МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ТАХОНОВ Иван Иванович

Анализ сходимости итерационных процессов для некоторых задач построения равновесных систем

Специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2009

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Адиль Ильясович Ерзин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Анна Владимировна Зыкина; доктор физико-математических наук Николай Павлович Дементьев
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Защита состоится 11 ноября 2009 г. в   час.   мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4, к.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН.

Автореферат разослан "   " октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н. Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. *Объектом исследования* данной работы являются динамические распределенные системы, моделируемые взвешенными графами. *Предмет исследования* – итерационные процессы изменения состояний динамических распределенных систем.

В диссертации под *динамической распределенной системой* понимается совокупность взаимосвязанных элементов, каждый из которых в каждый момент времени (которое полагается дискретным) характеризуется набором значений некоторых параметров – своим *состоянием*. *Состояние системы* – это совокупность состояний ее элементов. Элемент может находиться в различных состояниях, и на каждом временном шаге все элементы системы независимо друг от друга изменяют свои состояния на основании имеющейся у них информации о состояниях соседей. Так как элементы действуют независимо, то система попадает в состояние, отличающееся от того, которое ожидали элементы, что на очередном временном шаге побуждает их снова изменять свои состояния.

Динамические распределенные системы являются адекватными моделями описания различных физических, экономических и социальных систем, поэтому представляет интерес получение достаточных условий сходимости процесса изменения состояний, а также вычисление предельных и равновесных состояний системы. Несмотря на то, что динамические распределенные системы изучаются в различных областях знаний, вопрос сходимости процессов изменения состояний исследован недостаточно. В диссертации анализируется сходимость процессов изменения состояний в двух классах динамических распределенных систем, представляющих интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Цель работы. Исследование итерационных процессов изменения состояний в распределенных динамических системах. Поиск достаточных условий сходимости и оценка скорости сходимости этих процессов. Нахождение аналитических выражений для предельных и равновесных состояний. Анализ устойчивости процессов вычисления предельных и равновесных состояний к вычислительным погрешностям.

Методы исследований. В работе использовались методы матричного анализа, теории графов, исследования операций и дискретного анализа.

Научная новизна. В диссертации рассматриваются две модели динамических распределенных систем, представленных взвешенными графами. Первая из них является обобщением рассматривавшихся ранее моделей. Вторая модель ранее не рассматривалась. Сформулированы новые легко проверяемые условия сходимости процессов изменения состояний, впервые получены аналитические выражения для предельных и равновесных состояний и проведен анализ устойчивости процессов вычисления предельных состояний к вычислительным погрешностям.

Основные результаты.

1. Сформулированы полиномиально проверяемые достаточные условия сходимости процессов изменения состояний в двух классах динамических распределенных систем.

2. Определены оценки скорости сходимости.

3. Получены аналитические выражения для предельных и равновесных состояний.

4. Найдены условия устойчивости процесса вычисления состояний системы к ошибкам округления и погрешностям начальных данных и показана непрерывная зависимость предельного и равновесного состояний от параметров системы.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер, однако ее результаты могут быть полезны при проведении качественного анализа различных физических, социальных и экономических процессов, а также могут быть использованы при анализе других итерационных процедур.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры Теоретической кибернетики НГУ и отдела Теоретической кибернетики ИМ СО РАН, на семинарах "Дискретные экстремальные задачи" и "Избранные вопросы математического анализа" ИМ СО РАН, на XLII и XLV международных студенческих конференциях "Студент и Научно-Технический Прогресс" (г.Новосибирск, 2004 и 2007 годы), на международной школе-семинаре "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач" (г.Бишкек, Киргизия, 2004 год), на XIV Байкальской международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (г.Северобайкальск, 2008 год).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, из них 3 в рецензируемых изданиях и журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад. Все результаты получены соискателем лично. В совместных публикациях вклад соискателя является существенным и заключается в формулировке и доказательстве утверждений. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 110 страницах и состоит из введения, вспомогательного раздела, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 49 наименований. Работа содержит 19 рисунков.

