РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

ЗАМБАЛАЕВА Долгор Жамьяновна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ И ПУТЕВЫХ РАЗБИЕНИЙ ГРАФОВ МЕТОДАМИ РАСКРАСОК И ВЕСОВЫХ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л.Соболева Сибирского отделения РАН.

Научный руководитель:	к.ф.-м.н. А. Н. Глебов
Официальные оппоненты:	д.ф.-м.н., профессор Э. Х. Гимади
	к.ф.-м.н., В. А. Аксенов
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт математики и механики Уральского отделения РАН (ИММ УрО РАН)

Защита состоится 30 ноября 2011 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д. 003.015.01 при Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института математики СО РАН.

Автореферат разослан "____" октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Направление исследований данной диссертации относится к задачам дискретной оптимизации и экстремальным задачам на графах. Объектами исследования диссертации являются путевые разбиения планарных графов, то есть их вершинные разбиения на два подграфа с заданными ограничениями на длины цепей, а также некоторые разновидности задач маршрутизации, а именно задачи о двух коммивояжерах на минимум и на максимум.

Исследования в области дискретной оптимизации за последние полвека приобрели особую актуальность в связи с фундаментальными проблемами полиномиальной разрешимости задач из классов NP-полных и NP-трудных задач. Было установлено, что полиномиальная разрешимость хотя бы одной NP-полной проблемы влечет полиномиальную разрешимость любой другой задачи из класса NP. Драматизм ситуации состоит в том, что доказать (или опровергнуть) совпадение классов P и NP к настоящему времени не удается. Большинство исследователей склоняются к пессимистической гипотезе несовпадения этих классов.

В этих условиях актуальными становятся исследования по разработке и обоснованию полиномиальных приближенных алгоритмов решения трудных задач комбинаторной оптимизации с возможно более лучшими оценками их качества. Основные усилия специалистов по методам комбинаторной оптимизации направлены в сторону развития новых методов построения малотрудоемких приближенных алгоритмов и получения как положительных, так и отрицательных результатов, касающихся существования полиномиальных приближенных схем (SNP-трудность). Это направление исследований является составной частью раздела математики, известного за рубежом под названием "Computer science". Оно сопровождается большим количеством международных симпозиумов и конференций, множеством специальных журналов и монографий, интенсивно развивается во многих научных школах (Кук С., Карп Р., Гэри М., Джонсон Д., Яннакакис М. и Пападимитриу Х. — США, Ленстра Дж., Скрайвер А. — Нидерланды, Эрдеш П., Ловас Л. — Венгрия, Эдмондс Дж. — Канада, Грётшель М. — Германия, Буркард Р. — Австрия др.).

В диссертационной работе большое внимание уделено построению полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для задачи о двух коммивояжерах на минимум и на максимум. Этим исследованиям посвящены главы 2 и 3 диссертации. Актуальность построения и анализа подобных алгоритмов обусловлена возможностью их применения при разработке эффективных методов решения практически значимых и сложных задач, для которых не известно точных полиномиальных алгоритмов решения. В частности, это касается NP-трудных задач дискретной оптимизации. Особенностью построения приближенных алгоритмов в диссертации является активное применение методов теории графов, таких как техника раскрасок вершин и ребер и метод перераспределения зарядов между вершинами графа.

В связи с этим следует отметить, что теория графов за последние 30–40 лет оформилась в самостоятельную математическую дисциплину, с присущими ей задачами и подходами, и активно развивается. Идеи и методы теории конечных графов востребованы во многих областях дискретной математики и их приложениях. Одно из центральных мест в современной теории графов занимает теория раскраски, то есть разбиения дискретного объекта на проще устроенные подобъекты. В частности, внимание ведущих графистов мира привлекают задачи о вершинных раскрасках и разбиениях планарных графов. Одной из разновидностей таких задач являются задачи о путевых разбиениях графов, при которых каждая часть разбиения (цветовой класс) порождает подграф с заданными ограничениями на длины цепей. В диссертации путевые разбиения планарных графов изучаются в главе 1, а в главе 2 при разработке алгоритмов для задачи о двух коммивояжерах на максимум применяются реберные раскраски графов в 2 и 3 цвета.

