На правах рукописи

БУСКИН Николай Владиславович

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ГРУПП С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2009

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Богопольский Олег Владимирович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент
Бардаков Валерий Георгиевич

кандидат физико-математических наук, доцент
Клячко Антон Александрович

Ведущая организация:

Омский государственный университет

Защита состоится 24 декабря 2009 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Определение гиперболической группы было сформулировано М. Громовым (см. [6]) в терминах метрических свойств графа Кэли группы относительно заданной системы порождающих. Классическим примером таких групп являются фундаментальные группы гиперболических многообразий, то есть фактормногообразий гиперболического пространства по действию дискретной группы изометрий. Гиперболические группы обладают многими интересными свойствами. Например, в классе гиперболических групп разрешимы такие классические проблемы комбинаторной теории групп как проблема равенства и проблема сопряженности элементов группы. Что касается проблемы изоморфизма, то известно, что она разрешима в классе гиперболических групп без кручения (см. Зела З., [15]) и в классе относительно гиперболических групп без кручения, у которых все параболические группы — конечно порожденные абелевы группы (см. Дамани Ф., Гроувс Д., [3]).

В некотором смысле гиперболические группы похожи на свободные группы, поэтому интересно знать, как класс гиперболических групп пересекается с классом конечно порожденных групп с одним соотношением (они тоже в известном смысле похожи на свободные, см. [10], [22]), т. е. какие группы с одним соотношением будут гиперболическими, а какие нет. В общем случае эта проблема не решена. Продвижение в частных случаях было получено в работе [7], причем методы, использованные в этой работе, опирались на другое, эквивалентное определение гиперболичности, формулируемое в терминах изопериметрического неравенства для диаграмм над групповым представлением.

Диссертация в основном посвящена исследованию того, какие группы с одним соотношением (с ограничениями на длину или на вид соотношения) являются гиперболическими, а какие нет.

Основное содержание диссертации.

1) модификация и применение методов, изложенных в работе [7] , к некоторому классу двупорожденных групп с одним соотношением, выделенному по соображениям, аналогичным тем, которыми руководствовались авторы [7] при выделении своего класса;

2) классификация всех двупорожденных групп с одним соотношением длины 8 по гиперболичности (для длины $\leqslant 7$ такая классификация прямо следует из результатов работы [7], группы с соотношением длины

8 — это действительно нетривиальный класс). Классификация для длины 8 является работой, выполненной совместно с О. В. Богопольским и А. А. Бутурлакиным.

Из известных нам результатов, посвященных классификации групп по гиперболичности, отметим работы В. Н. Безверхнего и Н. Б. Безверхней [18], Н. Б. Безверхней [19].

В диссертацию вошел также еще один результат, посвященный экономной отделимости элементов свободной группы подгруппами конечного индекса. Как известно, любой нетривиальный элемент свободной группы отделяется некоторой подгруппой конечного индекса. Есть гипотеза О. В. Богопольского о том, что произвольный элемент w свободной группы F_n длины $\geqslant 2$ отделяется подгруппой индекса $\leqslant C\ln|w|$, где $|w|$ — длина приведенного слова w, C — некоторая константа, зависящая от n. В диссертации представлено

3) доказательство этого утверждения для элементов $w \in F_n$, не принадлежащих коммутанту $[F_n, F_n]$ свободной группы F_n. Получена оценка (более слабая) в общем случае: произвольный элемент $w \neq 1$ отделяется подгруппой индекса $\leqslant \frac{|w|}{2} + 2$.

Существуют и другие варианты этой проблемы. Сравнительно недавно появились работы, посвященные экономной отделимости *нормальными* подгруппами. Из результатов работы Халид Боу-Раби [8] следует, что элемент w свободной группы $F_n, n \geqslant 2$, отделяется нормальной подгруппой индекса $O(|w|^3)$.

В работе И. Ривина [14] утверждается, что если элемент w лежит в $\gamma_k F_n \setminus \gamma_{k+1} F_n$, то w отделяется нормальной подгруппой индекса $O(\ln^k |w|)$. При этом Й. Малестейн и А. Путман в [11] доказали, что $k = O(|w|)$.

