РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

РЫКОВ Иван Александрович

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ КАЧЕСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ, УПАКОВКИ И ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

(01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л.Соболева Сибирского отделения РАН.

Научный руководитель:	д.ф.-м.н., профессор Э. Х. Гимади
Официальные оппоненты:	д.ф.-м.н., профессор В. К. Попков
	к.ф.-м.н. А. Н. Глебов
Ведущая организация:	

Защита состоится "__" ноября 2009 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д.003.015.01 при Учреждении Российской академии наук Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института математики СО РАН.

Автореферат разослан "__" октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Объектом исследования настоящей работы являются задачи дискретной оптимизации, связанные с проблемами календарного планирования, упаковки и выбора подмножества векторов.

Предметом исследования диссертации являются задача календарного планирования с ограниченными ресурсами и задача выбора подмножества векторов с максимальной нормой суммы. Обе задачи имеют важное практическое значение.

Задача календарного планирования с ограниченными ресурсами возникает во многих реальных приложениях, связанных с планированием проектов — совокупностей работ, направленных на достижение некоторой цели и использующих общие ограниченные ресурсы. Несмотря на достаточно простую постановку задачи, данная модель является одной из самых сложных задач исследования операций ([13]). Она $\mathbb{NP}$-трудна в сильном смысле. В связи с высокой прикладной значимостью, для решения этой задачи предложено множество алгоритмов приближенного решения. Однако в своем большинстве они являются эвристическими, и оценки их качества основаны на результатах численных экспериментов.

Задача выбора подмножества векторов с максимальной нормой суммы возникает при поиске повторяющегося фрагмента в зашумленной числовой последовательности. Эта задача играет важную роль в таких приложениях, как электронная разведка, радиолокация, телекоммуникация, геофизика, обработка речевых сигналов, медицинская и техническая диагностика и др. (см. [4, 7, 6]). Задача выбора подмножества векторов также является $\mathbb{NP}$-трудной.

Продуктивным подходом к исследованию $\mathbb{NP}$-трудных задач является выделение подклассов задачи, допускающих построение полиномиальных точных алгоритмов. Также при решении $\mathbb{NP}$-трудных задачи важное значение приобретают эффективные приближенные алгоритмы с гарантированными оценками качества. Обозначим через $f_{\mathcal{A}}(I)$ значение целевой функции на решении, которое алгоритм $\mathcal{A}$ находит для примера I, а через $f^*(I)$ — значение целевой функции на оптимальном решении этого примера. Величину $\varepsilon_{\mathcal{A}} = \sup\{(f_{\mathcal{A}}(I) - f^*(I))/f^*(I) \big| I \in \mathcal{M}\}$ называют величиной относительной погрешности алгоритма $\mathcal{A}$. Здесь через $\mathcal{M}$ мы обозначаем «массовую задачу» — множество примеров, т.е. задач с конкретными входными данными, к которым применим алгоритм $\mathcal{A}$.

Величина $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ характеризует поведение приближенного алгоритма в худшем случае. Большой интерес представляет также вероятностный анализ алгоритма на случайных входных данных. Одним из подходов является рассмотрение такой характеристики качества работы алгоритма, как вероятность его несрабатывания $\delta_{\mathcal{A}}$, т.е. доля случаев, когда алгоритм не обеспечивает анонсированную оценку относительной погрешности $\varepsilon_{\mathcal{A}}$. Этот подход был впервые предложен в [5], и с тех пор получил широкое распространение (см., например, [14]). Особый интерес представляет нахождение условий асимптотической точности, т.е. таких условий на распределение входных данных, при котором оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{A}}$ одновременно стремятся к нулю с ростом размера задачи.

Целью исследования диссертации является построение точных и приближенных полиномиальных алгоритмов с оценками качества для важных специальных случаев задачи календарного планирования и задачи выбора подмножества векторов.

Основой для построения алгоритмов с гарантированными оценками качества служит изучение комбинаторной структуры задачи, в частности, путем сравнения с другими дискретными оптимизационными моделями. Обе исследуемые задачи тесно связаны с задачами упаковки, являясь обобщениями таких классических задач, как задача упаковки в контейнеры и задача о рюкзаке. Сравнение исследуемых задач с задачами упаковки также является целью работы.

Наконец, целью работы является реализация практических алгоритмов решения задачи календарного планирования в виде вычислительного программного модуля.

