На правах рукописи

ШНЕЕР Всеволод Владиславович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2006

Работа выполнена в лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики СО РАН

научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Сергей Георгиевич Фосс

официальные оппоненты:
д.ф.-м.н., профессор Александр Иванович Саханенко
к.ф.-м.н., доцент Наталья Исааковна Чернова

ведущая организация:
Институт проблем передачи информации РАН

Защита состоится 23 августа 2006 г. в 15 часов на заседании Специализированного совета Д. 003.015.01 при Институте математики СО РАН по адресу:

630090, Новосибирск, Университетский проспект, 4, к. 417,
Институт математики СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан 14 июля 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.01 при Институте
математики СО РАН
д. ф.-м. н. Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотического поведения распределений различных характеристик случайных блужданий и однородных процессов с независимыми приращениями. Основное внимание уделяется случаю, когда распределение приращений процесса имеет так называемый (правый) «тяжелый хвост», т.е когда

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} = \infty \tag{1}$$

при всех $\lambda > 0$ (здесь X — типичное распределение приращения процесса). Асимптотическое поведение распределений большинства рассматриваемых характеристик хорошо известно в случае «легких хвостов», т. е. когда условие (1) не выполняется. Распределения с тяжелыми хвостами широко применяются для моделирования работы различных телекоммуникационных систем, а также для моделирования работы Интернета. Таким образом, рассматриваемые задачи являются важными с точки зрения теории массового обслуживания. Распределения с тяжелыми хвостами применяются также в теории риска для моделирования ситуации, когда в выборке из некоторого распределения может появиться один элемент, многократно превосходящий среднее значение распределения элементов выборки.

Цель работы: получить равномерные верхние оценки для вероятности попадания в интервал фиксированной длины суммами независимых и одинаково распределенных случайных величин, распределения которых имеют тяжелые хвосты. С помощью этих оценок найти асимптотику хвоста распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом. Изучить асимптотику хвоста распределения случайного времени, за которое однородный процесс с независимыми приращениями или случайное блуждание, стартующее из нуля, пересечет некоторый отрицательный уровень. В работе изучается также асимптотическое поведение вероятности попадания в интервал (конечный или бесконечный) для максимума случайного блуждания до момента выхода на отрицательную полуось.

Методика исследований. В работе используются прямые вероятностные методы в сочетании с известными результатами теории распределений с тяжелыми хвостами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на заседаниях объединенного семинара по теории вероятностей и математической статистике кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории того же названия Института математики СО РАН, на заседаниях научных семинаров Университета Хериота — Ватта (г. Эдинбург, Великобритания), ЕНС (ENS, г. Париж, Франция), Юрэндом (EURANDOM, г. Эйндховен, Нидерланды).

Публикации. По теме диссертации опубликованы четыре работы, еще одна работа подготовлена к публикации. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Объем диссертации 116 страниц. Она состоит из четырех глав и списка литературы, содержащего 79 наименований.

Содержание работы

Первая глава является введением. Она содержит обзор литературы и краткое описание основных результатов.

В главе 2 приводятся оценки для вероятности попадания в интервал (конечный или бесконечный) для суммы независимых и одинаково распределенных случайных величин. Полученные оценки применяются для нахождения асимптотики попадания в интервал для суммы случайных величин за независимое случайное время. Приведенные оценки используются также для нахождения асимптотики хвоста распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих неотрицательные значения и имеющих распределение F. Мы обозначаем через $F(x+\Delta)$ вероятность $\mathsf{P}(\xi_1 \in x+\Delta)$, где Δ — интервал вида $(0,T]\cap(0,\infty)$ при некотором $0 < T \leqslant \infty$, т. е.

$$\Delta = \begin{cases} (0,T], & \text{если} \quad T < \infty, \\ (0,\infty), & \text{если} \quad T = \infty. \end{cases}$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и пусть F^{*n} — распределение S_n. В главе 2 изучаются равномерные по x верхние оценки для отношений

$$\frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \equiv \frac{\mathsf{P}(S_n \in x+\Delta)}{\mathsf{P}(\xi_1 \in x+\Delta)}. \tag{2}$$

Заметим, что для $T = \infty$ отношение (2) имеет вид $\dfrac{\mathsf{P}(S_n > x)}{\mathsf{P}(\xi_1 > x)}$. Мы обозначаем через $\overline{G}(x)$ «хвост» произвольного распределения G, т. е. $\overline{G}(x) = G((x,\infty))$. В таких обозначениях $\overline{F}(x) = \mathsf{P}(\xi_1 > x)$ и $\overline{F^{*n}}(x) = \mathsf{P}(S_n > x)$.

Известно (см., например, [13]), что если случайная величина ξ_1 неотрицательна, а ее распределение F *субэкспоненциально* (см. определение 1 ниже), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $K \equiv K(F,\varepsilon)$ такое, что при всех n

$$\sup_x \frac{\mathsf{P}(S_n > x)}{\mathsf{P}(\xi_1 > x)} \equiv \sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant K(1+\varepsilon)^n. \tag{3}$$

Определение 1. Распределение F на $\mathbb{R}_+$ называется *субэкспоненциальным* (*принадлежит классу* $\mathcal{S}$), если $\overline{F}(x) > 0$ для всех x и

$$\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

(мы говорим, что $a(x) \sim b(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty} a(x)/b(x) = 1$).

Распределение F на $\mathbb{R}$ называется *субэкспоненциальным*, если субэкспоненциально распределение F^+ с функцией распределения $F^+(x) = F(x)\,\mathbf{I}(x \geqslant 0)$.

