На правах рукописи

Рыбников Иван Павлович

Минимальные лагранжевы подмногообразия в проективных комплексных пространствах в терминах функции Бейкера—Ахиезера

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена на кафедре геометрии и топологии Механико-математического факультета Новосибирского государственного университета

Научные руководители: чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н.,
профессор Тайманов Искандер Асанович,

д. ф.-м. н. Миронов Андрей Евгеньевич

Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., профессор
Дубровский Владислав Георгиевич,

д. ф.-м. н., профессор
Царёв Сергей Петрович

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Защита состоится 9 июня 2011 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 28 апреля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Минимальные лагранжевы подмногооразия интересны как с точки зрения интегрируемых систем, так и с точки зрения их приложений к теории струн, точнее к зеркальной симметрии. В математическом описании зеркальной симметрии, предложенном в [1], минимальные лагранжевы подмногообразия играют важную роль. В SYZ-теории зеркальная симметрия между многообразиями Калаби — Яо L_1 и L_2 объясняется в терминах двойственных трехмерных минимальных лагранжевых подмногообразий.

Для $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ теория минимальных лагранжевых торов хорошо изучена. Первые явные примеры таких торов получены в [2]. Конформная метрика ($ds^2 = 2e^w dz d\bar{z}$) минимального лагранжева тора в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ удовлетворяет уравнению Цицейки:

$$w_{z\bar{z}} = e^{-2w} - e^w$$

В [3] найдены квазипериодические решения этого уравнения и фактически формулы, полученные в этой работе, пригодны для построения всех минимальных лагранжевых торов [4],[5]. В [6] найдены минимальные лагранжевы конусы в $\mathbb{C}^3$, инвариантные относительно действия $U(1)$ (это эквивалентно построению поверхностей в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$).

В больших размерностях теория минимальных лагранжевых подмногообразий менее развита. Такие подмногообразия описываются сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и большинство методов построения частных решений это редукция к ОДУ.

Также в работе предложен метод построения криволинейных ортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны $K \neq 0$ в терминах n — точечной функции Бейкера–Ахиезера. Метрики постоянной кривизны появляются в описании нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа (см. [7], где условие постоянства кривизны метрики является необходимым, для того чтобы скобка Пуассона была кососимметрической и удовлетворяла тождеству Якоби). Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, порождаемые метриками постоянной кривизны (скобки Мохова — Ферапонтова), играют важную роль в теории систем гидродинамического типа. Задача описания согласованных скобок Мохова — Ферапонтова эквивалентна задаче описания пучков метрик постоянной кривизны.

Цель работы.

1. Найти минимальные лагранжевы подмногообразия в проективных комплексных пространствах произвольной размерности.
2. Получить метод построения криволинейных ортогональных систем координат в пространствах с постоянной кривизной.

Методы исследований.

Доказательства основных теорем основаны на свойствах лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ и методах конечнозонного интегрирования.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1. Предложен подход к построению минимальных лагранжевых подмногообразий в комплексных пространствах произвольной размерности. Этот метод позволяет находить решения уравнений в частных производных, описывающих минимальные лагранжевы подмногообразия, без редуцирования к ОДУ. Решения этих уравнений строятся с помощью модифицированной конструкции Кричевера построения плоских криволинейных ортогональных систем координат [8]. Также в работе выписаны явные формулы для минимальных лагранжевых погружений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ в случае гиперэллиптической спектральной кривой.
2. Предложен метод построения криволинейных ортогональных систем координат в пространствах с постоянной кривизной. Этот метод основан на модификации конструкции Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дифференциальной геометрии, в теории систем гидродинамического типа, специалистами по минимальным лагранжевым многообразиям.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН:

-дважды на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» (руководитель чл.-корр. РАН И. А. Тайманов),

-на семинаре отдела анализа и геометрии (руководитель академик РАН Ю. Г. Решетняк).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [12,13,14].

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающего 30 наименований. Общий объем диссертации составляет 62 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты диссертации и дается краткий обзор по теме диссертации.