Методы исследований. При построении алгоритмов с гарантированными оценками качества в работе использовались комбинаторные методы дискретного анализа, методы вероятностного анализа, элементы аналитической геометрии.

Разработка программного модуля и оценка качества эвристических алгоритмов осуществлялась с использованием языка программирования C++.

Научная новизна. В работе представлены оригинальные алгоритмы с улучшенными, в сравнении с ранее известными, оценками качества. Впервые представлены условия асимптотической точности решения мультипроектной задачи календарного планирования. Впервые доказана полиномиальная разрешимость задачи выбора подмножества векторов с максимальной нормой суммы при фиксированной размерности пространства.

Практическая ценность. Разработанная коммерческая библиотека может быть использована как вычислительный модуль в программных приложениях, связанных с принятием решений при планировании. В частности, модуль используется в клиент-серверной системе планирования собраний “Freetime”.

Остальные результаты работы имеют преимущественно теоретический характер. Разработанные алгоритмы могут использоваться для решения соответствующих практических задач, упомянутых в разделе «актуальность темы».

Основные результаты.

1. Улучшена верхняя граница для величины, характеризующей максимальное различие оптимумов задачи упаковки в полосу и частного случая задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами. Также получена верхняя оценка величины, характеризующей асимптотическое, при росте числа работ в примере, различие оптимумов этих задач.

2. Построен наиболее компактный пример, служащий иллюстрацией нижней оценки величины максимального различия оптимумов указанных задач: пример с шириной полосы, равной восьми, длиной расписания, равной четырем и длиной упаковки, равной пяти. Доказано, что пример является наименьшим среди примеров, на которых оптимумы задач различаются, в лексикографическом упорядочении по параметрам длина расписания — ширина полосы.

3. Построен полиномиальный приближенный алгоритм решения мультипроектной задачи календарного планирования с одним типом ресурса. Представлены условия его асимптотической точности на случайных входных данных.

4. Для задачи выбора подмножества векторов заданной мощности с максимальной нормой суммы установлена полиномиальная разрешимость при фиксированной размерности пространства. Построен алгоритм A_P точного решения этой задачи с трудоемкостью $O(k^2 n^{2k})$, где n — число векторов, из которых производится выбор, k — размерность евклидова пространства.

5. Для целочисленного случая указанной задачи построен точный алгоритм A_D, имеющий трудоемкость $O\Big(kmn(2mb)^{k-1}\Big)$, где m — мощность выбираемого подмножества, и все компоненты векторов по модулю не превосходят b. Алгоритм является псевдополиномиальным при фиксированном k и обладает лучшей по сравнению с алгоритмом A_P трудоемкостью при условии, что $2mb \leq n^2$.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2004, 2005, 2006), на Всероссийских конференциях «Методы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2006, 2009), на Международных конференциях по исследованию операций «Optimal Discrete Structures and Algorithms» (Росток, 2006), «Operations Research» (Карлсруэ, 2006; Аугсбург, 2008), «European Conference on Operational Research» (Прага, 2007; Бонн, 2009), «Combinatorial Optimization» (Ковентри, 2008), на научных семинарах Института математики и механики УрО РАН, Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 19 работ, из них 4 публикации в научных журналах, 2 препринта и 13 публикаций в трудах и тезисах конференций. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 115 страницах, содержит введение, две главы, заключение, благодарности и список литературы, содержащий 61 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор известных результатов, посвященных рассматриваемым задачам, обосновывается актуальность темы исследования и кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе исследуется задача календарного планирования с ограниченными ресурсами.

В **разделе 1.1** приводятся постановки классической задачи календарного планирования, а также некоторых её известных обобщений, таких как времена появления работ в проекте, директивные сроки, ресурсы с переменными выделением и потреблением, мультимодальное исполнение работ, складируемые и невозобновимые ресурсы.

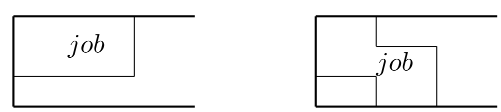
В разделе 1.2 исследуется вопрос о различии оптимальных значений задачи упаковки в полосу и специального случая задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами.