Пусть σ — случайная величина, принимающая натуральные значения и не зависящая от $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$. Из (3) можно получить (см. [17], теорема A3.20), что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\sigma}}(x)}{\overline{F}(x)} = \mathsf{E}\sigma,$$

если случайная величина ξ_1 неотрицательна, и $\mathsf{E}(1+\varepsilon)^\sigma < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В работе [12] рассматриваются так называемые Δ-*субэкспоненциальные распределения* — обобщение понятия субэкспоненциальности на случай произвольного (не обязательно бесконечного) интервала Δ вида $(0, T] \cap (0, \infty)$.

Определение 2. Распределение F является Δ-*субэкспоненциальным* (*принадлежит классу* $\mathcal{S}_\Delta$), если $F(x+\Delta) > 0$ при всех достаточно больших x, $F(x+t+\Delta) \sim F(x+\Delta)$ при $x \to \infty$ для любого фиксированного t и

$$F^{*2}(x+\Delta) \sim 2F(x+\Delta) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В случае $T = \infty$ определение 2 совпадает с определением класса $\mathcal{S}$ субэкспоненциальных распределений.

В [12] показано, что основные свойства субэкспоненциальных распределений могут быть обобщены на случай произвольного конечного интервала Δ. В частности, если распределение F является Δ-субэкспоненциальным, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_0 = x_0(F, \varepsilon)$ и $K = K(F, \varepsilon)$ такие, что при всех n

$$\sup_{x > x_0} \frac{F^{*n}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} \;\leqslant\; K(1+\varepsilon)^n. \tag{4}$$

Из (4) следует (см. [12], теорема 2), что если распределение F является Δ-субэкспоненциальным и σ — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и такая, что $\mathsf{E}(1+\varepsilon)^{\sigma} < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F^{*\sigma}(x+\Delta)}{F(x+\Delta)} = \mathsf{E}\sigma.$$

В главе 2 оценки (3) и (4) уточняются для некоторых подклассов субэкспоненциальных и Δ-субэкспоненциальных распределений. Параграфы 2.1—2.4 посвящены оценкам для хвостов распределений сумм случайных величин (случай $T = \infty$). В параграфе 2.5 эти оценки применяются для нахождения асимптотики хвоста распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом. В параграфе 2.6 некоторые оценки, полученные для хвостов, обобщаются на вероятности попадания в конечный интервал (случай $T < \infty$) для суммы случайных величин.

Рассмотрим следующие известные классы распределений.

Определение 3. Распределение F называется *распределением с длинным хвостом* (*принадлежит классу* $\mathcal{L}$), если $\overline{F}(x) > 0$ для всех x и $\overline{F}(x+t) \sim \overline{F}(x)$ для некоторого (и, тем самым, для всех) $t > 0$ при $x \to \infty$.

Определение 4. Распределение F называется *надстепенным* (*принадлежит классу* $\mathcal{D}$), если $\sup\limits_{x} \dfrac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} < \infty$ для некоторого (и, тем самым, для всех) $t \in (0,\ 1)$.

Одним из классов распределений, рассматриваемых в главе 2, является класс $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$. Известно (см., например, [17, стр. 50]), что если распределение F принадлежит классу $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$, то F принадлежит классу $\mathcal{S}$. *Распределение Парето* (распределение с хвостом $\overline{F}(x) = \left(\dfrac{\kappa}{\kappa+x}\right)^{\beta}$, где $\kappa,\ \beta > 0$) принадлежит классу $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$. Также этому классу принадлежат распределения F такие, что функция $\overline{F}(x)$ является *правильно меняющейся* на бесконечности, т. е. $\overline{F}(x) = x^{-\beta} l(x)$, где $l(x)$ — *медленно меняющаяся функция* (т. е. $l(tx) \sim l(x)$ при $x \to \infty$ для любого фиксированного $t > 0$).

Верхние оценки для отношений (3) в случае, когда распределение F принадлежит классу $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$, приведены в параграфе 2.1.

Для распределения F из класса $\mathcal{D}$ обозначим

$$L_n = \sup_x \frac{\overline{F}(x/n)}{\overline{F}(x)}.$$

В параграфе 2.1 доказано следующее свойство:

Лемма 1. *$L_{mn} \leqslant L_m L_n$ для любых $m, n \geqslant 2$. Отсюда, в частности, следует, что существует*

$$l_F = \lim_{n\to\infty} \log_n L_n.$$

Здесь через $\log_n$ мы обозначаем логарифм по основанию n. Отметим, что для распределения Парето $l_F = \beta$.

Для распределений из класса $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(F,\varepsilon)$ такое, что при всех n*

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant K n^{1+l_F+\varepsilon}.$$

Из теоремы 1 с помощью формулы полной вероятности и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости нетрудно получить следующее утверждение:

Следствие 1. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют распределение F, принадлежащее классу $\mathcal{L}\cap\mathcal{D}$, и пусть σ — не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что $\mathsf{E}\sigma^{1+l_F+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\sigma}}(x)}{\overline{F}(x)} = \mathsf{E}\sigma.$$

Приведем теперь определение известного класса распределений, введенного А.В. Нагаевым в [5] и использованного затем во многих работах. Распределения из этого класса изучаются в параграфах 2.2 и 2.3.

О п р е д е л е н и е 5. Распределение F *принадлежит классу* $\mathcal{SC}$, если для функции $Q(x) = -\ln \overline{F}(x)$ выполнены следующие условия:

$$\frac{Q(x)}{\ln x} \to \infty \text{ при } x \to \infty,$$

существуют числа $x_0 > 0$, $0 < \lambda_1 < 1$ и $0 < \lambda_2 < 1$ такие, что

$$\frac{Q(x) - Q(u)}{x - u} \leqslant \lambda_1 \frac{Q(x)}{x} \tag{5}$$

при всех $x > x_0$ и $\lambda_2 x \leqslant u \leqslant x$.