Цель исследования диссертации состоит в получении новых результатов о путевой разбиваемости планарных графов и в построении и анализе приближенных полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для некоторых модификаций задачи о двух коммивояжерах.

Методы исследований. Для получения результатов о путевых разбиениях планарных графов, равно как и при построении алгоритмов с гарантированными оценками качества для задач маршрутизации применялись общие методы исследований, такие как техника раскрасок вершин и ребер графа, а также техника перераспределения весов (зарядов) между вершинами (и/или гранями) графа.

Научная новизна. В диссертации получен ряд новых важных результатов. В частности, частично подтверждена гипотеза о τ-разбиваемости для планарных графов. Впервые доказана возможность разбиения вершин любого плоского графа с обхватом не менее 7 на два подмножества, каждое из которых порождает звездный лес, что эквивалентно путевой

(3,3)-разбиваемости таких графов. Разработаны новые алгоритмы для задачи о двух коммивояжерах на минимум и на максимум, обладающие лучшими, в сравнении с ранее известными, оценками точности.

Практическая ценность. Результаты работы носят преимущественно теоретический характер. Разработанные алгоритмы могут использоваться для решения соответствующих прикладных задач.

Основные результаты.

1. Доказана τ-разбиваемость планарных графов с обхватом не менее 5.

2. Доказано, что множество вершин планарного графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает звездный лес, что эквивалентно путевой (3,3)-разбиваемости таких графов.

3. Построен полиномиальный приближенный алгоритм решения задачи о двух коммивояжерах на максимум (задача 2-PSP-max) с оценкой точности $\frac{7}{9}$ и оценкой временно́й сложности $O(n^3)$.

4. Для решения задачи о двух коммивояжерах на минимум с весами ребер 1 и 2 и различными весовыми функциями (задача 2-PSP(1,2)-min-2w) построены следующие приближенные алгоритмы:

   4.1. алгоритм с оценкой точности $\frac{7}{5}$ и временно́й сложностью $O(n^3)$.

   4.2. алгоритм с оценкой точности $\frac{4}{3}$ и временно́й сложностью $O(n^5)$.

   Оценки точности последних двух алгоритмов приведены без учета аддитивной константы.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2007, 2008), на Всероссийских конференциях «Методы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2009), «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Алтай, 2010), «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011), на Международных конференциях по исследованию операций «European Conference on Operational Research» (Бонн, 2009), «Optimal Discrete Structures and Algorithms» (Росток, 2010), на научных семинарах Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 11 работ, из них 5 публикаций в научных журналах [16–20] и 6 публикаций в трудах и тезисах конференций [21–26]. Результаты разделов 1.2, 3.3 и главы 2 получены в соавторстве с А.Н. Глебовым. Результат раздела 3.2. получен в соавторстве с А.Н. Глебовым и А.В. Гордеевой. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 138 страницах, содержит введение, три главы и список литературы, содержащий 70 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор известных результатов, посвященных рассматриваемым задачам, обосновывается актуальность темы исследования и кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе исследуются путевые разбиения планарных графов, понятие которых было введено в [10], то есть вершинные разбиения графа на два подграфа с заданными ограничениями на длины цепей. Такие путевые разбиения интерпретируются как раскраски вершин графа в два цвета с ограниченными длинами одноцветных цепей. При доказательстве результатов первой главы, а именно: τ-разбиваемости и путевой (3,3)-разбиваемости планарных графов с обхватом не менее 5 и 7 соответственно, осуществляется построение раскрасок, соответствующих рассматриваемым путевым разбиениям. Получение таких раскрасок становится возможным благодаря использованию метода перераспределения зарядов, основанного на формуле Эйлера.

В разделе 1.1 вводятся основные определения и обозначения. Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — целые числа. Граф G называется (a, b)-*разбиваемым*, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что в подграфе $G_1 = G[V_1]$, порожденном подмножеством V_1, длина наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе $G_2 = G[V_2]$ — не превосходит b, где под длиной цепи понимается число ее вершин. Граф G называется τ-*разбиваемым*, если он (a, b)-разбиваем для любых натуральных a, b таких, что $a + b = \tau$, где $\tau = \tau(G)$ — наибольшая длина простой цепи в G.