На защиту выносится совокупность результатов о сходимости процессов изменения состояний в некоторых динамических распределенных системах.

Содержание диссертационной работы

Во **Введении** даются необходимые определения, приводится краткий обзор результатов, посвященных рассматриваемым задачам, обосновывается актуальность темы исследования и кратко излагается содержание диссертационной работы.

В разделе **Элементы матричного анализа и теории графов** приводятся необходимые утверждения из теории матриц и теории графов, использующиеся в последующих главах.

Основные результаты изложены в двух главах.

В **первой главе** исследуется процесс перераспределения ресурсов в динамической распределенной системе, моделируемой неориентированным графом $G = (V, E)$, $|V| = n$. Каждой вершине $i \in V$ приписан однородный ресурс (потенциал) в количестве $q_i \geq 0$, который вершина на любом временном шаге k полностью перераспределяет между инцидентными ребрами. Обозначим через x_{ij}^k количество ресурса вершины i, распределенного на шаге k на ребро $(i, j) \in E$. Предположим, что начальное распределение ресурсов $x_{ij}^0 : \sum\limits_{j \in V_i} x_{ij}^0 = q_i, \ i \in V, \ j \in V_i = \{l \in V : \ (i, l) \in E\}$, известно. Каждая вершина i оценивает качество взаимодействия с соседом j по значению известной функции $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$.

Предположим, что произвольная вершина i на шаге $k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ принимает решение о перераспределении своего ресурса на основании наблюдаемых на шаге k распределений ресурсов соседей по инцидентным i дугам. При этом вершина i выбирает такое распределение ресурса $x_{ij}^{k+1}, \ j \in V_i$, которое является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \max\limits_{j\in V_i} c_{ij}(x_{ij}^{k+1}, x_{ji}^{k}) \to \min\limits_{\{x_{ij}^{k+1}\}}; \\ \sum\limits_{j\in V_i} x_{ij}^{k+1} = q_i; \\ x_{ij}^{k+1} = 0,\ (i,j) \notin E, \end{cases}$$

где величины $x_{ji}^k,\ j \in V_i$ известны. Так как элементы действуют независимо друг от друга, система попадает в состояние, отличное о ожидаемого каждым элементом, что снова (на очередном временном шаге) побуждает элементы перераспределять свои ресурсы.

В первой главе рассматриваются системы с линейными оценивающими функционалами $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$ следующих видов:

1. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$, где $a, b \in R$;

2. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + \varepsilon a_j x_{ji}$, где $a_i, \varepsilon \in R$;

3. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij} \cdot (x_{ij} + x_{ji})$, где $a_{ij} \in R$;

4. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + b_{ij} x_{ji}$, где $b_{ij}, a_i \in R$.

Также рассмотрены системы с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$ и *переменными* векторами потенциалов, удовлетворяющим следующим условиям:

1. $q_i^k = q_i + \varepsilon_i^k,\ \varepsilon_i^k \in [-\varepsilon, \varepsilon]$;

2. $q_i^k = q_i^{k-1} - 1\ (q_i^k = q_i - k)$.

Далее, если не оговорено особо, речь идет о системах с постоянными векторами потенциалов.

Для этих систем ищутся достаточные условия сходимости процесса перераспределения ресурсов и аналитические выражения для предельных и равновесных состояний. Ранее подобный анализ проводился лишь для систем с полным графом отношений и оценивающими функционалами частного вида.

