РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. Соболева

На правах рукописи
УДК 519.1

САЛИМОВ Павел Вадимович

РЕКУРРЕНТНОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ РЕКУРРЕНТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СЛОВ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск, 2010

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук А.Э. Фрид.

Официальные оппоненты: кандидат физико-математических наук Д.С. Ананичев (УрГУ), доктор физико-математических наук Е.А. Окольнишникова.

Ведущая организация: Московский Государственный Университет.

Защита состоится 22 сентября 2010 в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: ауд. 417, пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящей диссертации исследуются классические объекты дискретного анализа – бесконечные слова, то есть бесконечные последовательности элементов конечного множества. Предметом исследований являются свойство равномерной рекуррентности бесконечных слов, а также, определенные для слов сложностные функции и графовые структуры.

Алфавитом называется произвольное конечное множество. *Бесконечное слово* над алфавитом Σ есть элемент множества последовательностей $\Sigma^{\mathbb{N}_0}$, где через $\mathbb{N}_0$ обозначено множество натуральных чисел с нулем. *Конечным словом* длины n называется элемент множества Σ^n. Конечное слово u является *подсловом* слова $x = x_0x_1\ldots$, а точнее, *имеет вхождение* в него на позиции k, если $u = x_kx_{k+1}\ldots x_{k+n}$ для некоторого n. Слово u входит в слово x *равномерно*, если оно входит в него бесконечное число раз, и расстояния между соседними позициями его вхождений в x ограничены константой. Бесконечное слово x называют *рекуррентным*, если всякое его подслово входит в него бесконечное число раз, и *равномерно рекуррентным*, если всякое его подслово входит в него равномерно. Обзор результатов и проблем, связанных с равномерной рекуррентностью бесконечных слов можно найти, например, в [3]. Произведением слов $x = x_0x_1\ldots$ и $y = y_0y_1\ldots$ называется слово $x \otimes y = \langle x_0, y_0\rangle\langle x_1, y_1\rangle$ над алфавитом пар символов. Слово x называется *сильно рекуррентным*, если для всякого равномерно рекуррентного слова y произведение $x\otimes y$ равномерно рекуррентно.

Понятие рекуррентности имеет не “дискретное” происхождение: впервые оно возникло в работах Пуанкаре, посвященных механике. В них он изучает свойства траекторий точек топологических пространств под действием непрерывных преобразований. Один из первых полученных им в этом направлении результатов заключается (в формулировке Биркгофа [12]) в том, что для всяких компактного метрического пространства и его непрерывного отображения в себя имеется точка, чья траектория проходит через всякую ее окрестность бесконечное число раз. Такие точки и их орбиты называются рекуррентными. Еще более близкими к периодичным являются траектории, проходящие через всякую окрестность начальной точке в течении всякого интервала времени, зависящей лишь от окрестности длины. Такие точки также существуют [8] для всяких компактного метрического пространства и его непрерывного отображения в себя и называются равномерно рекуррентными. Определения, приведенные ранее, являются формулировками этих свойств в терминах изучаемых в диссертации объектов. Это же касается и сильной рекуррентности, про которую почти ничего не известно [24, 26, 27], за исключением того, что это — относительно редкое явление [23].

Причина, по которой свойство рекуррентности в настоящее время играет немалую роль в теории факторных языков, заключается в том, что в применении к бесконечным словам оно позволяет получать новые и улучшать имеющиеся результаты Рамсеевского типа (теоремы типа ван дер Вардена, Семереди, Хидмана). Этой теме посвящена монография [24]. Возможно, детальное изучение свойства рекуррентности приведет к получению еще более сильных результатов в этой области.