В работах [10, 12] высказывалась гипотеза о том, что любой граф является τ-разбиваемым. В [11, 12, 13, 14] и ряде других работ справедливость этой гипотезы была подтверждена для некоторых специальных классов графов. В [6] было доказано, что любой граф является $(a, \tau - a)$-разбиваемым при $a \leq 8$. Вопрос о τ-разбиваемости планарных графов ранее специально не исследовался.

В разделе 1.2 диссертации гипотеза о τ-разбиваемости частично подтверждена для специального подкласса планарных графов, а именно доказана

Теорема 1. *Любой планарный граф с обхватом не менее* 5 *является* τ*-разбиваемым.*

Помимо задачи выделения классов τ-разбиваемых графов представляет интерес вопрос об (a, b)-разбиваемости при небольших фиксированных значениях параметров a и b. В указанной постановке задача об (a, b)-разбиваемости оказывается тесно связана с такой активно исследуемой областью теории графов как разложение на вырожденные подграфы. Наиболее часто рассматриваются разбиения графов на леса (ациклические подграфы) и звездные леса. Напомним, что *звездным лесом*, называется такой лес, в котором каждая компонента связности является звездой.

В разделе 1.3 доказана

Теорема 2. *Множество вершин любого плоского графа с обхватом не менее* 7 *можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает звездный лес.*

Иначе это утверждение можно сформулировать так: множество вершин графа можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает подграф, не содержащий циклов и простых цепей с более чем тремя вершинами. Здесь обнаруживается связь полученного результата с понятием путевой разбиваемости. В силу того, что $(3, 3)$-разбиваемость графа эквивалентна его разбиваемости на два звездных леса (для графов без 3-циклов), утверждение теоремы 2 равносильно тому, что любой плоский граф с обхватом не менее 7 является $(3, 3)$-разбиваемым.

В [10, 11, 12] и ряде других работ исследовались (a, b)-разбиения для некоторых специальных классов (непланарных) графов. Уже для планарных графов Глебовым и Замбалаевой [19] было доказано, что такие графы с обхватом не менее 8, 9 и 16 являются (2,3)-, (2,2)- и (1,2)-разбиваемыми соответственно. Эти результаты были усилены Бородиным и Ивановой [3, 4], которые установили, что планарные графы с обхватом не менее 14 являются $(1, 2)$-разбиваемыми, а с обхватом не менее 8 — $(2, 2)$-разбиваемыми.

С другой стороны, Михоком [15] было показано, что для любых фиксированных значений параметров a, b существуют плоские графы, не являющиеся (a, b)-разбиваемыми. При этом во всех примерах графов, приводимых в [15], содержится большое число циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого наименьшего значения $g \geq 4$

существуют такие константы a, b, что любой планарный граф с обхватом не менее g является (a, b)-разбиваемым. Из доказанной в диссертации теоремы 2 следует, что $g \leq 7$.

Во второй главе диссертации рассматривается задача задача об отыскании в полном взвешенном неориентированном графе двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с максимальным суммарным весом ребер, известная как задача о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max). Известно, что данная задача NP-трудна. В главе 2 построен полиномиальный алгоритм $A_{7/9}$ приближенного решения 2-PSP-max, имеющий оценку точности $\frac{7}{9}$ и кубическую временну́ю сложность.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи 2-PSP-max. Дан полный n-вершинный неориентированный граф $G(V, E)$, на ребрах которого задана весовая функция $w : E \to \mathbf{R}^+$. Допустимым решением задачи 2-PSP-max называется любая пара реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 в G. Значение целевой функции для H_1, H_2 определяется как $w(H_1 \cup H_2) = w(H_1) + w(H_2)$, где $w(H_i) = \sum_{e \in H_i} w(e)$, $i \in \{1, 2\}$, то есть равно сумме весов всех ребер из H_1 и H_2. Требуется найти в графе G такие два реберно непересекающихся гамильтонова цикла H_1, H_2, что суммарный вес их ребер $w(H_1 \cup H_2)$ максимален. Через OPT обозначается оптимальное значение целевой функции.