Отметим, что ни из одного из этих результатов не следует оценка $\frac{|w|}{2} + 2$, полученная автором настоящей работы. Кроме того, методы исследования отличаются от методов, применяемых в [8], [14].

Новизна и научная значимость работы.

Все результаты диссертации являются новыми. Результаты 1), 2) могут быть полезными для классификации групп с одним соотношением по гиперболичности. Результат 3) является, по сути, первым шагом в решении проблемы экономной отделимости. Несмотря на далекость от полного решения проблемы, тем не менее, возможно, он заинтересует исследователей и обратит их внимание на эту интересную, по нашему мнению, проблему.

Методы исследования. Методы исследования целиком происходят из комбинаторной и геометрической теории групп, элементарной теории чисел (глава 3). Основные объекты это группы, заданные порождающими и определяющими соотношениями, диаграммы над такими группами, свободные группы. Основные средства исследования это соответственно преобразования Титце, алгоритм Магнуса решения проблемы равенства слов в группе с одним соотношением, исследование примыканий клеток в диаграммах над группами, накрытия букета размеченных окружностей, позволяющие перечислять подгруппы свободной группы.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на Международной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" в 2004, 2005, 2006 годах, а также на конференции в Дортмунде "Geometric group theory and its applications", 2007 г.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы 1) в работе [33] из журнала, входящего в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, 2) в работе [29], 3) в работе [26], выполненной совместно с О. В. Богопольским и А. А. Бутурлакиным.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 56 страниц, состоит из введения, трех глав, содержащих 12 параграфов и библиографии. Библиография включает 33 наименования.

Содержание диссертации

В главах 1 и 2 диссертации автор опирается на определение гиперболичности, эквивалентное упомянутому выше, но формулируемое не в терминах графа Кэли, а в терминах изопериметрического неравенства для диаграмм над групповым представлением. Дадим это необходимое определение. Пусть группа G задана порождающими и определяющими соотношениями

$$G = \langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle,$$

где $\mathcal{A}$ — множество порождающих (алфавит), а $\mathcal{R}$ — множество соотношений. Группа G называется *конечно представленной*, если множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}$ могут быть выбраны конечными.

Пусть $F(\mathcal{A})$ — свободная группа над алфавитом $\mathcal{A}$ и $\psi : F(\mathcal{A}) \to G$ — канонический эпиморфизм. Будем говорить, что слово w равно 1 в группе G, если $\psi(w) = 1$ в G. Для такого слова w мы имеем равенство в группе $F(\mathcal{A})$

$$w = f_1 R_{i_1}^{\varepsilon_1} f_1^{-1} f_2 R_{i_2}^{\varepsilon_2} f_2^{-1} \dots f_d R_{i_d}^{\varepsilon_d} f_d^{-1},$$

где $f_j \in F(\mathcal{A})$, $R_{i_j} \in \mathcal{R}$, и $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1 \dots d$.

Наименьшее число d из всех таких возможных равенств для слова w будем обозначать $d(w)$.

Будем говорить, что группа $G = \langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$ удовлетворяет *линейному изопериметрическому неравенству*, если существует константа $L \geqslant 0$ такая, что для любого слова w, равного 1 в группе G, выполнено $d(w) \leqslant L|w|$, где $|w|$ — длина слова w. (Смысл слова *изопериметрическое* проясняется ниже, с помощью леммы ван Кампена). Конечно представленная группа G называется *гиперболической*, если она удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству.

Глава 1.

Далее мы цитируем практически полностью §1, объясняющий мотивировку поставленной задачи и формулировки полученных результатов.

В работе [7] С. Иванов и П. Шупп полностью классифицировали по свойству гиперболичности группы с одним соотношением R, содержащим не более трех вхождений некоторого порождающего $a^{\pm 1}$. В более сложном случае, когда число вхождений порождающего равно 4, ими были классифицированы группы с одним соотношением вида $\langle \mathcal{A} \mid aT_0aT_1aT_2aT_3 \rangle$, где $\mathcal{A}$ — конечный алфавит, $a \in \mathcal{A}$ и T_0, T_1, T_2, T_3 — попарно различные слова в свободной группе $F(\mathcal{A} \setminus \{a\})$.