К сожалению, условие (5), ключевое в определении 5, является трудно проверяемым. В параграфе 2.2 приводятся некоторые условия, необходимые и достаточные для его выполнения.

Т е о р е м а 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(А) Существуют числа $x_0 > 0$, $0 < \lambda_1 < 1$ *и* $0 < \lambda_2 < 1$ *такие, что (5) имеет место при всех* $x > x_0$ *и* $0 < u \leqslant \lambda_2 x$.

(Б) Существует неубывающая вогнутая дифференцируемая функция $f(x)$ *такая, что*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \lambda < 1,$$

и существует $x_0 > 0$ *такое, что функция* $Q(x)/f(x)$ *является невозрастающей при* $x > x_0$.

(В) Существуют числа x_0, $u_0 > 0$, *а также* $0 < \lambda_1 < 1$ *такие, что (5) имеет место при всех* $x > x_0$ *и* $0 < u \leqslant u_0$.

З а м е ч а н и е 1. С помощью теоремы 2 нетрудно показать, что распределения Вейбулла с $\overline{F}(x) = e^{-x^{\beta}}$ при $0 < \beta < 1$, а также распределения с $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^{\beta} x}$ при $c_1, c_2 > 0$ и $\beta > 1$ принадлежат классу $\mathcal{SC}$. Для этого достаточно заметить, что эти распределения удовлетворяют условию (Б) с функцией $f(x) = Q(x) = -\ln \overline{F}(x)$.

В параграфе 2.3 приводятся оценки для отношений (3) в случае, когда распределение F принадлежит классу $\mathcal{SC}$. Всюду далее без ограничения общности предполагается, что условие (Б) теоремы 2 выполнено с функцией $f(x)$ такой, что $\sup Q(x)/f(x) \leqslant 1$.

Т е о р е м а 3. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathcal{SC}$. Тогда для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (Б) теоремы 2, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $K = K(F,\, f,\, \varepsilon)$ такое, что при всех n*

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant K e^{(1+\varepsilon) f\left(n^{1+\varepsilon}\right)}.$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta}$, $0 < \beta < 1$, $x > 0$. Тогда распределение F удовлетворяет условию (Б) с функцией $f(x) = x^\beta$ и из теоремы 3 следует существование такой постоянной K, что*

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant K e^{n^{\gamma+\varepsilon}}.$$

С л е д с т в и е 3. *Пусть $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^\beta x}$ при $c_1, c_2 > 0$, $\beta > 1$, $x > 0$. Тогда из теоремы 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует K такое, что*

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant K e^{c_2 (1+\varepsilon) \ln^\beta n}.$$

З а м е ч а н и е 2. Предположим, что $\xi_1 \geqslant 1$ п. н. Тогда $\overline{F^{*n}}(x) = 1$ при $x \leqslant n$ и

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant \sup_{x \leqslant n} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = \sup_{x \leqslant n} \frac{1}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{\overline{F}(n)} = e^{Q(n)}.$$

Отметим, что оценка сверху, доказанная в теореме 3, и оценка снизу, приведенная в данном замечании, весьма близки.

Можно также получить следствие, аналогичное следствию 1.

С л е д с т в и е 4. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют распределение F, принадлежащее классу $\mathcal{SC}$, и пусть σ — не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что $\mathsf{E} e^{(1+\varepsilon) f\left(\sigma^{1+\varepsilon}\right)} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой функции f, удовлетворяющей условию (Б) теоремы 2. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*\sigma}}(x)}{\overline{F}(x)} = \mathsf{E}\sigma.$$

В параграфе 2.4 приводятся утверждения о «равномерности» оценок, установленных в параграфах 2.1 и 2.3, в некотором подходящем классе распределений. Эти оценки применяются затем в параграфе 2.5 для исследования асимптотики хвоста распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом.

Последовательность $Y = \{Y_n\}_{n\geqslant 1}$, принимающая значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$, называется регенерирующей, если существует возрастающая последовательность случайных величин $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$, принимающих натуральные значения, таких что для $\sigma_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geqslant 1$ случайные вектора

$$\{\sigma_n, Y_{T_{n-1}+1}, \dots, Y_{T_n}\}, \quad n \geqslant 1$$

независимы при $n \geqslant 1$ и одинаково распределены при $n \geqslant 2$. Для упрощения формулировок и доказательств мы рассматриваем лишь случай, когда первый цикл $\{\sigma_1, Y_1, \dots, Y_{T_1}\}$ имеет то же распределение, что и последующие.

Для каждого $n \geqslant 1$ введем семейство вещественнозначных случайных величин $\{\xi_n^y\}_{y\in\mathcal{Y}}$, не зависящих от Y. Предположим также, что семейства $\{\xi_n^y\}_{y\in\mathcal{Y}}$ независимы по n и при всех n случайные величины ξ_n^y имеют функцию распределения $F_y(x) = \mathsf{P}(\xi_1^y \leqslant x)$. Рассмотрим *случайное блуждание, управляемое регенерирующей последовательностью* Y:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{Y_i}.$$

Пусть $M_n = \max_{0\leqslant i\leqslant n} S_i$, $M = \sup_{n\geqslant 0} S_n$. Мы изучаем асимптотику вероятности $\mathsf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$ при некоторых условиях, гарантирующих, что $M < \infty$ п. н.

Введем следующее условие:

(A) $\quad \overline{F}_y(x) \sim c(y)\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ для некоторой неотрицательной измеримой функции $c(y)$.