В разделе 2.2 приводится описание алгоритма $A_{7/9}$ приближенного решения поставленной задачи, который имеет наилучшую на сегодняшний день оценку точности $\frac{7}{9} \simeq 0.778$ и кубическую временну́ю сложность, что улучшает результат Агеева, Бабурина и Гимади [1], ранее построивших для данной задачи алгоритм с оценкой $\frac{3}{4}$.

В основе алгоритма $A_{7/9}$ лежит идея, впервые реализованная Сердюковым [7] при построении приближенного алгоритма для задачи одного коммивояжера на максимум (TSP-max) с оценкой точности $\frac{3}{4}$. На первом этапе алгоритма Сердюкова в графе находятся 2-фактор и паросочетание максимального веса, суммарный вес которых составляет не менее $\frac{3}{2}$ от веса оптимального решения. Далее алгоритм разбивает найденные 2-фактор и паросочетание на два частичных тура (то есть на два набора из вершинно непересекающихся цепей, покрывающих все вершины графа), каждый из которых дополняется до гамильтонова цикла. Максимальный по весу из этих циклов дает решение 2-PSP-max с оценкой точности $\frac{3}{4}$.

В представленном в диссертации алгоритме $A_{7/9}$ реализован аналогичный подход, однако в качестве исходного подграфа, подвергающегося разбиению на непересекающиеся по ребрам частичные туры, используется 4-регулярный остовный подграф максимального веса в G. При этом представленный алгоритм развивает идеи, ранее использованные в работе Гимади, Глазкова и Глебова [5] при построении приближенного алгоритма с оценкой $\frac{6}{5}$ для задачи 2-PSP на минимум с весами ребер 1 и 2. Ключевым этапом алгоритма $A_{7/9}$ является построение двух реберных раскрасок начальной пары частичных туров в два и в три цвета, что позволяет получить шесть альтернативных пар реберно непересекающихся частичных туров, наилучшая из которых имеет суммарный вес ребер не менее $\frac{7}{9}OPT$. Благодаря структурным свойствам начальной пары частичных туров, полученные туры удается дополнить до пары реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, что не всегда возможно в случае произвольных реберно непересекающихся частичных туров.

Для построенного алгоритма в диссертации доказана следующая

Теорема 3. *Алгоритм $A_{7/9}$ находит в полном n-вершинном графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для которых выполняется оценка $w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7}{9}OPT$. Временна́я сложность алгоритма равна $O(n^3)$.*

Для доказательства теоремы 3 сначала в разделах 2.3–2.5 диссертации описываются и устанавливаются свойства используемых алгоритмом $A_{7/9}$ процедур. Доказательство самой теоремы 3 дается в разделе 2.6.

Примечательно, что полученная оценка $\frac{7}{9}$ превосходит известные на настоящий момент наилучшие оценки точности для "более простой" задачи одного коммивояжера на максимум.

В разделе 2.7 для случая 2-PSP-max, в котором веса ребер принимают значения из заданного промежутка $[1, q]$, предложена модификация алгоритма $A_{7/9}$, имеющая гарантированную оценку точности $\frac{7q+3}{9q+1}$, что улучшает ранее полученную Гимади и Ивониной оценку $\frac{3q+2}{4q+1}$.

Теорема 4. *Алгоритм $A_{\frac{7q+3}{9q+1}}$ находит в полном n-вершинном графе G, веса ребер которого принимают значения из промежутка $[1, q]$, пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для которых выполняется оценка $w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7q+3}{9q+1}OPT$. Временна́я сложность алгоритма равна $O(n^3)$.*

В третьей главе исследуется задача о двух коммивояжерах на минимум с двумя различными весовыми функциями, принимающими значения 1 и 2 (задача 2-PSP-min-2w-$(1, 2)$). Приведем ее формулировку. Дан неориентированный полный n-вершинный граф $G(V, E)$ и две весовые функции ребер: $w_1 : E \to \{1, 2\}$, $w_2 : E \to \{1, 2\}$. Требуется найти непересекающиеся по ребрам гамильтоновы циклы H_1, H_2 такие, что их суммарный вес

$w_1(H_1) + w_2(H_2)$, где $w_i(H_i) = \sum_{e \in H_i} w_i(e)$, минимален. Для приближенного решения данной задачи построены два полиномиальных алгоритма, для каждого из которых получены оценка временно́й сложности и гарантированная оценка точности.