В главе 1 диссертации рассматриваются группы с представлением вида

$$\langle a, b \mid a^{-1} b^{n_0} a b^{n_1} a b^{n_2} a b^{n_3} \rangle.$$

Применив замену порождающих $a \to ab^{-n_1}$, $b \to b$, можно считать, что $n_1 = 0$. Если при этом $n_0 = 0$ или $n_3 = 0$, то легко понять, когда группа с таким представлением гиперболична.

Таким образом, условия $n_1 = 0, n_0 \neq 0, n_3 \neq 0$ не являются ограничительными. В теореме 1.1 полностью разбирается случай $n_2 = 0$, а в теореме 1.2 – случай $n_2 \neq 0$ с некоторым дополнительным условием. В формулировке теоремы 1.2 аббревиатура H произведена от английского слова hyperbolic, а NH – от слова nonhyperbolic.

Теорема 1.1. Пусть $G = \langle a, b \,|\, a^{-1} b^k a^3 b^l \rangle$, где $k, l \neq 0$. Тогда группа G гиперболична в том и только том случае, когда $|k| \neq |l|$.

Теорема 1.2. Пусть $G = \langle a, b, \mid a^{-1}b^k a^2 b^l a b^m \rangle$, причем $k,\ l,\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Рассмотрим следующую группу условий (здесь $\varepsilon \in \{-1, 1\}$):

(0) $k = l + m$;

(1) $m = -k$ и $l = 2m$;

$(NH)_1$ $k = -l, |m| > 1$;

$(NH)_2$ $l = m, |k| > 1$;

$(NH)_3$ $(k, l, m) = (-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$;

$(H)_1$ $l = -k, k \neq \varepsilon, m = \varepsilon$;

$(H)_2$ $k = \varepsilon, l \neq -\varepsilon, m = l$.

Если выполнено одно из условий $(NH)_i$ или одно из условий (0),(1), то группа G негиперболична. Если выполнено одно из условий $(H)_i$, то G гиперболична. Если ни одно из условий (0), (1), $(NH)_i, (H)_i$ не выполняется и, кроме того, $k \neq l$, $m \neq -l$, то группа G гиперболична.

Методы, по существу, заимствованы из работы [7], но при этом они были модифицированы, что позволило значительно сократить объемы технической работы, неизбежно возникавшей при "лобовом" применении методов.

В §2 излагаются основы техники, используемой при доказательстве теорем 1 и 2. Процитируем необходимые определения и формулировки.

Пусть M — планарный клеточный комплекс, M^0, M^1, M^2 — множества его вершин, ребер, клеток. Клетка из M называется внутренней, если никакое ее ребро не лежит в ∂M. Степень вершины v, т.е. число ребер из M^1, инцидентных v, обозначим через $d(v)$. Степень клетки $\pi \in M^2$ — это число $d(\pi)$ ее вершин v таких, что $d(v) \geqslant 3$. Тогда M называется (p, q)*-картой*, если выполнены следующие условия:

(M1) для каждой внутренней клетки $\pi \in M^2$ имеем $d(\pi) \geqslant p$;

(M2) для каждой внутренней вершины v из M^0 имеем $d(v) = 2$ или $d(v) \geqslant q$.

Карта M называется *регулярной* (p, q)-картой, если в пунктах (M1), (M2) вместо нестрогого неравенства можно поставить равенство. *Радиус* $r(M)$ регулярной карты M определяется как $\max\{dist(v, \partial M) \mid v \in M^0\}$. С. Иванов и П. Шупп доказали следующую теорему.

Теорема 2.1 (см. [7]). *Существует такая функция* $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что выполнено следующее утверждение. Пусть* M *–* (p, q)*-карта, где* $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$, *и радиусы ее регулярных* (p, q)*-подкарт ограничены некоторым числом* K. *Тогда* $|M^2| \leqslant L(K)|\partial M|$.