Для формулировки основных результатов первой главы введем обозначения:

- Γ – матрица смежности графа G;

- d_i - степень вершины i в графе G, а $\tilde{d} = (d_1, \ldots, d_n)$;

- D – диагональная матрица с d_i в i-ой строке;

- $\Delta = D^{-1}\Gamma$, $\tilde{\Delta} = \frac{b}{a}\Delta$;
- e^i – i-ый орт (столбец);
- $v_{ij} = \Delta\frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j}$;
- $f_i^k = \sum\limits_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}^k, x_{ji}^k)$;
- f^0 – вектор-строка, состоящий из величин f_i^0;
- Q – сумма ресурсов всех вершин графа; в случае, если граф G является двудольным, через Q_l обозначим суммарный ресурс вершин доли l $(l = 1, 2)$, а $Q = Q_1 + Q_2$.

Теорема 1.1. Для сходимости процесса перераспределения ресурсов в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$ достаточно выполнение условия $\mid \frac{b}{a} \mid \leq 1$. При этом:

1. Если $\mid \frac{b}{a} \mid < 1$, то процесс перераспределения ресурсов сходится. Предельное (равновесное) состояние не зависит от начального распределения ресурсов и определяется следующим соотношением:

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^k = q(E - \tilde{\Delta})^{-1}\left(\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}\right).$$

2. Если $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, то процесс перераспределения ресурсов имеет две предельные точки: “четную” и “нечетную”, определяемые следующими соотношениями:

   - Пусть $a = b$ и граф G не является двудольным. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a} f^0 D\left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ij},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = -x_{ji}^0 - \frac{1}{a} f^0 D\left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ji} + \frac{2Q}{s}.$$

   - Пусть $a = -b$ и граф G не является двудольным. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 - \frac{1}{a} f^0 D\left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ij},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = x_{ji}^0 - \frac{1}{a} f^0 D\left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ji}.$$

- Пусть $a = b$ и граф G является двудольным. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ij};$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = -x_{ji}^0 - \frac{1}{a} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ji} + \frac{Q}{s_l}.$$

- Пусть $a = -b$ и граф G является двудольным. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 - \frac{1}{a} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ij};$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = x_{ji}^0 - \frac{1}{a} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ji} + \frac{Q_l - Q_{l+1}}{s_l},$$

  где $l = 1$, если $i \in V^1$ и $l = 2$, если $i \in V^2$, а $l + 1 = 2$, если $i \in V^1$ и $l + 1 = 1$, если $i \in V^2$.

Матрица L определяется следующим образом. В случае, если граф G не является двудольным,

$$L = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i} \left(\begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{array} \right).$$

Пусть теперь граф G является двудольным: $V = V^1 \cup V^2$, $|V^l| = n_l$ $(l = 1, 2)$. Тогда

$$L = \left(\begin{array}{cc} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{array} \right), \; L_l = \left(\frac{d_j^l}{\sum\limits_{i=1}^{n_l} d_i^l} \right)_{i,j=1,\dots n_l}, \; (l = 1, 2).$$

Теорема 1.2. Для сходимости процесса перераспределения ресурсов в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + \varepsilon a_j x_{ji}$ достаточно выполнения условия $|\varepsilon| \le 1$. При этом:

1. Если $|\varepsilon| < 1$, то процесс перераспределения ресурсов сходится. Предельное (равновесное) состояние системы не зависит от начального распределения ресурсов и определяется соотношением:

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^k = \frac{1}{a_i} \tilde{q} (E - \tilde{\Delta})^{-1} \left(\frac{e^i}{d_i} - \varepsilon \frac{e^j}{d_j} \right).$$

2. Если $|\varepsilon| = 1$, то существует две предельные точки: "четная" и "нечетная", определяемые следующими соотношениями

   - Если граф G не является двудольным, то

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 + \frac{\varepsilon}{a_i} f^0 D \left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ij},$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = & - \quad \varepsilon x_{ji}^0 - \frac{1}{a_i} f^0 D \left[E - (\Delta - L)^2\right]^{-1} v_{ji} + \\ & + \quad \frac{1}{s}\left(Q + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in V_i} \frac{a_j}{a_i} x_{ji}^0\right),\end{aligned}$$

   где $s = \sum\limits_{i\in V} d_i$, а вид матрицы L указан выше.