Еще одним исследуемым в диссертации аспектом бесконечных слов является их сложность. Классической мерой сложности слова x является функция *комбинаторной сложности* $f_x(n)$, считающая различные подслова длины n слова x. Эта функция очень хорошо изучена, хотя в этом направлении имеется и ряд нерешенных вопросов [18]. Одним из ее обобщений является *арифметическая сложность* $a_x(n)$ слова x, равная количеству различных слов вида $x_k x_{k+d} \ldots x_{k+(n-1)d}$ при всевозможных $k \geqslant 0$ и $d \geqslant 1$, которая была впервые представлена в работе [10]. Как и в случае комбинаторной сложности, множество возможных функций арифметической сложности еще не описано. В этом направлении следует отметить ряд результатов [19, 22, 16]. В диссертацию включен результат о существовании бесконечных слов арифметической сложности, промежуточной между полиномиальной и экспоненциальной.

Для изучения бесконечных слов низкой сложности часто используется аппарат графов Рози [4, 1, 5, 15], представленных в работе [34]. Множество конечных слов, замкнутое относительно операции взятия подслов, называется *факторным языком*. *Граф Рози* $\mathbb{R}_L(n)$ порядка n факторного языка L есть такой орграф на словах длины n языка L, что дуга из слова $u_0u_1\ldots u_{n-1}$ ведет в слово $v_0v_1\ldots v_{n-1}$ тогда и только тогда, когда $u_1\ldots u_{n-1} = v_0v_1\ldots v_{n-2}$

(при $n = 1$ считаем это выполненным), и $u_0 u_1 \dots u_{n-1} v_{n-1} \in L$. В диссертации приводится метод построения равномерно рекуррентных слов с последовательностью графов Рози, содержащей подпоследовательность гомеоморфов заданной.

Цель работы состоит в исследовании свойств равномерной рекуррентности бесконечных слов, их сложностных функций и графов Рози.

Методика исследований. В диссертации используются комбинаторные методы дискретного анализа и методы теории графов.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Основные результаты диссертации.

1. Предложены новые способы построения сильно рекуррентных слов, и доказана сильная рекуррентность бесконечных слов следующих классических конструкций:

1.1 неподвижные точки антиподальных морфизмов,

1.2 обобщенно вращательные слова,

1.3 слова Теплица.

2. Сформулированы и доказаны свойства класса сильно рекуррентных слов: доказана замкнутость этого класса относительно операций произведения, взятия арифметической подпрогрессии, взятия блочного представления и применения равнобочных морфизмов.

3. Предложен способ построения равномерно рекуррентных слов над s-буквенным алфавитом, последовательность графов Рози которых содержит подпоследовательность гомеоморфов заданных P_s-орграфов.

4. Получена нетривиальная верхняя оценка на арифметическую сложность слов типа Серпинского и доказано существование бесконечных слов промежуточной арифметической сложности.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международном симпозиуме по информатике в России (Екатеринбург, Россия, 2007), Международной конференции по языкам и автоматам LATA2009 (Таррагона, Испания, 2009), Международной конференции по автоматам и комбинаторике на словах AutoMathA2009 (Льеж, Бельгия, 2009), Международной конференции по дискретной математике и информатике MathInfo2010 (Марсель, Франция, 2010), на заседаниях семинаров “Факторные языки” (НГУ), “Дискретный анализ” (НГУ), “Теория кодирования” (НГУ), “Синтез и сложность схем” (НГУ), на заседании семинара “Динамические системы” (Центр Математики Морнингсайд Китайской Академии Наук, Пекин, 2009).

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы, представленные в диссертации, имеют ценность в комбинаторике на словах и могут быть использованы в комбинаторной теории чисел и теории дискретных динамических систем. Результаты включены в программу спецкурса “Факторные языки”, читаемого на кафедре теоретической кибернетики НГУ.

На защиту выносится совокупность результатов о классе сильно рекуррентных слов, арифметической сложности бесконечных слов и графах Рози.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы (42 наименования). Объем диссертации 77 страниц, включая 1 рисунок и 2 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации и приводится краткий обзор полученных результатов.

В первой главе вводятся основные определения, приводятся необходимые известные факты об объектах исследования и доказываются некоторые вспомогательные технические леммы.

Во второй главе изложены полученные результаты о сильной рекуррентности бесконечных слов. Напомним, что слово x называется *сильно рекуррентным*, если для всякого равномерно рекуррентного слова y произведение $x \otimes y$ равномерно рекуррентно.