Пусть группа G задается представлением $G = \langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$, где $\mathcal{A}$ – конечный алфавит, $\mathcal{R}$ – множество соотношений группы G, которые являются циклически редуцированными словами над алфавитом $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$. Карта N называется *диаграммой (ван Кампена) над группой G*, заданной представлением $\langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$, если ей поставлена в соответствие функция $\varphi : N^1 \to \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(L1) если $\varphi(e) = a$, то $\varphi(\overline{e}) = a^{-1}$;

(L2) если $\pi \in N^2$ и $\partial\pi = e_1 \dots e_l$ – граница клетки π, то слово $\varphi(\partial\pi) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_l)$ является некоторой циклической перестановкой слова R^ε, где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $R \in \mathcal{R}$.

Назовем ориентацию границы клетки из N^2 *положительной*, если она соответствует обходу границы против часовой стрелки и отрицательной в противном случае. Положительно ориентированную границу клетки из N^2 будем называть *контуром*.

Пусть π_1, π_2 – различные клетки диаграммы N и v – вершина, содержащаяся в $\partial\pi_1, \partial\pi_2$. Пара клеток π_1, π_2 называется *редуцируемой*, если $\varphi(\partial\pi_1) = \varphi(\partial\pi_2)^{-1}$, где обход каждого из контуров $\partial\pi_i$ начинается и завершается в вершине v.

Диаграмма N называется *редуцированной*, если она не содержит редуцируемых пар клеток.

Лемма ван Кампена. *Циклически редуцированное нетривиальное слово w над алфавитом $\mathcal{A}^\pm$ определяет единицу группы $G = \langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$ тогда и только тогда, когда существует редуцированная диаграмма M над G, такая, что w графически равно $\varphi(\partial M)$.*

Диаграмма N над группой G, заданной представлением $\langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$, называется *минимальной*, если для любой диаграммы M над G с тем же представлением и $\varphi(\partial N) = \varphi(\partial M)$ число клеток M не меньше числа клеток N.

Таким образом, число $d(w)$, определенное выше, равно числу клеток минимальной диаграммы для $w \underset{G}{=} 1$ и поэтому его естественно называть *площадью* слова w. Следовательно, неравенство $d(w) \leqslant L|w|$ является неравенством между площадью w и длиной w, то есть *периметром* соответствующей диаграммы для w.

Будем говорить, что группа G, заданная представлением $\langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R} \rangle$, удовлетворяет *условиям малых сокращений $C(p)$ и $T(q)$*, если любая редуцированная диаграмма N над G является $(p, q)-$картой.

Дадим также алгебраическое определение условия $C(p)$, которое используется в §3. Пусть $\mathcal{R}^*$ — множество всех циклических перестановок слов из $\mathcal{R}$ и обратных к ним. Слово r над $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^{-1}$ называется *куском* для представления $\langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R}\rangle$, если r является начальным подсловом двух различных слов из $\mathcal{R}^*$. Представление $\langle \mathcal{A} \,|\, \mathcal{R}\rangle$ удовлетворяет условию $C(p)$, если никакое слово из $\mathcal{R}^*$ не представимо в виде произведения менее чем p кусков.

Параграфы 3 и 4 главы 1 диссертации содержат доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Следующая теорема представляет собой мощный инструмент для доказательства гиперболичности групп, удовлетворяющих условиям малого сокращения.

Теорема 2.2 (см. [7]). *Конечно представленная группа с одним соотношением $G = \langle \mathcal{A} \,|\, R\rangle$, удовлетворяющая условиям малого сокращения $C(p)$ и $T(q)$, где $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$, гиперболична в том и только том случае, когда существует число K, ограничивающее радиус каждой регулярной (p, q)-подкарты произвольной минимальной диаграммы N над заданным представлением группы G, в которой нет вершин степени 2.*

Из-за отсутствия эффективного метода проверки минимальности диаграмм, на практике, при доказательстве теорем 1.1 и 1.2 удалось использовать только достаточное условие гиперболичности, то есть, ограниченность регулярных поддиаграмм. В тех случаях, когда это удавалось, доказывалась ограниченность регулярных поддиаграмм независимо от того, являются они минимальными или нет.

Если же для представления группы удалось построить бесконечную последовательность диаграмм строго возрастающего радиуса, то для применения теоремы 2.2 нужно ещё уметь доказывать их минимальность. Поэтому существование таких последовательностей служило лишь первым сигналом к тому, что группа скорее всего не является гиперболической, а для строгого доказательства негиперболичности применялись алгебраические методы.