Заметим, что если (A) выполнено, то выполнено также следующее условие:

(Б) $\quad \overline{F}_y(x) \leqslant b(y)\,\overline{F}(x)$ при всех x и при всех $y \in \mathcal{Y}$ для некоторой измеримой функции $b(y) \geqslant c(y)$.

Обозначим
$$B_{\sigma_1} = \max_{1\leqslant k\leqslant \sigma_1} b(Y_k).$$
Предположим, что $\mathsf{E}\sigma_1 < \infty$. Положим при каждом $B \in \mathcal{B}$
$$\pi(B) = \frac{1}{\mathsf{E}\sigma_1}\,\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{\sigma_1} \mathbf{I}\{Y_i \in B\}\right)$$
и предположим, что

(В) $\quad C = \int_{\mathcal{Y}} c(u)\pi(du) < \infty.$

Пусть $\mathsf{E}S_{\sigma_1} = -a < 0$. Заметим, что в этом случае $M < \infty$ п. н. В работе [18] показано, что
$$\mathsf{P}(M > x) \sim \frac{C\cdot \mathsf{E}\sigma_1}{a}\overline{F^s}(x), \tag{6}$$
если *интегральное распределение* F^s (распределение с хвостом $\overline{F^s}(x) = \min\left\{1,\ \int\limits_x^\infty \overline{F}(t)dt\right\}$) субэкспоненциально, выполнены условия (А), (Б) и (В) и если, кроме того,
$$b \equiv \sup_y b(y) < \infty. \tag{7}$$

Заметим, что (7) влечет $B_{\sigma_1} \leqslant b$ п. н. В приводимых ниже теоремах формулируются условия, достаточные для выполнения соотношения (6) в отсутствие (7).

Теорема 4. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$ и выполнены условия* (А) и (В)*. Если для некоторой измеримой функции $b(y) \geqslant c(y)$ выполнено условие* (Б)*, а также*
$$\mathsf{E}B_{\sigma_1}\sigma_1^{1+l_F+\varepsilon} < \infty$$
для некоторого $\varepsilon > 0$, то
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(S_{\sigma_1} > x)}{\overline{F}(x)} = C\cdot \mathsf{E}\sigma_1. \tag{8}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathcal{SC}$, и выполнены условия* (А) и (В). *Если для некоторой измеримой функции $b(y) \geqslant c(y)$ выполнено условие* (Б), *а также*

$$\mathsf{E}e^{B^{\varepsilon}_{\sigma_1}} < \infty, \quad \text{и} \quad \mathsf{E}e^{(1+\varepsilon)f(\sigma_1^{1+\varepsilon})} < \infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (Б) теоремы 2, то имеет место (8).

Т е о р е м а 6. *Пусть $\mathsf{E}S_{\sigma_1} = -a < 0$. Тогда в условиях теоремы* 4 *или теоремы* 5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(M > x)}{\overline{F^s}(x)} = \frac{C\cdot \mathsf{E}\tau_1}{a}.$$

Таким образом, по сравнению с ранее известными результатами, в теореме 6 условие (7) ограниченности функции $b(y)$ заменено некоторыми моментными ограничениями на длины циклов управляющего процесса.

В параграфе 2.6 рассматриваются обобщения классов распределений $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$ и $\mathcal{SC}$ на случай произвольного $T > 0$. Другими словами, мы вводим два класса распределений, $\mathcal{L}_\Delta\bigcap\mathcal{D}_\Delta$ и $\mathcal{SC}_\Delta$, которые являются подклассами класса $\mathcal{S}_\Delta$ (для класса $\mathcal{L}_\Delta\bigcap\mathcal{D}_\Delta$ это следует из леммы 12 статьи [12], для класса $\mathcal{SC}_\Delta$ это доказано в параграфе 2.6 настоящей работы). В случае $T = \infty$ эти новые классы совпадают с классами $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{D}$ и $\mathcal{SC}$, соответственно. В параграфе 2.6 для этих классов распределений при $0 < T < \infty$ приводятся равномерные по x оценки для отношений (2), уточняющие (4).

Доказательства основных утверждений главы 2 приведены в параграфе 2.7.

Основным результатом главы 3 является нахождение асимптотики вероятности попадания в конечный интервал для максимума случайного блуждания до момента выхода на отрицательную полуось.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с распределением F. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geqslant 1. \tag{9}$$

Обозначим через
$$\nu = \min\{n \geqslant 1 : S_n \leqslant 0\}, \quad M_\nu = \max_{0 \leqslant i \leqslant \nu} S_i$$
первый (нижний) лестничный момент и максимум случайного блуждания до этого момента, соответственно. Предположим, что $\mathsf{E}\xi_1 = -a < 0$. Известно (см., например, [9, Глава XII]), что в этом случае $\mathsf{E}\nu < \infty$ и $M_\nu < \infty$ п. н. В главе 3 мы изучаем локальную асимптотику распределения M_ν, т. е. асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}(M_\nu \in (x, x+T])$ при $x \to \infty$, где $0 < T < \infty$ — фиксированное число.

Приведем определение класса распределений, введенного в [20].

Определение 6. Распределение F *принадлежит классу* $\mathcal{S}^*$, если $\overline{F}(x) > 0$ для всех x и
$$\int_0^x \overline{F}(x-y)\overline{F}(y)dy \ \sim \ 2m^+\overline{F}(x),$$
где $m^+ = \int_0^\infty \overline{F}(y)dy < \infty$.