Рассматривается случай (далее обозначаемый как $RCSP$) с пустым графом предшествования и одним типом ресурса. Математическая модель для этого случая выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \max\limits_{j\in J}(s_j + l_j) & \to & \min\limits_{s_j \in Z^+} \\ \sum\limits_{j\in A(S,t)} w_j & \leq & W, \qquad t = 1, 2\dots \end{cases}$$

(здесь W — интенсивность выделения ресурса, w_j — интенсивности потребления ресурса работами, l_j — длительности работ; $A(S,t) = \{j|s_j < t \leq s_j + l_j\}$ — множество работ, выполняющихся в интервале времени t).

Построение расписания представляется в виде расположения в полубесконечной полосе ширины W прямоугольников с длиной l_j (ориентированной вдоль полосы) и шириной w_j. При этом непересечение прямоугольников между собой и с границами полосы означает соблюдение ресурсного ограничения: в каждый момент времени суммарная ширина выполняемых работ (интенсивность потребления ресурса) не превышает ширины полосы (интенсивности выделения ресурса). Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между входными данными примеров этой задачи и известной двумерной задачей упаковки в полосу ([10], далее обозначаемой SPP — strip packing problem). Однако, представление работ в виде прямоугольников накладывает дополнительное ограничение на работы. В исходной постановке задачи $RCSP$ работам не предписано использование одних и тех же единиц ресурса в течение времени выполнения, поэтому работа может быть представлена в виде l_j прямоугольников единичной длины, уложенных последовательно друг за другом в полосу.



Таким образом, задача $RCSP$ является релаксацией задачи SPP. Возникает вопрос о соотношении оптимальных значений на множестве входных примеров.

Введем следующие обозначения.

$$\rho = \sup_L \frac{SPP^*(L)}{RCSP^*(L)},$$

$$\rho_\lambda = \sup\left\{ \frac{SPP^*(L)}{RCSP^*(L)} \,\middle|\, L - \text{такие, что } \frac{RCSP^*(L)}{l_{\max}(L)} \geq \lambda \right\},$$

$$\rho_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} \rho_\lambda,$$

где L — произвольный вход для обеих задач, а $l_{\max}(L)$ — наибольшая из длин прямоугольников во входе.

Таким образом, величина ρ характеризует максимальное отличие оптимальных значений задач на всем множестве входных примеров, а величина ρ_∞ — различие на множестве «больших» примеров, т.е. примеров с большим числом работ.

Доказана следующая теорема.

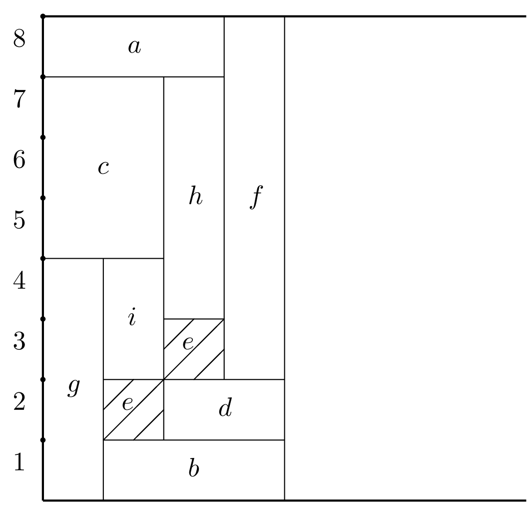
Теорема 1.1 *Для величин ρ и ρ_∞имеют место оценки*

$$1,25 \le \rho \le 2,7;$$

$$1 \le \rho_\infty \le 1,25.$$

Верхние оценки в теореме доказаны с использованием анализа приближенных алгоритмов из работ [11] и [9]. Показано, что нижние оценки оптимума $SPP^*(L)$ для этих алгоритмов являются также нижними оценками для $RCSP^*(L)$.

Нижняя оценка для величины ρ была доказана ранее в работе [8]. В диссертации для этой оценки построен более компактный пример и доказана его минимальность.



Ширина полосы, а также длина и ширина каждой из девяти работ представлены на рисунке вместе с оптимальным расписанием длины, равной четырём.

Теорема 1.2 *Оптимальная упаковка для приведенного примера имеет длину, равную пяти.*

Теорема 1.3 *Для любого примера L с вектором (оптимальная длина расписания, ширина полосы), лексикографически меньшим (4, 8), оптимальные значения $RCSP(L)$ и $SPP(L)$ совпадают.*

Из теоремы 1.2 следует, что данный пример служит доказательством неравенства $\frac{5}{4} \leq \rho$, а теорема 1.3 показывает, что этот пример минимален для лексикографического упорядочения примеров по длине оптимального расписания и ширине полосы.