Ниже перечисляются технические результаты, используемые при доказательстве негиперболичности.

Лемма 2.4 (см. [6]). *Свободная абелева группа ранга 2 не может быть подгруппой гиперболической группы.*

Лемма 2.5 (см. [22]). *Пусть G – группа с одним определяющим соотношением R. Тогда в G есть неединичные элементы конечного порядка в том и только том случае, когда слово R является степенью более короткого слова в свободной группе.*

Лемма 2.6 (см. [6]). *Пусть G – гиперболическая группа без круче-*

ния, $x, y \in G \setminus \{1\}$. Тогда, если $x^{-1}y^kx = y^l$ и $k \neq 0$, то $x^{-1}yx = y$ и $k = l$.

Лемма 2.7. *Пусть G – гиперболическая группа без кручения, $x, y \in G \setminus \{1\}$. Тогда, если $y^k = x^k$ и $k \neq 0$, то $x = y$.*

Общая методика доказательства негиперболичности такова: предполагалась гиперболичность данной группы (рассуждаем от противного), затем из соотношения группы на основе лемм 2.4-2.7 последовательно выводились соотношения $x^k = y^l$, $x = y$, затем методом Магнуса решения проблемы равенства слов в группе с одним соотношением (или даже более простыми наблюдениями) доказывалась невозможность равенства $x = y$ в группе G.

Следует отметить, что при доказательстве теоремы 1.2 был найден способ однозначного построения диаграмм ("змейка") для групп рассматриваемого вида, который позволил отождествить многие формально различные, а на деле совпадающие варианты построения диаграмм и существенно упростил проверку ограниченности регулярных (4,4)-диаграмм.

Глава 2. Глава 2 содержит классификацию по гиперболичности двупорожденных групп с одним соотношением длины 8. Эта классификация была получена автором совместно с О. В. Богопольским и А. А. Бутурлакиным в неразделимом соавторстве.

В определенном смысле, наугад выбранное представление с одним соотношением с вероятностью 1 определяет гиперболическую группу (см. по этому поводу [13]). То есть, негиперболических групп с одним соотношением сравнительно мало. Тем не менее, при малых длинах соотношения группы эта статистика может не подтверждаться (что и наблюдается в сводной таблице в конце главы 2).

Задача классификации групп с одним соотношением небольшой длины интересна также потому, что такие группы часто возникают в геометрии и бывает полезно уметь отвечать на вопрос об их гиперболичности или негиперболичности.

Параграфы 1, 2 содержат постановку задачи и необходимые понятия, по большей части приведенные в главе 1.

Методы доказательства гиперболичности (негиперболичности) в основном не отличаются от изложенных в главе 1. Вместе с тем есть отдельные интересные наблюдения и технические результаты, облегчающие во многих случаях классификацию. Например, в работе [26] О. В. Богопольским было доказано (на основе общих результатов Громова о гиперболических группах), что полупрямое расширение свободной группы ранга 2 $F_2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ с помощью ее автоморфизма α бесконечного порядка не является гиперболической группой. Таким образом, группы с одним соотношением представимые в виде указанного расширения, заведомо не являются гиперболическими.

Кроме того, при классификации использовался известный результат С. Герстена и Х. Шорта [4,5] , гласящий, что если конечно представленная группа G удовлетворяет условиям малого сокращения $C(p)\&T(q)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 2$, то она гиперболическая. Для проверки условий $C(p)\&T(q)$ для данного представления использовалась компьютерная программа, предоставленная А. А. Бутурлакиным. С помощью этой программы для каждого представления удалось вычислить соответствующие p и q и, используя затем результат Герстена и Шорта, определить, какие из рассматриваемых групп заведомо являются гиперболическими.

В некоторых случаях удавалось (возможно, после замены порождающих) прямо сослаться на результаты работы С. Иванова и П. Шуппа [7].

Методы демонстрируются в §2, §3 главы 2 на нескольких примерах, после чего (§4) приводится список всех заданий групп с двумя порождающими и циклически приведенным соотношением длины 8 (с точностью до переименования $a \rightleftharpoons b$, обращения порождающих $a \to a^{-1}$ и циклической перестановки определяющего соотношения). Каждое представление снабжено комментарием в виде знака "+" (группа гиперболична) или "–" (негиперболична) и, в тех случаях, когда это необходимо, коротким пояснением (замена порождающих, ссылка на соответствующий пример или теорему).