Как и в первой главе диссертации, в главе 3 используются весовые перераспределения. При помощи таких перераспределений обосновывается оценка точности полученного алгоритмом решения. В отличие от доказательства структурных результатов о плоских графах, в рассматриваемом случае использование зарядов (весов) вершин и последующее их перераспределение с сохранением суммы является нетипичным для задач такого плана, и ранее применялось только Берманом и Карпински [9] в задаче одного коммивояжера на минимум с весами ребер 1 и 2.

Для приближенного решения задачи 2-PSP-min-2w-$(1,2)$ в разделах 3.2 и 3.3 представлены полиномиальные алгоритмы $A_{7/5}$ и $A_{4/3}$ соответственно. Последний алгоритм имеет наилучшую на сегодняшний день гарантированную оценку точности для данной задачи, равную $\frac{4}{3}$ (без учета аддитивной константы) и оценку временно́й сложности $O(n^5)$. Алгоритм $A_{7/5}$ обладает худшей по сравнению с алгоритмом $A_{4/3}$ оценкой точности $7/5$, зато имеет лучшую (кубическую) оценку временно́й сложности. Оба алгоритма улучшают оценку точности $\frac{11}{7}$, ранее полученную в [8].

В основу обоих алгоритмов положена идея метода из [9], заключающаяся в построении и последовательном "улучшении" двух реберно непересекающихся частичных туров из ребер единичного веса, и последующем замыкании этих туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы. Под "улучшением" туров понимается такое их локальное преобразование, при котором уменьшается либо общее число цепей и циклов, составляющих туры, либо число одновершинных цепей (синглов). Для того, чтобы гарантировать возможность улучшающего преобразования в случае, если нужное качество решения еще не достигнуто, применяется введенная в [9] модификация метода перераспределения зарядов вершин. Аналогично тому, как это делается при работе с плоскими графами, для каждой вершины графа определяется ее заряд, то есть число, определяемое на основе туров оптимального решения. В последующем происходит перераспределение этих зарядов между вершинами графа с сохранением их суммы.

Дополнительные трудности при разработке и анализе алгоритмов в главе 3 (по сравнению со случаем двух одинаковых весовых функций) связаны с тем, что в рассматриваемом случае невозможна свободная переброска ребер из одного тура в другой. Из-за этого оказались неприменимыми многие методы, ранее использовавшиеся в задаче о двух коммивояжерах с весами ребер 1 и 2 (см. [1, 2, 5]). Значительный объем доказательства оценок точности обоих алгоритмов также связан с рассмотрением большого числа случаев, соответствующих различным типам вершин графа. Тип вершины определяется тем, является ли она в туре концевой или внутренней вершиной цепи, вершиной цикла, синглом (S-вершиной) или так называемой Q-вершиной (s, q)-дерева (независимо для каждого тура).

Следует отметить, что в разделе 3.3, посвященном построению и анализу алгоритма $A_{4/3}$, понятие частичного тура, традиционно используемое при построении алгоритмов для задач одного и двух коммивояжеров, существенно модифицировано за счет включения в туры наряду с цепями и циклами так называемых (s, q)-деревьев, определение и свойства которых даются в разделе 3.3.1 диссертации.

Для построенных алгоритмов доказаны следующие результаты:

Теорема 5. *Алгоритм $A_{7/5}$ за время $O(n^3)$ находит в полном n-вершинном графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для веса которых выполняется неравенство*

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq \tfrac{7}{5}OPT + 1.$$

Теорема 6. *Алгоритм $A_{4/3}$ за время $O(n^5)$ находит в полном n-вершинном графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для веса которых выполняется неравенство*

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq \tfrac{4}{3}OPT + 1.$$

Есть все основания полагать, что разработанные в диссертации методы, связанные с применением раскрасок вершин и ребер, перераспределением зарядов и использованием принципиально новых объектов, таких как (s, q)-деревья, окажется полезными при разработке других алгоритмов решения задач маршрутизации, главным образом, задач одного, двух и более коммивояжеров на минимум и на максимум.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю Алексею Николаевичу Глебову за постоянную поддержку и внимание к работе.