В **разделе 1.3** рассматривается мультипроектная постановка задачи календарного планирования с одним ресурсом, когда граф предшествования состоит из нескольких компонент связности.

Предложен следующий алгоритм решения данной задачи:

1. В каждом проекте выбрать нумерацию прямоугольников, согласованную с ограничениями предшествования ($(i, j) \in E \Rightarrow num(i) < num(j)$). Пусть M_k — число работ в k-ом проекте, $M_{max} = \max\limits_{k \leq m}\{M_k\}$.

2. Для каждого $i = 1, \dots M_{max}$ упаковать все прямоугольники с номером i алгоритмом W-связок Гимади и Залюбовского ([3]). Границу полученной упаковки считать основанием для упаковки прямоугольников со следующим номером.

Алгоритм рассматривает работы как прямоугольники и строит допустимую упаковку, которая является также допустимым расписанием. Проводится вероятностный анализ данного алгоритма. Предлагается следующая процедура формирования входа задачи.

- Количество работ n и количество проектов m считаются детерминированными входными данными.

- Каждая из работ распределяется (случайным или детерминированным образом) в один из проектов.

- В каждом из проектов на множестве работ задается орграф без циклов (случайным или детерминированным образом).

- Независимо каждая из работ получает длину $l_j \in \{1 \dots L\}$ и ширину $w_j \in \{1 \dots W\}$ в соответствии с дискретным распределением, заданным матрицей (p_{wl}).

Матрицу $A = (a_{wl})$ назовем W–асимметричной если $\forall l \in \{1 \dots L\}$, $\forall w \in \{1 \dots \lfloor W/2 \rfloor\}$, $p_{w,l} \le p_{(W-w),l}$.

Пусть на множестве примеров $\mathcal{M}$ задана вероятностная мера $\mathcal{P}$ и пусть массовая задача $\mathcal{M} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ разбита на классы в соответствии с размерностью примеров. Алгоритм называется асимптотически точным относительно вероятности $\mathcal{P}$, если существуют последовательности ε_n, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, такие, что

$$\mathcal{P}\left(\frac{f_{\mathcal{A}}(I) - f^*(I)}{f^*(I)} \le \varepsilon_n \middle| I \in \mathcal{M}_n\right) \ge 1 - \delta_n.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.4 *Пусть имеется m проектов, число работ в каждом из них одинаково. Пусть матрица (p_{wh}) W-асимметрична. Тогда при условиях $n = m \ln m$ и $WL = o(\frac{\ln^3 m}{m})$ алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}_{SPP}$ асимптотически точен.*

В разделе 1.4 излагается опыт участия в прикладных проектах, связанных с решением задач планирования. Описываются эвристические алгоритмы, реализованные в коммерческой библиотеке LSE ([19]), позволяющие решать как классическую задачу, так и обобщения, рассмотренные в разделе 1.1 (для задач с директивными сроками не гарантируется нахождение допустимого решения, поскольку эта задача $\mathbb{NP}$-трудна). Алгоритмы основаны на методе последовательной укладки работ в расписание ([12]).

Приводится постановка «задачи натурального перепланирования», возникающая во многих приложениях. Вход данной задачи дополнен множеством $\{\widetilde{s}_j | j = 1, \dots N\}$, представляющим некоторое начальное (недопустимое) расписание. Требуется найти допустимое расписание, имеющее минимальный суммарный сдвиг работ по сравнению с входным расписанием. Описан эвристический алгоритм решения этой задачи, реализованный в модуле LSE, а также представлена система планирования собраний “Free-time” как пример приложения, где востребовано решение этой задачи.

Исследуется стохастическая модель графа предшествований, использованная при анализе задачи строительства Восточно-сибирского нефтегазового комплекса. Данная модель возникает в связи с неопределенностями, связанными с результатами геологоразведки и применением инновационных технологий. Представлен алгоритм розыгрыша стохастической модели и методы статистического прогнозирования сроков окончания проекта.

Во второй главе исследуется задача выбора подмножества векторов с максимальной нормой суммы.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи «подмножество векторов» и её обобщения «подмножество векторов с ограничением».