В первой главе излагается метод построения минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ с диагональной метрикой. В §1.1 объясняется почему лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ можно искать в виде

$$\mathcal{H}\circ\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n,$$

где

$$\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^{n+1}) : \mathbb{R}^n \to S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1},$$

$\mathcal{H}$ — проекция Хопфа. Причем φ должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$< \varphi, \varphi_{x_1} >= \cdots < \varphi, \varphi_{x_n} >=< \varphi_{x_i}, \varphi_{x_j} >= 0,\ i \neq j, \tag{1}$$

где $< \cdot, \cdot >$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$, $< \cdot, \cdot >= (\cdot, \cdot) - i\omega(\cdot, \cdot)$, здесь $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$, $\omega(\cdot, \cdot)$ — симплектическая форма в $\mathbb{C}^{n+1}$. В §1.2 показывается, что если для функции φ из параграфа 1.1 будет выполнено условие

$$\det\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}}\varphi_{x_1}, ..., \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_n}{2}}\varphi_{x_n}\right)^{\top} = const, \tag{2}$$

где

$$|\varphi_{x_1}|^2 = 2e^{v_1(x)}, ..., |\varphi_{x_n}|^2 = 2e^{v_n(x)},\ x = (x_1, ..., x_n),$$

то отображение $\mathcal{H}\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ минимально. В §1.3 находятся дополнительные ограничения на функцию φ, чтобы условия (2) были выполнены. Эти условия состоят в следующем:

$$\mathrm{Im}(\Gamma^1_{1i} + \cdots + \Gamma^n_{ni}) = 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где Im — обозначение мнимой части, Γ^k_{ij} определяются из следующих разложений:

$$\varphi_{x_i x_j} = \Gamma^1_{ij}\varphi_{x_1} + ... + \Gamma^n_{ij}\varphi_{x_n} + b_{ij}\varphi,\ i,j = 1,\dots,n.$$

В §1.4 напоминается определение функции Бейкера — Ахиезера, поскольку в ее терминах будут находиться решения системы (1). В §1.5 найдены ограничения на спектральные данные функции Бейкера — Ахиезера ψ, чтобы отображение $\varphi = \alpha_i\psi$, где α_i — некоторые константы, удовлетворяло системе (1) и было выполнено $< \varphi, \varphi >= 1$. В §1.6 найдены дополнительные ограничения на спектральные данные функциии φ, чтобы условия (3) были выполнены. Основным результаты этого параграфа является теорема:

Теорема 2. *Пусть спектральная кривая Γ имеет антиголоморфную инволюцию*

$$\mu : \Gamma \to \Gamma$$

с фиксированными точками $Q_1, ..., Q_{n+1}, P_1, ..., P_n$ и мероморфной 1-формой со следующими дивизорами нулей и полюсов:

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + ... + P_n,$$

$$(\Omega)_\infty = Q_1 + ... + Q_{n+1} + r,$$

и пусть $Res_{Q_i}\Omega > 0$. Тогда $\mathcal{H} \circ \varphi$ задает лагранжевое отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Если кроме того существует голоморфная инволюция

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,$$

такая, что

$$\mu(\gamma) = \sigma(\gamma),\ \tau(r) = r,$$

$d \in \mathbb{R}$ и форма Ω имеет следующие разложения в окрестностях P_i

$$\begin{gathered}\Omega = (c_1 w_1 + d_1 {w_1}^3 + ...)dw_1,\ w_1 = \frac{1}{k_1},\\ ...\\ \Omega = (c_n w_n + d_n {w_n}^3 + ...)dw_n,\ w_n = \frac{1}{k_n},\end{gathered} \tag{4}$$

то отображение минимально.

В §1.7 с помощью основной теоремы из §1.6 получены формулы для минимальных лагранжевых погружений в случае гиперэллиптической спектральной кривой. Эти погружения задаются в терминах тэта — функций многообразия Якоби. Основным результатом параграфа является теорема:

Теорема 3. *Пусть спектральная кривая* Γ *задается уравнением*

$$w^2 = P(z) = (z - z_1)...(z - z_{2g+2}),\ \ z_i \in \mathbb{R},$$

тогда отображение $\mathcal{H} \circ (\varphi^1, \ldots, \varphi^{2g+2}) : \mathbb{R}^{2g+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2g+1}$

$$\varphi^i = A_i \frac{\theta(\int\limits_r^{Q_i} \omega + x_1 U^2 + ... + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma)}{\theta\left(x_1 U^2 + ... + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma\right)} e^{L(x_1,\ldots,x_{2g+1})}$$