Морфизмом называется отображение $\varphi : \Sigma^* \to \Delta^*$, удовлетворяющее тождеству $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ для всех конечных слов u, v. Морфизм называется *(m-)равноблочным*, если он отображает буквы в слова одинаковой длины $m > 1$. Обозначим алфавит $\{0, 1, \ldots, s-1\}$ через Σ_s. Равноблочный морфизм $\varphi : \Sigma_s^* \to \Sigma_s^*$ длины m называется *симметрическим*, если для всех $0 \leqslant i < m$ выполнено равенство $\varphi(j)_i = \varphi(0)_i \oplus j$, где операция $\oplus$ есть сложение по модулю s. Симметрический морфизм над алфавитом Σ_2 называется *антиподальным*.

Неподвижной точкой морфизма φ называется бесконечное слово x, удовлетворяющее соотношению $x = \varphi(x)$. Неподвижные точки морфизмов (так называемые $D0L$-последовательности) образуют обширный хорошо изученный класс слов. Введенные первоначально в 1968 г. для моделирования развития живых организмов [2], впоследствии они нашли применение во многих областях математики и теоретической кибернетики.

Теорема 1. *Неподвижные точки антиподальных морфизмов сильно рекуррентны.*

Примером такой неподвижной точки может служить слово Туэ-Морса $x_{TM} = 0110100110\ldots$ для морфизма $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 10$, впервые введенное А. Туэ [35].

Обозначим через C единичную окружность, отождествляемую с $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. *Вращением* называется отображение $R_\alpha : C \to C$, отображающее точку ρ в $\rho + \alpha \mod 1$.

Пусть нам дано разбиение C окружности на конечное число одинаково ориентированных попарно непересекающихся полуинтервалов I_a, где $a \in \Sigma_s$. Определим *обобщенное вращательное слово* $r = r_0 r_1 \ldots$ шага α и с начальной точкой ρ как слово, для которого $r_i = a$ тогда и только тогда, когда $R_\alpha^i \rho \in I_a$. Обобщенно вращательное слово назовем *восстановимым*, если точки $R_\alpha^i \rho$ не попадают на граничные точки интервалов заданного разбиения.

Теорема 2. *Восстановимые обобщенно вращательные слова сильно рекуррентны.*

Частным случаем обобщенно вращательных слов являются слова Штурма, обладающие многими интересными свойствами [30].

Определим операцию *вставки* бесконечного слова $y = y_0 y_1 \ldots$ в бесконечное слово x над алфавитом $\Sigma \cup \{?\}$ как операцию, которая заменяет i-ое вхождение символа ? в слове x символом y_i, и обозначим результат ее применения через $x \triangleleft y$. Пусть дано конечное слово u над алфавитом $\Sigma \cup \{?\}$, начинающееся с символа, отличного от ?. Определим $y = u^\omega$ и рассмотрим последовательность слов $y, y \triangleleft y, y \triangleleft y \triangleleft y, \ldots$. Эта последовательность сходится к некоторому слову x над алфавитом Σ. Слова, получаемые таким образом для различных u, называют *словами Теплица*.

Описанный способ построения слов является модификацией, предложенной в [28], способа построения почти периодичных функций на множестве действительных чисел, представленного О. Теплицем в [36]. Изучение комбинаторных свойств таких слов началось с работы [33], которая и закрепила за ними название “слова Теплица”. В работе [6] описывается интересная связь этих слов с некоторыми известными комбинаторными проблемами. В работе [17] описывается иной способ построения слов Теплица, основанный на итеративном применении морфизмов, и приводится их классификация.

Для бесконечного слова x и множества $I = \{i_0 < i_1 < \ldots\} \subseteq \mathbb{N}_0$ обозначим через x_I слово $x_{i_0} x_{i_1} \ldots$. Арифметической прогрессией $A \subseteq \mathbb{N}_0$ назовем множество, имеющее вид $\{k + id \ : \ i \in \mathbb{N}_0\}$ для некоторых $k \geqslant 0$ и $d > 0$.