Список литературы

[1] **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса. // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2006. — Сер. 1. Т. 13, № 2. — С. 11–20.

[2] **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых цикла минимального веса. // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2004. — Сер. 2. Т. 11, № 1. — С. 11–25.

[3] **Бородин О. В., Иванова А. О.** Почти правильные 2-раскраски вершин разреженных графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 16–20.

[4] **Бородин О. В., Иванова А. О.** Разбиение разреженных плоских графов на два подграфа малой степени // Сибирские электронные математические известия. (http://semr.math.nsc.ru). — 2009. — Т. 6. — С. 13–16.

[5] **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н.** Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — Сер. 2. 2007. — Т. 14, № 2. — С. 41–61.

[6] **Мельников Л.С., Петренко И.В.** О путевых ядрах и разбиениях в неориентированных графах// Дискретный анализ и исследование операций. — 2002. — Сер. 1. Т. 9, № 2. — С. 21–35.

[7] **Сердюков А. И.** Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум. // Управляемые системы. Сб. науч. тр. — 1984. — Вып. 25. — С.80–86.

[8] **A.E. Baburin, F.Della Croce, E.K. Gimadi, Y.V. Glazkov and V.Th. Paschos.** Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics, Vol. 157, No 9, 2009, P. 1988–1992.

[9] **Berman P., Karpinski M.** 8/7-approximation algorithm for (1,2)-TSP // Proc. of the 17th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms, SODA 2006 (Miami, January 22-26, 2006). New York: ACM Press, 2006. P. 641–648.

[10] **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihok P., Semanisin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 1997. V. 17, N 1 P. 5–50.

[11] **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 1998. V. 18, N 1 P. 113–125.

[12] **Broere I., Hajnal P., Mihok P., Semanisin G.** Partition problems and kernels of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. 1997. V. 17, N 2 P. 311–313.

[13] **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // Math. Combin. Comput. 1999. V. 31. P. 137–149.

[14] **Dunbar J. E., Frick M., Bullock F.** Path partitions and Pn-free sets // Discrete Math. 2004. V. 289. N 1–3, P. 145–155.

[15] **Mihok J.** Graphs, hypergraphs and matroids. Zielon Gora: Higher College Engrg., 1985.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах

[16] **Глебов А.Н., Гордеева А.В., Замбалаева Д.Ж.** Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Сибирские электронные математические известия (htpp://semr.math.nsc.ru). — 2011. — Т. 8. — С. 296–309.

[17] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 17–48.

[18] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Приближенный алгоритм решения задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 11–37.

[19] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Путевые разбиения планарных графов // Сибирские электронные математические известия (htpp://semr.math.nsc.ru). — 2007. — Т. 4. — С. 450–459.

[20] **Замбалаева Д.Ж.** Разбиение плоского графа с обхватом 7 на два звездных леса// Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 20–46

Прочие публикации

[21] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Путевые и звездные разбиения плоских графов // Материалы IV Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 29 июня – 4 июля 2009). Омск: Полиграфический центр КАН, 2009. С. 121.

[22] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Задача о двух коммивояжерах на минимум в полном графе с различными весовыми функциями // Материалы Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Республика Алтай, 27 июня – 3 июля 2010). Новосибирск: Издательство Института математики, 2010. С. 131.

[23] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж.** Эффективный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. № 12. XIV Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 28 февраля – 4 марта 2011). Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 168.

[24] **Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В.** Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (пос. Листвянка, 23–29 июня 2011). Т. 4: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. С. 82–87.

[25] **Zambalaeva D.** Decomposing planar graphs into degenerate subgraphs // Abstracts of European conference on Operational Research, Bonn, July 5–8, 2009. P. 183.

[26] **Zambalaeva D.** 4/3-approximation algorithm for the minimum 2-PSP with different weight functions valued 1 and 2 // Abstracts of International conference on Optimal Discrete Structures and Algorithms (ODSA), Rostok, September 13–15, 2010. P. 66.