   - Если граф G является двудольным, то

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 + \frac{\varepsilon}{a_i} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ij},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = -\varepsilon x_{ji}^0 - \frac{1}{a_i} f^0 D \left[E - (\Delta^2 - L)\right]^{-1} v_{ji} + \frac{\tilde{Q}_l}{s_l},$$

   где $s_l = \sum_{i\in V^l}$, $\tilde{Q}_l = \sum\limits_{i\in V^l} \sum\limits_{j\in V_i} x_{ij}^0 + \varepsilon \frac{a_j}{a_i} x_{ji}^0$, $l = 1$, если $i \in V^1$ и $l = 2$, если $i \in V^2$, а $l+1 = 2$, если $i \in V^1$ и $l+1 = 1$, если $i \in V^2$.

Рассмотрим систему с оценивающими функционалами следующего вида: $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij} \cdot (x_{ij} + x_{ji})$. Введем обозначения:

- $\alpha_i = \sum\limits_{j\in V_i} \frac{1}{a_{ij}}$;
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;
- $A = diag\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Теорема 1.3. При выполнении условия $a_{ij} = a_{ji}$ для каждого ребра $(i,j) \in E$ процесс перераспределения ресурсов в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij} \cdot (x_{ij} + x_{ji})$ для произвольного графа G имеет две предельные точки, "четную" и "нечетную", определяемые следующими соотношениями:

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k} = x_{ij}^0 + \frac{1}{a_{ij}} f^0 A \left(E - \left(\Delta^2 - L\right)\right)^{-1} \left(\Delta \frac{e^i}{\alpha_i} - \frac{e^j}{\alpha_j}\right),$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{ij}^{2k+1} = -x_{ji}^0 - \frac{1}{a_{ij}} f^0 A \left(E - \left(\Delta^2 - L\right)\right)^{-1} \left(\Delta \frac{e^j}{\alpha_j} - \frac{e^i}{\alpha_i}\right) + \tilde{Q}_{ij}.$$

Величины $\tilde{Q}_{ij}$ зависят от вида графа G. В случае, если граф G не является двудольным, $\tilde{Q}_{ij} = 2Q/(a_{ij} \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m)$. В случае двудольного графа G $\tilde{Q}_{ij} = Q/(a_{ij} \sum\limits_{m=1}^{n_1} \alpha_m)$, если $i \in V^1$, и $\tilde{Q}_{ij} = Q/(a_{ij} \sum\limits_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} \alpha_m)$, если $i \in V^2$.

Матрица L определяется следующим образом. Если граф G не является двудольным, то

$$L = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Если граф G является двудольным: $V = V^1 \cup V^2$, $|V^l| = n_l$ $(l = 1, 2)$, то

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}, \; L_l = \begin{pmatrix} \dfrac{d_j^l}{\sum\limits_{i=1}^{n_l} d_i^l} \end{pmatrix}_{i,j=1,\dots n_l}, \; (l = 1, 2).$$

Теорема 1.4. Для сходимости процесса перераспределения ресурса в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + b_{ij} x_{ji}$ достаточно выполнения условия $\left|\frac{b_{ij}}{a_j}\right| \leq \frac{1}{2}$ для каждого ребра $(i, j) \in E$. При этом предельное (равновесное) состояние, не зависит от начального состояния X^0.

Теорема 1.5. Достаточным условием сходимости процесса перераспределения ресурсов в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a x_{ij} + b x_{ji}$ и вектором потенциалов, удовлетворяющем условию $q_i^k = q_i + \varepsilon_i^k$ $(\varepsilon_i^k \in [-\varepsilon, \varepsilon])$, является выполнение неравенства $|b/a| < 1$. При этом верна следующая оценка для предельного распределения ресурсов:

$$x_{ij}^* - \frac{(n+1)\varepsilon}{\left(1 - \left|\frac{b}{a}\right|\right)^2} \leq \lim_{k\to\infty} x_{ij}^k \leq x_{ij}^* + \frac{(n+1)\varepsilon}{\left(1 - \left|\frac{b}{a}\right|\right)^2},$$

где $\{x_{ij}^* | (i, j) \in E\}$ – это предельное распределение ресурсов в системе с постоянным вектором ресурсов q.