Задача m-ПВ («ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ с максимальной нормой суммы»): *Задано конечное семейство векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в евклидовом пространстве R^k и натуральное число $m < n$. Требуется найти подсемейство векторов из V мощности m, обладающее максимальной нормой суммы.*

Под нормой здесь и далее понимается евклидова норма в k-мерном пространстве $\mathbb{R}^k$, т. е. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$).

Задача ПВО («m-ПВ с ОГРАНИЧЕНИЕМ»): *Задано конечное семейство векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в евклидовом пространстве R^k и натуральные числа m и l, удовлетворяющие условию $lm < n$. Требуется выделить в V подсемейство векторов $X = \{\vec{v}_{a_1}, \vec{v}_{a_2}, \ldots, \vec{v}_{a_m}\}$, обладающее максимальной нормой суммы, при соблюдении ограничений на номера соседних векторов выделенного подсемейства:*

$$a_{i+1} - a_i \geq l \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Задача m-ПВ является частным случаем задачи ПВО (с $l = 1$).

Обсуждается постановка задачи ПВО как задачи обнаружения квазипериодического фрагмента в зашумленной числовой последовательности ([7]), включающей передачу m повторений фрагмента $U = (u_1, \ldots u_k)$ можно представить как $X = (x_1, \ldots x_{n+k-1})$, где $x_i = \sum_{j=1}^m u_{i-i_j}, \quad i = 1, \ldots, n+m-1, \ u_{i-i_j} = 0$, если $i - i_j \neq 0, \ldots, k-1$. Принимающая сторона наблюдает вектор $Y = X + E$, где $E = (e_1, \ldots e_{n+k-1})$, $e_i \in \Phi_{0,\sigma^2}$ — независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины. Обнаружение по критерию максимального правдоподобия приводит к минимизации функционала

$$S(X(i_1, \ldots, i_m, U)) = \|Y - X(i_1, \ldots, i_m, U)\|^2.$$

где $U \in \mathcal{R}^k$. После минимизации S по U получаем задачу

$$f(i_1, \ldots i_m) = \|Y\|^2 - \frac{1}{M}\| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{i_m}\|^2 \to \min$$

где $Y_i = (y_i, \dots y_{i+k-1})$, что равносильно задаче ПВО (условие $a_{i+1} - a_i \geq l$ для $l = k$ соответствует непересечению фрагментов).

Приводятся полученные ранее результаты. $\mathbb{NP}$-трудность задачи ПВО показана в работе [4], $\mathbb{NP}$-трудность задачи m-ПВ — в работе [1]. Также в работе [1] построен алгоритм решения задачи m-ПВ с величиной относительной погрешности, равной $(k-1)/(8L^2)$, и временной сложностью $O\Big(nk^2(2L+1)^{k-1}\Big)$, где L — параметр алгоритма. Этот алгоритм предоставляет полиномиальную аппроксимационную схему при фиксированной размерности k. Также на основе этого алгоритма получен псевдополиномиальный при фиксированном k алгоритм точного решения целочисленной задачи m-ПВ с трудоемкостью $O(nk^2(kmb)^{k-1})$, где b — максимальная по абсолютной величине координата векторов из семейства V.

Ставится вопрос о сложностном статусе задачи при фиксированном k.

В разделе 2.2 предлагается псевдополиномиальный алгоритм решения целочисленной постановки задач m-ПВ и ПВО, имеющий лучшую по сравнению с алгоритмом из [1] оценку временной сложности.

В основе алгоритма лежит схема динамического программирования.

Пусть строки матрицы (v_{ij}) образованы векторами $v_1, \dots v_n$. Пусть $\vec{B} \in Z_+^{k-1}$ — вектор с компонентами $B_i = \sum_{r=1}^{m} v_{i,\sigma_i(r)}$, $1 \leq i < k$, где σ_i — перестановка, упорядочивающая элементы $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ i-й строки матрицы (v_{ij}) по невозрастанию (т.е., B_i — сумма m максимальных значений i-ой строки). $\mathcal{B} = \{\vec{\beta} \in Z_+^{k-1} \;\Big|\; \vec{L} \leq \vec{\beta} \leq \vec{B}\}$. Для элементов последней k-ой строки введем обозначение $c_j = v_{kj}$. Следующая теорема позволяет свести решение k-мерной задачи к решению серии одномерных задач с дополнительным ограничением.