В [10] рассматривается асимптотика хвоста распределения M_ν (асимптотика вероятности $\mathbf{P}(M_\nu > x)$). В этой работе (см. также исправленный вариант доказательства в [11, теорема X.9.4]) доказано, что если F принадлежит $\mathcal{S}^*$, то
$$\mathbf{P}(M_\nu > x) \ \sim \ \mathsf{E}\nu\overline{F}(x) \tag{10}$$
при $x \to \infty$. В [19] показано, что асимптотическая эквивалентность (10) остается верной, если заменить ν на произвольный момент остановки с конечным математическим ожиданием.

Известно (см. [20]), что если распределение F принадлежит классу $\mathcal{S}^*$, то оно субэкспоненциально. В главе 3 введен новый класс распределений, являющийся естественным обобщением класса $\mathcal{S}^*$ на случай произвольного интервала $\Delta = (0, T] \cap (0, \infty)$.

Определение 7. Распределение F *принадлежит классу* $\mathcal{S}^*_\Delta$, если оно принадлежит классу $\mathcal{L}_\Delta$, $m^+ < \infty$ и
$$\int_0^{x/2} F(x-y+\Delta)\overline{F}(y)dy \ \sim \ m^+F(x+\Delta) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В параграфе 3.1 приводится ряд свойств класса $\mathcal{S}^*$, аналогичных основным свойствам класса $\mathcal{S}^*_\Delta$. В частности, если распределение F принадлежит классу $\mathcal{S}^*_\Delta$, то оно является Δ-субэкспоненциальным.

Основным результатом главы 3 является следующая теорема, доказанная в параграфе 3.2.

Теорема 7. *Пусть* $F \in \mathcal{S}^*_\Delta$ *и* $\left(\overline{F}(x)\right)^2 = o(F(x+\Delta))$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(M_\nu \in x+\Delta) \sim \mathsf{E}\nu F(x+\Delta). \tag{11}$$

Параграф 3.3 содержит доказательства лемм, сформулированных в параграфе 3.1. В параграфе 3.4 приведен пример, показывающий, что, в отличие от случая $T=\infty$, при $T<\infty$ асимптотика (11) может не иметь места для произвольного момента остановки с конечным средним.

В главе 4 получена асимптотика хвоста распределения времени пересечения фиксированной границы случайным блужданием или однородным процессом с независимыми приращениями. В этой главе рассматриваются случайные величины, имеющие распределения как с тяжелыми, так и с легкими хвостами. В главе 4 приводятся также новые результаты о больших уклонениях сумм случайных величин с распределениями, имеющими тяжелые хвосты.

Пусть $\{S_n\}$ — случайное блуждание, определенное в (9). Для каждого $x \geqslant 0$ рассмотрим момент остановки

$$\nu_x = \min\{n \geqslant 1 : \ S_n < -x\}.$$

Предположим, что $\mathsf{E}\xi_1 = -a < 0$. В таком случае $\nu_x < \infty$ п. н. для любого $x \geqslant 0$. Асимптотика для $\mathsf{P}(\nu_x > t)$ при $t \to \infty$ при фиксированном x изучалась во многих работах. В [16] показано, что

$$\mathsf{P}(\nu_0 > n) \sim \mathsf{P}(S_n \geqslant 0)/n,$$

если правые части при различных n образуют субэкспоненциальную последовательность (см. определение 8 в случае $\gamma = 0$). В [15] и [14] асимптотика для ν_x получена в случае $x > 0$. В этих работах рассмотрены три различных класса распределений ξ_1, и для каждого из этих классов показано, что вероятность $\mathsf{P}(\nu_x > n)$ асимптотически пропорциональна $\mathsf{P}(S_n \geqslant 0)/n$. В [1] рассмотрен случай, когда ξ_1 имеет семиэкспоненциальное распределение (распределение с хвостом $\overline{F}(x) = e^{-x^\beta l(x)}$, где $\beta \in (0,1)$, а $l(x)$ — дифференцируемая медленно меняющаяся функция такая, что $l'(x) = o(l(x)/x)$). В этой работе показано, что если $\beta < 1/2$, то хвост распределения ν_x также пропорционален $\mathsf{P}(S_n \geqslant 0)/n$. Заметим, что если распределение F является семиэкспоненциальным с параметром $\beta < 1/2$, то $e^{-\sqrt{t}} = o(\overline{F}(t))$ при $t \to \infty$ (в этом случае мы говорим, что хвост распределения F *тяжелее* $e^{-\sqrt{t}}$). Асимптотическое поведение хвоста распределения ν_x для случая, когда хвост распределения F *легче* $e^{-\sqrt{t}}$ (т. е. $\overline{F}(t) = o(e^{-\sqrt{t}})$), но тяжелее любого экспоненциального, до настоящего времени было неизвестно. Однако, как любезно сообщил автору А.А. Могульский, им подготовлена к печати работа [3], где независимо найдена асимптотика для $\mathsf{P}(\nu_x > t)$ в случае, когда x зависит от t, при условии, что распределение F является семиэкспоненциальным с параметром $\beta \in (0,1)$.

Рассмотрим процессы с непрерывным временем. Пусть $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ — однородный процесс с независимыми приращениями. Для каждого $x > 0$ обозначим через $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 :\ X_t < -x\}$ время пересечения границы $-x$. Всюду в главе 4 предполагается, что $X_t \to -\infty$ п. н. Согласно критерию Рогозина (см. [7]) $X_t \to -\infty$ п. н. тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty t^{-1}\mathsf{P}(X_t > 0)\,dt < \infty.$$

Из этого предположения следует, что τ_x является собственной случайной величиной с конечным математическим ожиданием:

$$\tau_x < \infty, \quad \mathsf{E}\tau_x < \infty.$$

В главе 4 изучаются асимптотики вероятностей

$$\mathsf{P}(\tau_x > t) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(\nu_x > t) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

при фиксированном значении $x > 0$.