Разумеется, перечисленные ограничения на представления не гарантируют, что группы, задаваемые этими представлениями, различны, но у нас нет средств эффективной проверки изоморфности групп с одним соотношением, так как проблема изоморфизма в классе групп с одним соотношением не решена.

В параграфе 5 приводится с доказательством формула для подсчета числа циклически редуцированных слов длины n в свободной группе над алфавитом из k символов, которая позволила оценить число представлений, с которыми пришлось иметь дело.

В параграфе 6 в виде таблицы содержится статистическая информация о том сколько всего различных представлений с соотношением длины 8 (6564), сколько из них различных с точностью до циклической перестановки, переименования и обращения порождающих (83), а также приводится число гиперболических (негиперболических) представлений в каждой из двух указанных категорий, сколько из рассматриваемых гиперболических/негиперболических представлений, удовлетворяют данному условию $C(p)\&T(q)$.

Глава 3. В диссертацию вошел также еще один результат, не связанный напрямую с гиперболическими группами (глава 3, см. также [33]). Он посвящен экономной отделимости элементов свободной группы подгруппами конечного индекса. Как известно, любой нетривиальный элемент свободной группы отделяется некоторой подгруппой конечного индекса. Есть гипотеза О. В. Богопольского о том, что произвольный элемент w свободной группы F_n длины $\geqslant 2$ отделяется подгруппой индекса $\leqslant C \ln |w|$, где $|w|$ — длина приведенного слова w, C — некоторая константа, зависящая от n. В диссертации представлено доказательство этого утверждения для элементов $w \in F_n$, не принадлежащих коммутанту $[F_n, F_n]$ свободной группы F_n. При этом строится даже нормальная отделяющая подгруппа.

Получена оценка (более слабая) в общем случае: произвольный элемент $w \neq 1$ отделяется подгруппой индекса $\leqslant \frac{|w|}{2} + 2$. При доказательстве используется техника перечисления подгрупп свободной группы $F(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью накрытий букета n размеченных окружностей (эта техника изложена, например, в [20]).

Параграф 1 главы 3 содержит формулировку проблемы экономной отделимости и ее решение для элементов w, не принадлежащих коммутанту $[F_n, F_n]$ свободной группы F_n. Для получения логарифмической оценки в случаем $w \notin [F_n, F_n]$ используются некоторые элементарные факты из анализа и теории чисел.

Параграф 2 содержит доказательство отделимости произвольного элемента $w \neq 1$ подгруппой индекса $\leqslant \frac{|w|}{2} + 2$. Для этого достаточно показать, что существует накрытие листности $\leqslant \frac{|w|}{2} + 2$, такое, что поднятие пути w в это накрытие будет незамкнутым путем. Алгоритм поиска подходящего "размыкающего" накрытия начинается с некоторого стартового накрытия. Поиск осуществляется с помощью специальных операций I и II, которые позволяют получать из имеющихся накрытий новые накрытия.

Таким образом, по слову w всегда можно эффективно построить накрытие листности $\leqslant \frac{|w|}{2} + 2$, "размыкающее" путь с меткой w.

Я (автор) выражаю благодарность моему научному руководителю О. В. Богопольскому за помощь в первых шагах в математике как науке и постановку задач, определивших направление этих шагов.

Список литературы

[1] Bestvina M., Feighn M. *A combination theorem for negatively curved groups* // J. Diff. Geometry. 1992. № 35. P. 85–1001.

[2] Bestvina M., Feighn M. *Addendum and correction to: "A combination theorem for negatively curved groups"* // J. Diff. Geometry. 1996. V. 43. № 4. P. 783–788.

[3] Dahmani F., Groves D., *The isomorphism problem for toral relatively hyperbolic groups*, arXiv:math/0512605v3 [math.GR] 1 Jun 2008. 90 pages.

[4] Gersten S. M. and Short H. *Small cancellation theory and automatic groups* // Invent. Math. 1990. № 102. P. 305-334.