Теорема 2.1 *Пусть $x^*(\vec{\beta})$ и $\hat{f}_{mn}(\vec{\beta})$ — соответственно, оптимальное решение и значение оптимума следующей задачи*

$$\begin{gathered}
\Big|\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\Big| \to \max \\
\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leq i < k; \\
\sum_{j=1}^{n} x_j = m; \\
x_j \in \{0,1\},\ 1 \leq j \leq n.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $\vec{\beta}^*$ — оптимальное решение задачи

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}) \to \max \qquad (2)$$
$$\vec{\beta} \in \mathcal{B}.$$

Тогда $x^*(\vec{\beta}^*)$ — оптимальное решение задачи ПВ с целочисленными координатами векторов.

Для решения одномерной задачи 1 достаточно решить две задачи с тем же набором ограничений и линейными целевыми функциями $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ и $\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$.

Решение этих задач может быть получено применением схемы динамического программирования по параметрам m и n. Более точно, обозначим через $f_{\mu,\nu}(\vec{\beta})$ оптимальное значение задачи

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{\nu} c_j x_j \to \max \\
\sum_{j=1}^{\nu} v_{ij} x_j = \beta_i, \ 1 \le i < k; \\
\sum_{j=1}^{\nu} x_j = \mu; \\
x_j \in \{0,1\}, \ 1 \le j \le \nu.
\end{gathered}$$

В работе доказывается следующая лемма, предоставляющая рекуррентные формулы для нахождения оптимальных значений семейства задач.

Лемма 2.1. *Для всяких $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ верны следующие рекуррентные соотношения:*

$$f_{0,\nu}(\vec{\beta}) = \begin{cases} 0, \ \text{если } \vec{\beta} = \vec{0}, \\ -\infty, \ \text{иначе}, \end{cases} \qquad \text{для всех } \nu = 1, \ldots, n; \qquad (3)$$

$$f_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\mu} c_r, \ \text{если } \vec{\beta} = \sum_{r=1}^{\mu} \vec{v}_r, \\ -\infty, \ \text{иначе}, \end{cases} \qquad \text{для всех } \mu = 1, \ldots, m; \qquad (4)$$

$$f_{\mu,\nu}(\vec{\beta}) = \max\{c_\nu + f_{\mu-1,\nu-1}(\vec{\beta} - \vec{v}_\nu); \ f_{\mu,\nu-1}(\vec{\beta})\}, \qquad (5)$$

для всех $\mu = 1, \ldots, m, \ \nu = \mu + 1, \ldots, n$.

Алгоритм A_D решения задачи m-ПВ состоит в решении одномерных задач вида 1 для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$. Для решения одномерной задачи используются рекуррентные соотношения из леммы 2.1. Для задачи ПВО удается применить аналогичную схему построения алгоритма. Оценка мощности множества $\mathcal{B}$ и трудоемкости решения одномерной задачи приводит к следующей теореме.

Теорема 2.2. *Если размерность k пространства R^k фиксирована, то задачи m-ПВ и ПВО с целочисленными координатами векторов решаются точно за псевдополиномиальное время $O\Big(kmn(mb)^{k-1}\Big)$ в случае неотрицательных координат и $O\Big(kmn(2mb)^{k-1}\Big)$ в случае координат произвольного знака.*

Результаты раздела получены в соавторстве с Э.Х. Гимади и Ю. В. Глазковым.

В разделе 2.3 осуществляется построение точного алгоритма решения задачи m-ПВ, полиномиального при фиксированном k. Таким образом, вопрос, поставленный в разделе 2.1, получает для задачи m-ПВ положительный ответ.

Идея алгоритма основана на следующих доказанных в работе фактах:

Утверждение 2.1. *Решение задачи может быть получено выбором лучшего по всем направлениям решения, состоящего из m векторов, дающих наибольшие проекции на заданное направление*

Утверждение 2.2. *Набор m векторов, дающих максимальные проекции на направление, изменяется только при переходе направления через гиперплоскости, перпендикулярные векторам вида $v_i - v_j$*

Из первого утверждения следует, что задачу m-ПВ можно решить, перебрав всевозможные направления пространства и решив соответствующую одномерную задачу. Из второго утверждения следует, что перебирать достаточно лишь по одному направлению (представителю) из каждой связной области, ограниченной указанными гиперплоскостями (в работе представлено более формализованное изложение этих идей).

Способ построения множества представителей основан на применении леммы из работы [2].