Нам понадобится следующее определение.

О п р е д е л е н и е 8. Последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ принадлежит классу $\mathcal{S}s(\gamma)$ с $\gamma\geqslant 0$, если $a_n>0$ для всех достаточно больших n и

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-1}/a_n = e^{\gamma},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{*2}(n)}{a_n}\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i a_{n-i}}{a_n}=2d=2\sum_{i=0}^{\infty}a_i e^{\gamma i}.$$

Класс $\mathcal{S}s:=\mathcal{S}s(0)$ (с условием $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=1$) называется классом субэкспоненциальных последовательностей.

Следующая теорема является основным результатом главы 4. Она позволяет получить асимптотику для хвостов распределений τ_x и ν_x при условиях, одинаковых для однородных процессов с независимыми приращениями и для случайных блужданий.

Т е о р е м а 8. *Пусть X_t — однородный процесс с независимыми приращениями или случайное блуждание. Пусть последовательность*

$$\frac{\mathsf{P}(X_n>0)}{n},\quad n\in\mathbf{N}$$

принадлежит классу $\mathcal{S}s(\gamma)$. Предположим также, что при некотором $\alpha\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{P}(X_n>0)}{\mathsf{P}(X_n>y)}=e^{\alpha y}$$

для любого фиксированного y. Тогда, если X_t — однородный процесс с независимыми приращениями, то

$$\mathsf{P}(\tau_x>t)\quad\sim\quad V(x)e^{-\gamma(t-[t])}\frac{\mathsf{P}(X_{[t]}>0)}{t}$$

для любого $x>0$, являющегося точкой непрерывности функции

$$V(x)\equiv\begin{cases}\mathsf{E}\tau_x, & \textit{если}\quad \gamma=\alpha=0,\\ e^{\alpha x}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{\gamma t}\mathsf{E}\{e^{\alpha N_t};\ |N_t|\leqslant x\}\,dt & \textit{иначе.}\end{cases}$$

Если же X_n — случайное блуждание, то

$$\mathsf{P}(\tau_x>n)\quad\sim\quad V_{rw}(x)\frac{\mathsf{P}(X_n\geqslant 0)}{n}$$

для любого $x > 0$, являющегося точкой непрерывности функции

$$V_{rw}(x) = \begin{cases} \mathsf{E}\nu_x, & \text{\textit{если}} \quad \gamma = \alpha = 0, \\ e^{\alpha x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{\gamma k} \mathsf{E}\{e^{\alpha N_k};\ |N_k| \leqslant x\} & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

Таким образом, задача о нахождении асимптотики хвостов распределений τ_x и ν_x сводится к изучению больших уклонений для X_n и S_n, соответственно.

Теорема 8 позволяет, в частности, получить асимптотику для хвоста распределения длительности периода занятости в так называемой системе обслуживания $M/G/1$. Нетрудно заметить (это показано в параграфе 1.6 диссертации), что для системы обслуживания $M/G/1$ длительность периода занятости системы с начальной работой x совпадает с моментом пересечения границы $-x$ для обобщенного пуассоновского процесса с неотрицательными скачками и с отрицательным сносом. Отметим, что методы получения указанной асимптотики не зависят от того, какие (тяжелые или легкие) хвосты имеют распределения времен обслуживания. Кроме того, впервые удалось получить асимптотику хвоста распределения длительности периода занятости в случае, когда хвост распределения времени обслуживания тяжелее любого экспоненциального и легче, чем $e^{-\sqrt{t}}$.

Как уже было сказано выше, задача об асимптотике $\mathsf{P}(\tau_x > t)$ с помощью теоремы 8 сводится к задаче о больших уклонениях для случайных блужданий. Другими словами, для нахождения асимптотики хвоста распределения τ_x достаточно найти асимптотику

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > na + b)$$

при $n \to \infty$, где $a > 0$, $\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i$ и $\mathsf{E}\widetilde{\xi}_1 = 0$. Исследованию асимптотики таких вероятностей посвящено множество работ. Как было отмечено многими авторами, для этой задачи также естественно выделить два подкласса распределений с тяжелыми хвостами: те, у которых $\overline{F}(t) = o\big(e^{-\sqrt{t}}\big)$ (хвост распределения F легче, чем $e^{-\sqrt{t}}$) и те, для которых $e^{-\sqrt{t}} = o(\overline{F}(t))$ (хвост распределения F тяжелее, чем $e^{-\sqrt{t}}$). Каждый из этих подклассов распределений рассматривается в параграфе 4.2 отдельно. В п. 4.2.1 показано, что для распределений с хвостами тяжелее $e^{-\sqrt{t}}$ при некоторых дополнительных предположениях

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > na) \ \sim \ n\mathsf{P}(\widetilde{\xi}_1 > na).$$

В [4] эта асимптотическая эквивалентность доказана для правильно меняющихся распределений. В [2] тот же результат доказан для семиэкспоненциальных распределений. В [8] показано, что указанный результат верен для достаточно широкого класса распределений, включающего как правильно меняющиеся, так и семиэкспоненциальные распределения. В п.4.2.1 мы доказываем асимптотическую эквивалентность $\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > na+b) \sim n\mathsf{P}(\widetilde{\xi}_1 > na+b)$ при $n \to \infty$, $a > 0$ в условиях, включающих все ранее рассматривавшиеся случаи.