Теорема 3. *Если для слова x существует такое разбиение множества чисел $\mathbb{N}_0$ на попарно непересекающиеся арифметические* *прогрессии A_i, где $i \in I$, что всякое слово x_{A_i} сильно рекуррентно, то и само x сильно рекуррентно.*

Следствием этой теоремы является сильная рекуррентность слов Теплица. Также, эта теорема позволяет конструировать новые сильно рекуррентные слова из имеющихся.

Помимо приведенных выше теорем, в этой главе формулируется и доказывается ряд свойств класса сильно рекуррентных слов. В частности, его замкнутость относительно операций произведения, взятия арифметической подпоследовательности и применения равноблочных морфизмов.

Результаты этой главы докладывались на международных конференциях AutoMathA2009 (Льеж, Бельгия, 2009), MathInfo2010 (Марсель, Франция, 2010), на заседании семинара по динамическим системам в Пекине (2009) и изложены в работе [39].

В третьей главе приводятся результаты о графовых структурах на словах - графах Рози.

Напомним, что *графом Рози* [34] $\mathbb{R}_L(n)$ порядка n факторного языка L называется такой орграф на словах длины n языка L, что дуга из слова $u_0u_1 \dots u_{n-1}$ ведет в слово $v_0v_1 \dots v_{n-1}$ тогда и только тогда, когда $u_1 \dots u_{n-1} = v_0v_1 \dots v_{n-2}$ (при $n = 1$ считаем это выполненным), и $u_0u_1 \dots u_{n-1}v_{n-1} \in L$.

Граф де Брейна можно определить как граф Рози того же порядка языка всех слов над соответствующим алфавитом.

Орграф $G = \langle V_G, E_G \rangle$ называется *частью* орграфа $H = \langle V_H, E_H \rangle$, если $V_G \subseteq V_H$ и $E_G \subseteq E_H$. В этом случае используется запись $G \subseteq H$. Орграф G *вложим* в орграф H, если найдется такой орграф $G' \subseteq H$, что $G \simeq G'$.

Назовем *k-разбиением ребра* орграфа операцию замены этого ребра цепью, состоящей из k дуг и проходимой в том же направлении. Результат k-разбиения всех ребер орграфа G назовем его k-растяжением и обозначим через $\tau_k G$.

Реберный граф πG орграфа G есть такой орграф на ребрах G, что ребро $\langle e_1, e_2 \rangle$ принадлежит πG тогда и только тогда, когда конечная вершина ребра e_1 есть начальная для ребра e_2.

Орграф называется L_s-орграфом, если полустепени исхода и захода его вершин не превосходят s. Орграф, обладающий свойством L_s, называется P_s-орграфом, если в нем найдутся такие вершины

v, v', что полустепень исхода v равна полустепени захода v' и равна s.

В этой главе доказывается следующее утверждение о вложимости.

Лемма 1. *Пусть орграф G является сильно связным P_s-орграфом. Тогда для всякого L_s-орграфа H существуют такие числа n, k, что растяжение $\tau_k H$ вложимо в $\pi^n G$.*

На ее основе доказывается теорема для последовательностей графов Рози.

Теорема 4. *Для всякой последовательности $(G_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ сильно связных P_s-орграфов существует такой равномерно рекуррентный язык L над Σ_s, что $\mathbb{R}_L(n_i) \simeq \tau_{k_i} G_i$ для некоторых последовательностей $(n_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, $(k_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ чисел.*

Доказательство конструктивно, что позволяет в ряде случаев строить равномерно рекуррентные слова, обладающие свойствами, которые могут быть сформулированы в виде требований к их графам Рози.

Результаты этой главы докладывались на Международном симпозиуме по информатике в России (Екатеринбург, Россия, 2007) и изложены в работе [37].

В четвертой главе приводятся результаты о сложностных функциях бесконечных слов.

Арифметическая сложность, определенная ранее, была впервые представлена в работе [10] в 2000 году. В работе [19] вычислена арифметическая сложность неподвижных точек симметричных морфизмов. В работе [22] описаны равномерно рекуррентные слова линейной арифметической сложности. Примененный в ней метод получил развитие в работах [9], где приводится конструкция семейства слов низкой арифметической сложности на основе слов Теплица, и [20]. Арифметическая сложность слов Штурма, как доказано в [16], имеет кубический порядок роста.

