22. Ohshika K. Discrete groups. — Translations of mathematical monographs. — V. 207. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2002.

23. Sela Z. *Endomorphisms of hyperbolic groups I: The Hopf property* // Topology. — 1999. — V. 38. — P. 301-322.

24. Serre J.-P. *Trees.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1980.

25. Shalen P. *Three-manifolds and Baumslag-Solitar groups* // Topology Appl. — 2001. — V. 110. — P. 113–118.

Работы автора по теме диссертации

26. Дудкин Ф. А. *Подгруппы групп Баумслага–Солитера* // Алгебра и Логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 3-30.

27. Дудкин Ф. А. *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 3. — С. 310-325.

28. Дудкин Ф. А., Чуркин В. А. *Число подгрупп данного конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Вестник НГУ, Серия: Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 54-60.

29. Дудкин Ф. А. *Подгруппы групп Баумслага-Солитера* // Тезисы сообщений VII Международной школы-конференции, посвященной 60-летию А.С. Кондратьева. Челябинск, изд-во ЮУрГУ. — 2008. — С. 48-49.

30. Дудкин Ф. А. *Подгруппы групп Баумслага-Солитера* // Материалы XLVI международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2008. — С. 10.

31. Дудкин Ф. А. *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Материалы XLVII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2009. — С. 70-71.

32. Дудкин Ф. А. *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские чтения посвященной 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, Новосибирск: ИМ СО РАН. — 2009. — С. 53. (http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/09/Abstracts/abstracts-09.pdf)

33. Дудкин Ф. А. *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения 2009"; Казан. матем. об-во. — 2009. — Т. 39. — С. 198-199.

34. Дудкин Ф. А. *Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага-Солитера* // Материалы XLVIII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. — 2010. — С. 9-10.

Дудкин Федор Анатольевич

Подгруппы групп Баумслага–Солитера

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . .2010. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд. л. 1.25. Тираж 100 экз. Заказ N .

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.