Теорема 1.6. При выполнении условия $|b/a| < 1$ в системе с оценивающими функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$ и вектором потенциалов, удовлетворяющем условию $q_i^k = q_i - k$ верны следующие соотношения:

$$x_{ij}^k = \hat{x}_{ij}^k - \frac{t}{d_i} - kI(E - \tilde{\Delta})^{-1}v + I(E - \tilde{\Delta})^{-2}v + o(k),$$

где $v = \tilde{\Delta}\frac{e^i}{d_i} - \frac{b}{a}\frac{e^j}{d_j}$, а $\hat{x}_{ij}^k$ – количество ресурса, распределенного на ребро $(i, j) \in E$ в момент времени k в системе с постоянным вектором потенциалов q.

Таким образом, в первой главе рассмотрена n-элементная модель распределенной системы на графе и исследован вопрос сходимости процесса перераспределения ресурсов в системах с различными линейными оценивающими функционалами. Сформулированы полиномиально проверяемые достаточные условия сходимости этих процессов, получены аналитические выражения для вычисления предельных и равновесных состояний, трудоемкость вычисления которых равна $O(n^3)$. Проведен анализ процесса перераспределения ресурсов в системе с переменными потенциалами и показана сходимость процесса в частном случае. Получены оценки для предельных состояний системы с потенциалами ограниченной вариации и асимптотическое распределение ресурсов в системе с убывающими потенциалами.

Во **второй главе** исследуется процесс перераспределения потока в динамической распределенной системе, моделируемой ориентированным графом $G = (V, E)$, $|V| = n$. Каждой вершине $i \in V$ соответствуют два подмножества вершин: $I_i = \{k \in V | (k, i) \in E\}$ и $O_i = \{k \in V | (i, k) \in E\}$. Обозначим через T множество стоков графа G: $T = \{i \in V | O_i = \emptyset\}$. *Потоком в графе* G назовем множество действительных чисел $X = \{x_{ij} \geq 0 | (i, j) \in E\}$. Для каждой вершины, не являющейся стоком, считаем заданным ее потенциал q_i, характеризующий величину потока, возникающего в этой вершине в единицу времени. Также для каждой вершины $i \in V \backslash T$ считаем заданным *вектор пропорций* $A_i = \{a_{ij} \geq 0 | j \in O_i, \sum\limits_{j \in O_i} a_{ij} = 1\}$.

Предположим, что каждая вершина $i \in V \backslash T$ в момент времени $(k + 1)$ перераспределяет пришедший в нее в момент k $(k \geq 0)$ поток по исходящим дугам согласно заданным пропорциям a_{ij}:

$$x_{ij}^{k+1} = a_{ij}(q_i + \sum_{p \in I_i} x_{pi}^k), \ i \in V \backslash T, \ j \in O_i, \ k = 0, 1, \ldots,$$

Начальный поток x_{ij}^0, $(i, j) \in E$ считается известным. Эти соотношения определяют процесс изменения состояний системы.

Ранее такая модель в литературе не рассматривалась. Формально она близка к централизованной динамической модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева, однако при анализе этой модели вопросы сходимости как правило не рассматриваются.

Для формулировки основных результатов этой главы введем обозначения:

- $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ – матрица смежности графа G;
- $A = \{\alpha_{ij}\},\ \alpha_{ij} = a_{ij}\gamma_{ij}$ – матрица коэффициентов a_{ij};
- q – вектор (строка) потенциалов вершин;
- $p_i^k = \sum\limits_{j \in I_i} x_{ji}^k$ – суммарный поток, входящий в вершину i в момент времени k $(k \geq 0)$;
- $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ – вектор (строка), содержащий величины p_i^k;
- E – единичная матрица, а e^i – ее i-ый столбец (i-ый координатный орт).