В работе [14] было впервые доказано существование равномерно рекуррентных слов над алфавитом Σ_2, чья факторная сложность растет быстрее любого полинома, но не экспоненциально. В диссертации впервые доказывается похожий результат для арифметической сложности. Обозначим через $\chi(n)$ мощность множество подслов длины n всех возможных слов Штурма, которая имеет [30] кубический порядок роста.

Теорема 5. *Для произвольных числе $t, m \in \mathbb{N}$, таких, что $1 < t < m$, существует бесконечное слово x над Σ_2, для арифметической сложности которого справедливы оценки*

$$2^{\frac{n^{\log_m t}}{t}} \leqslant a_x(n) \leqslant 4m^2 n\chi(mn)2^{t^2 n^{\log_m t}}.$$

Использованный при доказательстве метод позволил получить единственную известную на сегодняшний день нетривиальную верхнюю оценку арифметической сложности слов типа Серпинского. Приведем ее, предварив определениями.

Морфизм φ называется *морфизмом типа Серпинского*, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ есть } m\text{-равноблочный морфизм;} \\ &\varphi(0) \text{ начинается с символа } 0; \\ &\varphi(0) \text{ содержит } t \text{ вхождений } 0, \text{ где } 1 < t < m; \\ &\varphi(1) = 1^m. \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 6. *Арифметическая сложность неподвижной точки x морфизма φ, соответствующего условиям (1), удовлетворяет неравенству*

$$a_x(n) \leqslant 4m^2 n\chi(mn)2^{t^2 n^{\log_m t}}.$$

Результаты об арифметической сложности докладывались на международной конференции LATA2009 (Таррагона, Испания, 2009) и изложены в работе [38].

Список литературы

[1] **Белов А.Я., Чернятьев А.Л.** Слова медленного роста и перекладывания отрезков // Успехи матем. наук, 63:1 (2008), 159–160.

[2] **Линденмайер А.** Биологические аспекты развивающихся систем и языков // Кибернетический сб. нов. сер., вып. 17 (1980), 192–232.

[3] **Мучник Ан. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л.** Последовательности, близкие к периодическим // Успехи матем. наук, 64:5 (2009), 21–96.

[4] **Фрид А.Э.** О графах подслов DOL-последовательностей // Дискрет. анализ и исслед. операций 6:4 (1999), 92–103.

[5] **Aberkane A.** Words whose complexity satisfies lim p(n)/n = 1. // Theoret. Comput. Sci. 307:1 (2003), 31–46.

[6] **Allouche J.-P., Bacher R.** Toeplitz sequences, paperfolding, Hanoi towers and progression-free sequences of integers // Ens. Math. 38 (1992), 315–327.

[7] **Allouche J.-P., Shallit, J.** Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[8] **Auslander J., Furstenberg H.** Product recurrence and distal points // Trans. Amer. Math. Soc. 343:1 (1994), 221–232.

[9] **Avgustinovich S. V. , Cassaigne J. and Frid A. E.** Sequences of low arithmetical complexity // Theoret. Informatics Appl. 40 (2006), 569–582.

[10] **Avgustinovich S.V., Fon-Der-Flaass D.G., Frid A.E.** Arithmetical Complexity of Infinite Words // Words, Languages & Combinatorics III, World Scientific Publishing, Kyoto (2003), 51–62.

[11] **Berstel J.** Recent results in Sturmian words // Developments in Language Theory. II, Magdeburg (1996), 13–24.

[12] **Birkhoff G.D.**Dynamical systems // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 9 (1927).

[13] **Cassaigne J.** An Algorithm to Test if a Given Circular HD0L-language Avoids a Pattern // IFIP World Computer Congress'94. Elsevier 1 (1994), 459–464.

[14] **Cassaigne J.** Constructing Infinite Words of Intermediate Complexity // Developments in Language Theory VI, Lect. Notes Comp. Sci. 2450 (2003), Springer, Berlin, 173–184.