лагранжево и минимально, где A_i *— некоторые константы (см.(6)),* $\theta(z)$ *— тэта функция Римана поверхности* Γ, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *— базис голоморфных дифференциалов на* Γ, Q_i *— некоторые точки на* Γ *(см. теорему 2),* Ω_j *— мероморфные дифференциалы на* Γ *с полюсами второго порядка в* $(z_j, 0)$, $j = 2, \ldots, 2g+2$, *и нулевыми a-циклами.* U^j *— b-периоды* Ω_j, $L(x_1, \ldots, x_{2g+1}) = 2\pi i x_1 \int\limits_r^{Q_i} \Omega_2 + ... + 2\pi i x_{2g+1} \int\limits_r^{Q_i} \Omega_{2g+2}$, $r = (z_1, 0)$, $K_\gamma = K - \int\limits_r^{\gamma_1} \omega - \cdots - \int\limits_r^{\gamma_g} \omega$, *где* K *— вектор римановых констант,* γ_i *— точки дивизора* γ *(см. теорему 2).*

В случае эллиптической спектральной кривой в этом параграфе найдены условия периодичности получаемых отображений.

В §1.8 строятся примеры минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ в вырожденном случае, когда спектральная кривая является приводимой и каждая неприводимая компонента изоморфна $\mathbb{CP}^1$. В этом случае функция Бейкера — Ахиезера выражается через элементарные функции. В §1.8 мы следуем методам работы [9]. Приведем пример одного из построенных подмногообразий. Это подмногообразие задается формулами:

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{16} + \frac{i}{16}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{6}i(6x-6y+z)}\left((3-4i)e^{2ix} + e^{i(4y+z)}\right),$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{1}{16} - \frac{i}{16}\right)\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{6}i(6x+5(6y+z))}\left(e^{2ix} + (3+4i)e^{i(4y+z)}\right),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{16\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)}\Big((1+2i)e^{2ix} + (3+6i)e^{2i(x+y+z)} +$$
$$+ (1-2i)e^{3i(2y+z)} + (3-6i)e^{i(4y+z)}\Big),$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{16\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)} \Big((-2+i)e^{2ix} + (6-3i)e^{2i(x+y+z)} -$$
$$-(2+i)e^{3i(2y+z)} + (6+3i)e^{i(4y+z)} \Big).$$

Лагранжев угол и индуцированная метрика имеют вид

$$e^{i\beta} = -i,$$

$ds^2 = dx^2 + \frac{3}{4}\left(2cos(x-2y-\frac{z}{2}) + sin(x-2y-\frac{z}{2})\right)^2 dy^2 +$
$+\frac{1}{12}\left(cos(x-2y-\frac{z}{2}) - 2sin(x-2y-\frac{z}{2})\right)^2 dz^2.$

Секционная кривизна полученного подмногообразия тождественно равна 1, вторая фундаментальная форма равна 0, т.е. погружение вполне геодезическое. Следовательно, построенное подмногообразие — $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Вторая глава посвящена криволинейным ортогональным системам координат в пространствах постоянной кривизны $K \neq 0$. В этой главе предложен метод построения таких систем координат в терминах n — точечной функции Бейкера — Ахиезера. Диагональной метрике

$$ds^2 = H_1^2(du_1)^2 + \dots + H_n^2(du_n)^2,$$

где $H_i(u_1, \dots, u_n)$ — коэффициенты Ламе, постоянной кривизны K отвечает решение следующей системы

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}, i \neq j \neq k, \tag{5}$$

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i,j} \beta_{mi}\beta_{mj} = -KH_iH_j, \tag{6}$$

где, $\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}, i \neq j$. В данной работе с помощью модифицированной конструкции Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$ [8] находятся решения систем уравнений (5), (6). В §2.1 напоминается конструкция Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$. В §2.2 указывается модификация этой конструкции, сформулированная в следующей теореме:

Теорема 4. *Предположим, что существует 1-форма Ω, такая что*

$$(\Omega) = D + \sigma D + P - Q_1 - \dots - Q_{n+1} - R - \sigma r_1 - \dots - \sigma r_l.$$