Семейством областей принадлежности решения (*ОПР*) для данных ненулевых векторов $u_1, u_2, \dots, u_t$ назовем семейство максимальных по включению связных подмножеств пространства $\mathbb{R}^k$, не пересекающихся с ортогональными гиперплоскостями для векторов $u_1, u_2, \dots, u_t$. Набор векторов пространства $\mathbb{R}^k$, содержащий ровно по одному вектору из каждой области семейства ОПР, назовем *семейством представителей областей* *принадлежности решения* для векторов $u_1, u_2, \ldots, u_t$.

Лемма ([2]). *Семейство представителей ОПР для ненулевых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_t$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ имеет мощность $O(kt^{k-1})$ и может быть найдено за время $O(k^2 t^k)$.*

Алгоритм A_P заключается в построении семейства представителей ОПР для множества векторов $\{v_j - v_i \| 1 \leq i \leq j \leq n\}$. Для каждого из представителей находится m векторов, дающих наибольшие проекции на соответствующее направление. Лучшее из полученных решений является оптимальным.

Теорема 2.4 *Алгоритм A_P находит оптимальное решение задачи m-ПВ за время $O(k^2 n^{2k})$.*

Результаты раздела получены в соавторстве с Э.Х. Гимади и А. В. Пяткиным.

В разделе 2.4 приведен рандомизированный алгоритм A_R решения задачи m-ПВ. Идея алгоритма основана на утверждении 2.1, а также на том факте, что отношение проекций векторов на почти параллельные направления близко к единице.

Алгоритм A_R заключается в независимом равномерном выборе L точек на сфере. Через каждую такую точку i проводится луч из начала координат. Далее, для каждого из полученных направлений алгоритм находит набор m из векторов, дающих максимальные проекции на данное направление. В качестве приближенного решения задачи выбирается лучшее из просмотренных решений.

Алгоритм считается сработавшим, если угол между оптимальным решением и ближайшим из рассмотренных направлений оказался меньшим некоторого числа ϕ_0 — параметра алгоритма.

Теорема 2.5. *Алгоритм A_R приближенного решения задачи m-ПВ имеет оценки относительной погрешности*

$$\varepsilon_{A_R} = O(\phi_0^2),$$

вероятности несрабатывания

$$\delta_{A_R} = \exp\left(-\frac{(\frac{7}{4}\sin\frac{\phi_0}{2})^{k-1}}{\pi\sqrt{k}} L \right)$$

и временной сложности $T_{A_R} = O(nkL)$.

Следствие 2.1. *Алгоритм A_R с параметрами $\phi_0 = \frac{1}{\ln n}$ и $L = k^{3/2} n (\ln n)^k$, за время $T_{A_R} = O(nk^{3/2} \ln^k n)$ находит асимптотически точное решение* *задачи m-ПВ с оценками относительной погрешности $\varepsilon_{A_R} = O(1/(2\ln^2 n))$ и вероятности несрабатывания $\delta_{A_R} = O(1/n)$ и является асимптотически точным.*

Результаты раздела получены в соавторстве с Э. Х. Гимади.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Эдуарду Хайрутдиновичу Гимади за постоянную поддержку и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.* Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций, Серия 2. 2007. Т. 14, N 1. С. 22–32.

[2] *Бабурин А. Е., Пяткин А. В.* О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций, Серия 1, 2006, Т. 13, N 2. С. 3–10. 106.

[3] *Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Шарыгин П. И.* Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход // Известия высших учебных заведений. 1997. № 12. С. 37–49.

[4] *Гимади Э. Х., Кельманов А. В., Кельманова М. А., Хамидуллин С. А.* Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. IX, № 1(25). С. 55–74.

[5] *Гимади Э. Х., Перепелица В.А.* К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1969. № 15 С. 57–65.

[6] *Кельманов А.В.* Проблема off-line обнаружения квазипериодически повторяющегося фрагмента в числовой последовательности. // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. 14(2). С. 81–88.

[7] *Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Окольнишникова Л. В.* Апостериорное обнаружение одинаковых подпоследовательностей-фрагментов в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 2(10). С. 94–108.

[8] *Шарыгин П. И.* Оценки приближенного решения одной задачи календарного планирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 57–67.

[9] *Baker B. S., Brown D. J., Kartseff H. P.* A 5/4 algorithm for two-dimensional packing // J. of Algorithms. 1981. N 2. P. 348–368.