Введем функцию $h(G)$. Пусть G –некоторый ориентированный граф. Тогда:

- если G сильно связен, то значение $h(G)$ равно НОД длин всех контуров в G;
- если G не является сильно связным, то $h(G)$=НОК$(h(G_1), \dots, h(G_g))$, где $\{G_1, \dots, G_g\}$ – сильные компоненты G, являющиеся стоками в графе компонент $K(G)$.

Теорема 2.1. Пусть граф G имеет непустое множество стоков T и каждая вершина графа соединена путем с некоторым стоком. Тогда процесс перераспределения потока сходится к предельному состоянию, определяемому следующим соотношением:

$$x_{ij}^* = a_{ij} q (E - A)^{-1} e^i,$$

причем сходимость осуществляется со скоростью геометрической прогрессии.

Теорема 2.2. Пусть G – граф, в котором есть вершины, не соединенные путями со стоками, и вектор потенциалов $q = 0$. Тогда процесс перераспределения потока имеет $h = h(G)$ предельных точек:

$$x_{ij}^{(r+1)+h\infty} = a_{ij} p^0 A^{r+h\infty} e^i,\ r = 0, \dots, h-1,\ (i,j) \in E.$$

Здесь через $A^{r+h\infty}$ обозначен следующий предел: $\lim\limits_{k\to\infty} A^{r+h\cdot k}$.

Измерение параметров реальных систем неизбежно сопровождается погрешностями, а вычисление значений потоков – машинными округлениями. Это может привести к сильному расхождению между теоретически вычисленными значениями потоков и результатами численных экспериментов. Поэтому возникает вопрос: насколько сильно неточности в параметрах системы и вычислительные погрешности влияют на результаты вычислений. Чтобы ответить на него, наряду с процессом

$$\begin{cases} x_{ij}^{k+1} = a_{ij}(q_i + \sum\limits_{p\in I_i} x_{pi}^k) \\ \sum\limits_{p\in I_i} x_{pi}^0 = p_i^0 \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим процесс

$$\begin{cases} y_{ij}^{k+1} = \tilde{a}_{ij}(\tilde{q}_i + \sum\limits_{p\in I_i} y_{pi}^k + \varepsilon_{ij}^k) \\ \sum\limits_{p\in I_i} y_{pi}^0 = \tilde{p}_i^0 \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{cases} \tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \tau_{ij} \\ \tilde{p}_i^0 = p_i^0 + \zeta_i \\ \tilde{q}_i = q_i + \eta_i \end{cases} \quad \text{Или} \quad \begin{cases} \tilde{A} = A + T \\ \tilde{p}^0 = p^0 + \zeta \\ \tilde{q} = q + \eta \end{cases}$$

Считаем, что влияние погрешностей сказывается следующим образом: вместо точных значений параметров A, p^0, q известны "приближенные" $\tilde{A}, \tilde{p}^0, \tilde{q}$, отличающиеся от истинных значений на величины небольших порядков. Помимо этого, на каждом шаге вычислений происходит округление. Относительно $\tilde{A}$ полагаем, что искажению подверглись только ненулевые элементы матрицы A. То есть, для каждого i выполняются соотношения:

$$\tilde{a}_{ij} \geq 0,\ j \in V_i,$$

$$\sum_{j\in O_i} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j\in O_i} a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \text{ является стоком;} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{j\in O_i} \tau_{ij} = 0$.