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $A_i = Res_{Q_i}\Omega$, $B = Res_r \Omega$, и C_i определяется из разложения $\left(-C_i k_i^{-1} + ...\right) dk_i^{-1}$ формы Ω в окрестности точки P_i, $i = 1 \dots n$. Пусть $h = \psi(r)$ — константа *нормировки функции Бейкера — Ахиезера ψ в точке r, и $f_j(u_1,\dots,u_n)$, $j=1,\dots,n$ определяется как первый коэффициент разложения в окрестности точки P_j функции $e^{-u_jk_j}\psi = \left(f_j+\frac{g_j}{k_j}+\dots\right)$. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\sum_{k=1}^{n+1}\psi(Q_k)^2A_k+h^2B=0, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\psi_{u_i}(Q_k)\psi_{u_j}(Q_k)A_k=0, i,j=1\dots n, i\neq j, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\psi_{u_i}^2(Q^k)A_k=C_if_i^2, i=1\dots \tag{9}$$

Функции $\psi(u_1,\dots,u_n,Q_i), i=1,\dots,n+1$ зависящие от n вещественных переменных $u_1,\dots,u_n$, вообще говоря, комплексные. Для того чтобы получить вещественность этих функций, будем требовать выполнения условий, сформулированных в следующей лемме:

Лемма 5. *Пусть существует антиголоморфная инволюция τ, такая что точки дивизоров P,D,R и точки $Q_1,\dots,Q_{n+1}$ неподвижны относительно τ, причем в окрестности точек P_i инволюция τ действует как $\tau k_i=\overline{k_i}$. Тогда функции $\psi(u_1,\dots,u_n,Q_i), i=1,\dots,n+1$ вещественны.*

Для функции Бейкера — Ахиезера, чьи спектральные данные удовлетворяют **Лемме 5**, можно сформулировать следующие следствия **Теоремы 4**:

Следствие 4. *Предположим, что A_i вещественные, такие что $A_i>0$ для всех $i=1\dots n+1$, и $h^2B=-1$, тогда функции*

$$x^i(u_1,\dots,u_n)=\sqrt{A_i}\psi\left(u_1,\dots,u_n,Q_i\right), i=1,\dots,n$$

задают ортогональные координаты в S^n. При этом коэффициенты Ламе $H_i=\sqrt{f_i^2C_i}$ удовлетворяют системе (5),(6) при $K=1$.

При рассмотрении ортогональных систем координат в гиперболическом пространстве мы будем использовать стандартную модель на гиперболоиде, т.е. будем рассматривать H^n как компоненту связности гиперболоида

$$(x^1)^2-(x^2)^2-\dots-(x^{n+1})^2=1$$

в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$.

Следствие 5. *Предположим, что A_i вещественные, такие что $A_i<0, i=2,\dots,n+1$, $A_1>0$ и $h^2B=-1$, тогда функции.*

$$x^i(u^1,\dots,u^n)=\sqrt{|A_i|}\psi\left(u^1,\dots,u^n,Q_i\right), i=1,\dots,n+1$$

задают ортогональную системы координат в H^n. При этом коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{-f_i^2 C_i}$ удовлетворяют системе (5),(6) при $K = -1$.
В §2.3 с помощью **Теоремы 4** строится пример криволинейных ортогональных систем координат на S^2:
$x_1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{3}}[\cos\frac{u-v}{\sqrt{3}} + \sin\frac{u-v}{\sqrt{3}}]$,
$x_2(u,v) = \frac{1}{12}[(3+\sqrt{3})\cos(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v) + 3(-1+\sqrt{3})\cos(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v) - 3(1+\sqrt{3})\sin(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v) + (-3+\sqrt{3})\sin(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v)]$,
$x_3(u,v) = \frac{1}{12}[3(1+\sqrt{3})\cos(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v) + (-3+\sqrt{3})\cos(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v) + (3+\sqrt{3})\sin(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v) - 3(-1+\sqrt{3})\sin(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v)]$
Индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{3}du^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \sin\left(\frac{2(u-v)}{\sqrt{3}}\right)\right)dv^2.$$

Координатные линии этой системы изображены на рис.1. Отметим, что при фиксированном v, координатные линии являются окружностями радиуса 1, но в отличии от обычной сферической системы координат, эти окружности не имеют общих точек в северном и южном полюсах.