Теорема 9. *Пусть* $\mathsf{E}\widetilde{\xi}_1 = 0$ *и* $\mathsf{E}|\widetilde{\xi}_1|^\kappa < \infty$ *для некоторого* $\kappa \in (1,2]$. *Предположим, что*

$$\frac{\overline{F}(t-t^{1/\kappa})}{\overline{F}(t)} \to 1 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{12}$$

и, кроме того,

$$\varepsilon(n) \equiv \sup_{t \geqslant 2n^{1/\kappa}} \frac{\mathsf{P}(\xi_1 > n^{1/\kappa},\ \xi_2 > n^{1/\kappa},\ S_2 > t)}{\overline{F}(t)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{13}$$

при $n \to \infty$. *Тогда при любых* $a > 0$ *и* b

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > na+b) \ \sim \ n\mathsf{P}(\widetilde{\xi}_1 > na+b).$$

Рассмотрим теперь случай, когда хвост распределения F тяжелее любого экспоненциального, но легче, чем $e^{-\sqrt{t}}$. Мы используем следующий результат:

Утверждение 1. ([8, Теорема 5a]) *Пусть* $\mathsf{P}(\widetilde{\xi}_1 > y) = e^{-Q(y)}$ *при* $y \to \infty$ *с дважды дифференцируемой функцией* Q *такой, что* $Q''(y)$ *не убывает при for* $y \geqslant y_o$ *и* $y\,Q''(y) \sim (\beta-1)Q'(y)$ *при* $y \to \infty$ *для некоторого* $\beta \in (1/2, 1)$. *Положим*

$$k = \max\left\{l \in \{1,2,\ldots\} :\ \limsup_{z\to\infty} \frac{Q(z)}{z^{l/(l+1)}} > 0\right\}.$$

Пусть

$$\mathsf{E}\widetilde{\xi}_1 = 0, \quad \mathsf{E}\widetilde{\xi}_1^2 = 1, \quad \mathsf{E}|\widetilde{\xi}_1|^{k+3} < \infty,$$

$$R(y) = Q(y) + \frac{(t-y)^2}{2n} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i-1} \frac{(t-y)^{i+2}}{n^{i+1}},$$

где λ_i — коэффициенты последовательности Крамера (см. [6]). Пусть y_* — максимальное решение уравнения $R'(y) = 0$. Тогда $y^* \leqslant t - \sqrt{n}$ и

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > t) \sim n\sqrt{\frac{1}{nR''(y_*)}} \exp\{-R(y_*)\} \quad \text{при } n \to \infty \tag{14}$$

равномерно по $t > 1.6\eta(n)$, где $\eta(z)$ такова, что $\dfrac{\eta^2(z)}{Q(\eta(z))} \sim z$ при $z \to \infty$.

В приведенном выше утверждении асимптотика вероятности $\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > t)$ находится в терминах максимального решения некоторого уравнения, возможность нахождения которого в явном виде, вообще говоря, является проблематичной. Однако, в п. 4.2.2 мы показываем, что при $t = na + b$ эта асимптотика может быть найдена в явном виде.

Лемма 2. *В условиях утверждения 1 положим $t = na + b$. Определим последовательность*

$$y_n^{(0)} = na, \quad y_n^{(j)} = y_n^{(j-1)} - nR'(y_n^{(j-1)}).$$

Тогда для любого $j \geqslant 1/(2k)$

$$\mathsf{P}(\widetilde{S}_n > na + b) \sim \exp\{-R(y_n^{(j)})\} \quad \text{при } n \to \infty.$$

В п.4.2.3 приведены известные результаты о больших уклонениях сумм случайных величин, имеющих распределения с легкими хвостами.

Параграф 4.3 содержит следствия теоремы 8 и утверждений параграфа 4.2. Приведем некоторые из результатов параграфа 4.3.

Теорема 10. *Пусть X_t — однородный процесс с независимыми приращениями или случайное блуждание. Предположим, что*

$\mathsf{E}|X_1|^\kappa < \infty$ *при некотором* $\kappa \in (1,2]$ *и для распределения* X_1 *выполнены условия (12) и (13). Пусть* $\mathsf{E}X_1 = -a < 0$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(\tau_x > t) \;\sim\; \mathsf{E}\tau_x \mathsf{P}(X_1 > ta) \quad \text{при} \quad t \to \infty;$$
$$\mathsf{P}(\nu_x > n) \;\sim\; \mathsf{E}\nu_x \mathsf{P}(X_1 > na) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В следующей теореме изучается случай, когда хвост распределения X_1 тяжелее любого экспоненциального хвоста (т. е. распределение X_1 имеет тяжелый хвост), но легче, чем $e^{-\sqrt{t}}$.

Теорема 11. *Пусть* X_t — *однородный процесс с независимыми приращениями или случайное блуждание. Предположим, что* $\mathsf{E}X_1 = -a < 0$ *и для распределения случайной величины* $X_1 + a$ *выполнены условия теоремы 5a из [8]. Тогда*

$$\mathsf{P}(\tau_x > t) \;\sim\; \mathsf{E}\tau_x \frac{\mathsf{P}(X_{[t]} > 0)}{[t]} \quad \text{при} \quad t \to \infty;$$
$$\mathsf{P}(\nu_x > n) \;\sim\; \mathsf{E}\nu_x \frac{\mathsf{P}(S_n > 0)}{n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С помощью леммы 2 указанную асимптотику можно получить в явном виде.

Рассмотрим теперь так называемый классический случай (таким принято называть случай, когда выполнены условия теоремы, приведенной ниже). Пусть $m(s) = \mathsf{E}e^{sX_1}$ — производящая функция моментов для X_1.