Теорема 2.3. Пусть в графе G из каждой вершины есть путь в сток. Тогда процессы (1) и (2) сходятся. Пусть $r = \max\{r(A), r(\tilde{A})\}$, а ξ такое положительное число, что $r+\xi<1$. В случае, когда параметры системы, их возмущения и погрешности вычисления удовлетворяют неравенствам: $|\tau_{ij}|\le\tau, |\theta_i^k|\le\theta, a_{ij}\le a, q_i\le q, \tilde{q}_i\le\tilde{q}, |\varepsilon_{ij}^k|\le\varepsilon$, верна следующая оценка:

$$|y_{ij}^k-x_{ij}^k| = O\left(\frac{naq\tau}{(1-(r+\xi))^2}+\frac{a\theta+\tau\tilde{q}}{1-(r+\xi)}+a\varepsilon\right).$$

Теорема 2.4. Пусть в графе G есть вершины, из которых нет путей в стоки и вектор $q=0$. В этом случае процесс, определяемый соотношениями (2) расходится. Пусть β – некоторое положительное число. Тогда при $k\le\frac{\beta}{na_{max}\delta_{max}}$ верны неравенства:

$$\begin{aligned}|y_{ij}^k-x_{ij}^k| &\le \frac{n^2\tilde{C}\tau_{max}a_{max}p_{max}}{1-\tilde{\mu}}+na_{max}\zeta_{max}+n\tau_{max}p_{max}+\beta\\ |y_{ij}^k-x_{ij}^*| &\le \frac{n^2\tilde{C}\tau_{max}a_{max}p_{max}}{1-\tilde{\mu}}+na_{max}\zeta_{max}+n\tau_{max}p_{max}+\beta+\\ &\quad +a_{max}p_{max}C\mu^{k-1},\end{aligned}$$

где μ ($\tilde{\mu}$) меньше единицы, но больше второго по абсолютной величине собственного числа A ($\tilde{A}$), а $C=C(A,\mu)$ ($\tilde{C}=\tilde{C}(\tilde{A},\tilde{\mu})$) некоторая величина, не зависящая от k.

Таким образом, во второй главе исследован вопрос сходимости процесса перераспределения потока в сети. Получены достаточные условия сходимости процесса в терминах топологии сети и аналитические выражения для вычисления предельного потока с трудоемкостью $O(n^3)$. Исследован случай, когда эти условия нарушаются и показано, что в данном случае процесс перераспределения потока имеет несколько предельных точек, с помощью которых можно вычислить сбалансированный поток. Найдены условия устойчивости процесса вычисления потока к вычислительным погрешностям.

Список публикаций

Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах. Из них три статьи в реферируемых изданиях и журналах, рекомендованных ВАК:

[1] **Ерзин А.И.,Тахонов И.И.** ***Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели.*** **Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, 3(23). с. 58-68.**

[2] **Ерзин А.И.,Тахонов И.И.** ***Задача поиска сбалансированного потока.*** **Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. IX, 4(28). с. 50-63.**

[3] Erzin A.I., Takhonov I.I. *Equilibrium Resource Distribution in a Network Model.* Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. V.1 №3, 293-302. (перевод работы [1])

Материалы и тезисы докладов на международных и всероссийских конференциях:

[4] Ерзин А.И., Астраков С.Н., Тахонов И.И., Гадяцкая О.А. *Одна задача функционирования распределенной сети.* Материалы межд. школы-семинара "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Бишкек, Кырг. респ. 2004. С. 77-82.

[5] Гадяцкая О.А., Тахонов И.И. *Одна модель развития взаимоотношений элементов системы.* Материалы XLII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск, 2004.

[6] Тахонов И.И. *Устойчивость предельных состояний двух распределенных систем.* Материалы XLV международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск, 2007. с. 170-171.

[7] Тахонов И.И. *Распределение ресурсов в сетевой модели с переменными потенциалами.* Материалы XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", секция "Математическая экономика". Иркутск, 2008. с. 608-617.

ТАХОНОВ Иван Иванович

Анализ сходимости итерационных процессов для некоторых задач построения равновесных систем

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 2 октября 2009. Формат 60x84 1/16.
Заказ №   Офсетная печать. Объем 1,0 п.л. Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.