[10] *Baker B.S., Coffman E.G., Rivest R.L.* Orthogonal packings in two dimensions // SIAM Journal on Computing. 1980. N 9. P. 846.

[11] *Coffman E. G., Garey M. K., Johnson D. S., Tarjan K. E.* Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms // SIAM J. on Computing. 1980. V. 9, N 4. P. 808–826.

[12] *Kelley, J.E.* The critical-path method: Resource planning and scheduling. // Industrial Scheduling. 1963.

[13] *Mohring R.H., Schulz A.S., Stork F., Uetz M.* Solving project scheduling problems by minimum cut computations // Management Science. 2003. P. 330–350.

[14] *Slominski L.* Probabilistic analysis of combinatorial algorithms: A bibliography with selected annotations // Computing. 1982. 28(3) P. 257–267.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах

[15] *Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Рыков И.А.* О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами с максимальной нормой суммы в евклидовом пространстве // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 4. С. 30–43.

[16] *Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А.* О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 6. С. 11–19.

[17] *Рыков И. А.* О сравнении задачи упаковки в полосу с одной задачей календарного планирования // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 4. С. 57–73.

[18] *A. Ershov, I. Ivanov, V. Kornienko, S. Preis, A. Rasskazov, I. Rykov* A new scheduling engine for PLM // International Journal of Product Lifecycle Management. 2006. V. 1. № 2. C. 164–180.

Прочие публикации

[19] *Ершов А., Иванов И., Корниенко В., Прейс С., Рассказов А., Рыков И.* LSE: Новое вычислительное ядро системы планирования ledas scheduler 3.0 и перспективы его использования. // Препринт. Новосибирск, ЗАО ЛЕДАС. 2005. 38 с.

[20] *Ершов А., Корниенко В., Прейс С., Рассказов А., Рыков И., Ушаков Д.* Обзор возможностей системы планирования Freetime. // Препринт. Новосибирск, ЗАО ЛЕДАС. 2005. 24 с.

[21] *Рыков И.А.* Алгоритмы для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами. // Мат. XLIII Международной научной студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. НГУ, Новосибирск. 2005.

[22] *Рыков И.А.* Алгоритмы приближенного решения задачи календарного планирования. // Мат. XLIV Международной научной студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. НГУ, Новосибирск. 2006.

[23] *Рыков И. А.* Алгоритмы приближенного решения задачи календарного планирования. // Мат. Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск. 2006. С. 121.

[24] *Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Пляскина Н.И., Рыков И.А.* Вероятностные аспекты планирования нефтегазового комплекса ВСНГК // Мат. Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск. 2009. С. 221

[25] *Рыков И. А.* Приближенный алгоритм решения мультипроектной задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами на случайных входах // Мат. Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск. 2009. С. 161

[26] *Gimadi E., Glazkov Y., Rykov I.* On Subset Vector Problem with Maximal Euclidean Norm of Sum // Abstracts of International Conference on Operation Research, Augsburg. 2008. P. 210–211.

[27] *Rykov I.* Solving RCPSP using relaxation with consumable resources // Abstracts of International Conference on Operations Research, Bremen. 2005. P. 178

[28] *Rykov I.* Polynomial approximation algorithms for solving resource-constrained project scheduling problem // Electronic Notes in Discrete Mathematics, Elsevier. 2006. V. 27. P. 93–94.

[29] *Rykov I.A.* Approaches to solving RCPSP using Relaxed Problem with Consumable resources // Operations Research Proceedings 2006, Springer Berlin Heidelberg. 2007. P. 547–552

[30] *Rykov I.* Asymptotically exact approach for solving RCPSP with single resource // Abstracts of European conference on Operational Research, Prague. 2007. P. 83

[31] *Rykov I.* Asymptotically exact approach to solving RCPSP with one resource type // Abstracts of International Symposium on Combinatorial Optimization, Coventry. 2008. P. 74

[32] *Rykov I.* Polynomial optimal algorithm for solving subset vector problem in the space with fixed dimension. // Abstracts of European conference on Operational Research, Bonn. 2009. P. 225

Рыков Иван Александрович

Алгоритмы с оценками качества для задач календарного планирования, упаковки и выбора подмножества векторов

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

———————————————————————————————
Подписано в печать хх.10.09. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 56.
———————————————————————————————

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6.