[15] **Cassaigne J.** Sequences with grouped factors // Developments in Language Theory III, Aristote University of Thessaloniki (1998), 211–222.

[16] **Cassaigne J., Frid A.E.** On arithmetical complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 380 (2007), 304–316.

[17] **Cassagne J., Karhumäki J.** Toeplitz Words, Generalized Periodicity and Periodically Iterated Morphisms // Lect. Notes Comp. Sci. 959 (1995), Springer, Berlin, 244–253.

[18] **Ferenczi S.** Complexity of Sequences and Dynamical Systems // Discrete Math. 206:1 (1999), 145–154.

[19] **Frid A.E.** Arithmetical complexity of symmetric D0L words // Theoret. Comput. Sci. 306:1 (2003), 535–542.

[20] **Frid A.E.** On possible growths of arithmetical complexity // Theoret. Informatics Appl. 40 (2006), 443–458.

[21] **Frid A.E.** On Uniform DOL Words // STACS'98: Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Lect. Notes Comp. Sci. 1373 (1998), 544–554.

[22] **Frid A.E.** Sequences of linear arithmetical complexity // Theoret. Comput. Sci. 339 (2005), 68–87.

[23] **Furstenberg H.** Poincare Recurrence and Number Theory// The mathematical heritage of Henri Poincare, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math.Soc. 39:2 (1980), 192–216.

[24] **Furstenberg H.** Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton Univ. Press, Princeton (1981).

[25] **Gjini N., Kamae T., Tan B. and Xue Y.-M.** Maximal pattern complexity for Toeplitz words // Ergodic Theory and Dynamical Systems 26 (2006), 1–14.

[26] **Haddad K., Ott W.**Recurrence in pairs //Ergodic Theory and Dynamical Systems 28 (2008), Cambridge University Press, 1135–1143.

[27] **Hasselblatt B., Katok A.**Handbook of Dynamical Systems Vol. 1B, Elsevier (2005).

[28] **Jacobs K., Keane M.** 0-1 sequences of Toeplitz type // Z. Wahr. verw. Geb. 13 (1969), 123–131.

[29] **Kamae T., Zamboni L.** Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory and Dynamical Systems 22:4 (2002), 1191–1199.

[30] **Lothaire M.** Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[31] **Mignosi F., Séébold P.:** If a D0L Language is k-power-free then It Is Circular. // ICALP'93: Automata, Languages and Programming, Lect. Notes Comp. Sci. 700 (1993), Springer, Berlin, 507–518.

[32] **Morse M., Hedlund G.A.** Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories // Amer. J. Math. 62 (1940), 1–42.

[33] **Prodinger H., Urbanek F.J.** Infinite 0-1 sequences without long adjacent identical blocks // Discrete Math. 28 (1979), 277–289.

[34] **Rauzy G.** Suites à termes dans un alphabet fini // Seminar on Number Theory, 1982-1983. Talence: Univ. Bordeaux I 25 (1983), 16.

[35] **Thue A.** Über unendliche Zeichenreihen // Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl., V.7 (1906), 1–22.

[36] **Toeplitz O.** Beispiele zur Theorie der fastperiodischen Funktionen // Math. Ann. 98 (1928), 281–295.

Публикации автора по теме диссертации

[37] **Салимов П.В.** Существование бесконечного слова, последовательность графов Рози которого содержит подпоследовательность гомеоморфов заданных орграфов // Дискретн. анализ и исслед. опер., 15:5 (2008), 61–75.

[38] **Salimov P.V.** Constructing Infinite Words of Intermediate Arithmetical Complexity // Language and Automata Theory and Applications, Lect. Notes Comp. Sci. 5457 (2009), Springer, Berlin, 696–701.

[39] **Salimov P.V.** On Uniform Recurrence of a Direct Product // AutoMathA2009: from Mathematics to Applications, plenary conference, (University of Liège, 2009), Europian Science Foundation (2009), 1–9.

Салимов Павел Вадимович

Рекуррентность и равномерная рекуррентность бесконечных слов
и их произведений

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 06.07.2010. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 75 экз. Заказ N

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
пр. Ак. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090