Теорема 12. *Предположим, что* α — *решение уравнения* $m'(s) = 0$ — *существует и таково, что* $m''(\alpha) < \infty$. *Положим* $\gamma = \ln m(\alpha)$ *и* $\sigma^2(\alpha) = \dfrac{m''(\alpha)}{m(\alpha)^2} - \Big(\dfrac{m'(\alpha)}{m(\alpha)}\Big)^2$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(\tau_x > t) \;\sim\; V(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}\widehat{\sigma}(\alpha)\alpha}\, e^{-\gamma t} \quad \text{при} \quad t \to \infty;$$
$$\mathsf{P}(\nu_x > n) \;\sim\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}\widehat{\sigma}(\alpha)\alpha}\, e^{-\gamma n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим теперь так называемый промежуточный случай, когда распределение X_1 имеет легкий хвост, но не удовлетворяет условиям Крамера. Для таких распределений результаты о больших уклонениях X_n известны лишь в случае, когда функция $G(x) = e^{\alpha x}\mathsf{P}(X_1 > x)$ является правильно меняющейся.

Теорема 13. *Предположим, что функция*

$$G(x) = e^{\alpha x}\mathsf{P}(X_1 > x)$$

является правильно меняющейся с параметром $-\beta$, *где* $2 < \beta < \infty$. *Пусть* $m'(s) \neq 0$ *при* $0 < s \leqslant \alpha$. *Положим* $\widehat{a} = (\ln m(\alpha))'$ *и* $e^{-\gamma} = m(\alpha)$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(\tau_x > t) \quad \sim \quad V(x)\frac{1}{m(\alpha)}\, e^{-\gamma t}G(t\delta) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\mathsf{P}(\nu_x > n) \quad \sim \quad V_{rw}(x)\frac{1}{m(\alpha)}\, e^{-\gamma n}G(n\delta) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

если предположить, что интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y e^{\alpha y}\, F(dy)$ *конечен.*

Список литературы

[1] *Боровков, А.А.* Об асимптотике распределений времен первого прохождения. — Математические заметки, 2004, **75**, 1, 24.

[2] *Боровков, А.А., Боровков, К.А.* О вероятностях больших уклонений для случайных блужданий. II. Регулярные экспоненциально убывающие распределения. — Теория вероятностей и ее применения, 2004, **49**, 2, 209-230.

[3] *Могульский, А.А.* О времени первого прохождения для случайного блуждания с семиэкспоненциально распределенными скачками. — В печати.

[4] *Нагаев, А. В.* Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено. — Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, 1, 51–64.

[5] *Нагаев, А.В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин. — Теория вероятностей и ее применения, 1977, **22**, 2, 335–346.

[6] *Петров, В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

[7] *Рогозин, Б. А.* Распределение некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятностей и ее применения, 1966, **11**, 161–169.

[8] *Розовский, Л. В.* Вероятности больших уклонений на всей оси. — Теория вероятностей и ее применения, 1993, **38**, 1, 79–109.

[9] *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М.: Мир, 1984.

[10] *Asmussen, S.* Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behaviour, stationary distributions and first passage probabilities. — Annals of Applied Probability, 2003, **8**, 354–374.

[11] *Asmussen, S.* Applied Probability and Queues, 2nd edn. Springer-Verlag, New York, 2003.

[12] *Asmussen, S., Foss, S., Korshunov, D.* Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. — Journal of Theoretical Probability, 2003, **16**, 2, 489–518.

[13] *Athreya, K.B., Ney, P.E.* Branching Processes. Springer Verlag, Berlin, 1972.

[14] *Bertoin, J., Doney, R. A.* Some asymptotic results for transient random walks. — Advances in Applied Probability, 1996, **28**, 207–226.

[15] *Doney, R. A.* On the asymptotic behaviour of first passage times for transient random walk. — Probability Theory and Related Fields, 1989, **81**, 239–246.

[16] *Embrechts, P., Hawkes, J.* A limit theorem for the tails of discrete infinitely divisible laws with applications to fluctuation theory. — J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 1982, **32**, 412–422.

[17] *Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T.* Modelling Extremal Events. Springer Verlag, Berlin, 1997.

[18] *Foss, S., Zachary, S.* Asymptotics for the maximum of a modulated random walk with heavy-tailed increments. — Analytic Methods in Applied Probability (in memory of Fridrih Karpelevich), American Mathematical Society Translations, Series 2, 2002, **207**, 37–52.

[19] *Foss, S., Zachary, S.* The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift. — Annals of Applied Probability, 2003, **13**, 37–53.

[20] *Klüppelberg, C.* Subexponential distributions and integrated tails. — Journal of Applied Probability, 1988, **35**, 325–347.

Публикации автора по теме диссертации

[21] *Шнеер, В.В.* Оценки для распределений сумм случайных величин с субэкспоненциальными распределениями. — Сибирский математический журнал, 2004, **45**, 6, 1401–1420.

[22] *Шнеер, В.В.* Оценки для вероятностей попадания в интервал сумм случайных величин с локально-субэкспоненциальными распределениями. — Сибирский математический журнал, 2006, **47**, 4, 946–955.

[23] *Denisov, D., Shneer, V.* Local asymptotics of the cycle maximum of a heavy-tailed random walk. — november 2005, EURANDOM report 2005-034.

[24] *Denisov, D., Shneer, V.* Asymptotics for first passage times of Levy processes and random walks. — july 2006, EURANDOM report 2006-017.

[25] *Denisov, D., Dieker, T., Shneer, V.* Large deviations for subexponential random variables. — Подготовлена к публикации.

Шнеер Всеволод Владиславович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ
И ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 11.07.2006
Офсетная печать. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1.5 Уч.-изд. л. 1.5 Тираж 100 экз. Заказ № 90

Отпечатано ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск-90, пр. Лаврентьева, 6.