[5] Gersten S. M. and Short H. *Small cancellation theory and automatic groups* // Invent. Math. 1991. № 105. P. 641–662.

[6] Gromov M. *Hyperbolic groups* // in Essays in Group Theory, ed. S.M. Gersten, M.S.R.I. Springer. 1987. P. 75–263.

[7] Ivanov S.V. and Shupp P.E. *On the hyperbolicity of small cancellation groups and one-relator groups* // Trans. AMS. 1998. V. 350. № 5. P. 1851–1894.

[8] Khalid Bou-Rabee. *Quantifying residual finiteness* // Technical Report arXiv:0807.0862v2[math.GR], arxiv.org, 2008.

[9] Kharlampovich O. and Myasnikov A. *Hyperbolic groups and free constructions* // Trans. AMS. 1998. № 350. P. 571–613.

[10] Magnus W. *Über diskontinuerliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)* // J. reine angew. Math. 1930. № 163. P. 141–165.

[11] Malestein J., Putman A. *On the self-intersections of curves deep in the lower central series of a surface group* // arXiv, math.GT. Jan 2009. 12 pages, 2 figures.

[12] Newman B.B. *Some results on one-relator groups* // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. № 74. P. 568–571.

[13] Ol'shanskii A. Yu. *Almost every group is hyperbolic* // Internat. J. of Algebra Comput. 1992. № 2. P. 1–17.

[14] Rivin I. *Geodesics with one self-intersection, and other stories* // Technical Report arXiv:0901.2543v3 [math.GT], arxiv.org, 2009.

[15] Sela Z., *The isomorphism problem for hyperbolic groups I* // Ann. Math. 1995. V. 2. № 141. P. 217–283.

[16] Whitehead J.H.C. *On equivalent sets of elements in a free group* // Annals of Math. 1936. 2nd Ser. V. 37. № 4. P. 782–800.

[17] Айерленд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел* // М.: Мир, 1987.

[18] Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., *О гиперболичности некоторых групп с одним определяющим соотношением*, Чебышевский сборник, т. 2, 2001.

[19] Безверхняя Н. Б., *Гиперболичность некоторых двупорожденных групп с одним определяющим соотношением*, Дискретная математика, т. 14. вып. 3. 2002.

[20] Богопольский О. В. *Введение в теорию групп* // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[21] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп* // М.: Мир. 1980.

[22] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп* // М.: Наука. 1974.

[23] Михайловский К. В. Ольшанский А. Ю. *Некоторые конструкции, связанные с гиперболическими группами* // Московский государственный университет. 1994. препринт.

[24] Ольшанский А.Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах* // М.: Наука. 1989.

[25] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп* // Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск. 2002. Составители В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. 15–е издание.

Работы автора по теме диссертации

[26] Bogopolski O., Buskin N., Buturlakin A. *A classification, up to hyperbolicity of groups given by two generators and one relator of length 8* // Centre de Recerca Matematica. Bellaterra, Spain. 2007. preprint № 764. Available at: http://www.crm.cat

[27] Бускин Н. В. *Диаграммный метод проверки гиперболичности групп* // Материалы XLII международной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2004. С. 3.

[28] Бускин Н. В. *Исследование гиперболичности групп с одним соотношением* // Материалы XLIII международной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2005.

[29] Бускин Н. В. *Исследование гиперболичности групп с одним соотношением* // Сибирские электронные математические известия. 2007. Т. 4. С. 85–102.

[30] Бускин Н. В. *Вероятность порождения r элементами в свободной группе ранга n подгруппы ранга r* // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 2. С. 289–291.

[31] Бускин Н. В. *Вероятность порождения r элементами в свободной группе ранга n подгруппы ранга r* // Материалы XLVII международной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2009. С. 64.

[32] Бускин Н. В. *Экономичная отделимость в свободных группах* // Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск. 2009. препринт № 219.

[33] Бускин Н. В. *Экономная отделимость в свободных группах* // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 4. С. 765–771.

Бускин Николай Владиславович

Исследование гиперболичности групп с одним соотношением

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.10.09	Формат 60 x 84 1/16
Печать офсетная	Усл. печ. л. 1.0
Заказ №	Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск–90, ул.Пирогова 2