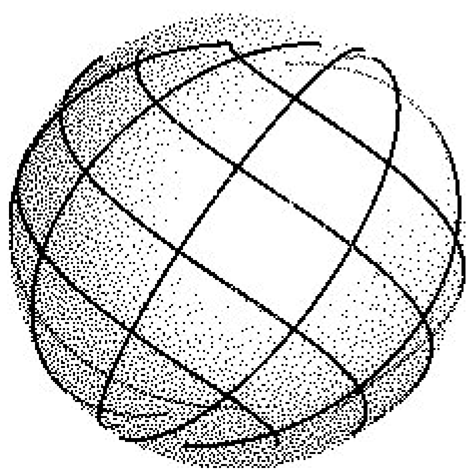

Рис. 1

Также в этом параграфе построены криволинейные ортогональные системы координат на H^2 :
$x_1(u,v) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(e^{-u-v} + (2+\sqrt{3})e^{u+v})$,
$x_2(u,v) = \frac{1}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}((-2e^{-u-v}+(6+4\sqrt{3})e^{u+v})\cos v - 2(\sqrt{3}e^{-u-v}+(2+\sqrt{3})e^{u+v})\times$
$\times \sin v)$,
$x_3(u,v) = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}(((3+\sqrt{3})e^{-u-v} + (5+3\sqrt{3})e^{u+v})\cos v + ((-1-\sqrt{3})e^{-u-v} +$
$(9+5\sqrt{3})e^{u+v})\sin v)$.
В координатах u и v метрика на H^2 имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right) e^{-2(u+v)} \ + \left(97+56\sqrt{3}\right) e^{2(u+v)}}{52+30\sqrt{3}} - 1 \right) dv^2.$$

Координатные линии этой системы координат изображены на рис. 2.

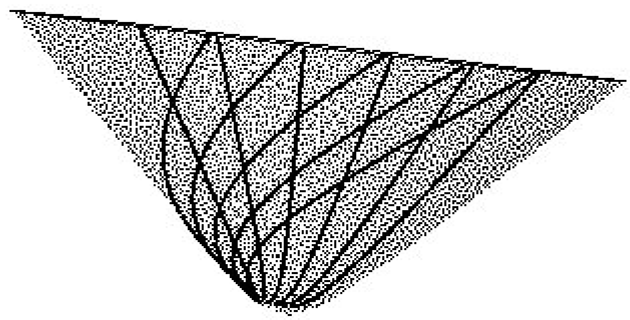

Рис. 2

Благодарности.
Автор выражает глубокую благодарность А.Е. Миронову за постановку задачи и внимание к работе, И.А. Тайманову за внимание к работе и поддержку, а также всему коллективу кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета за доброжелательную атмосферу.

Литература

[1] Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E. Mirrow Symetry is T-duality // Nucl. Phys. 1996. V. B479. P. 243–259.

[2] Castro I., Urbano F. New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane // Manuscr. Math. 1994. V. 85, N 3–4. P. 265–281.

[3] Шарипов Р.А. Минимальные торы в пятимерной сфере // Теор. и матем. физика. 1991. Т. 87, № 1. С. 48–56.

[4] Hui Ma, Yujie Ma Totally Real Minimal Tori in $\mathbb{C}P^2$ // Math. Z. 2005 V. 249, N 2. P. 241–267.

[5] Carberry E., McIntosh I. Minimal Lagrangian 2-tori in $\mathbb{C}P^2$ come in real families of every dimention // J. London Math. Soc. 2004. V. 69. P. 531–544.

[6] Haskins M. Special Lagrangian Cones // American Journal of Mathematics. Vol. 2004. V. 126, N 4. P. 845–871.

[7] Мохов О.И., Ферапонтов Е.В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // Успехи Мат. Наук. 1990. Т. 45, № 3(273). С. 191–192.

[8] Кричевер И.М. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. Анал. и его прил. 1997. V. 31, № 1. С. 32–50.

[9] Миронов А.Е., Тайманов И.А. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 180–196.

Работы автора по теме диссертации

[10] Рыбников И.П. Минимальные лагранжевы помногообразия в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ с диагональной метрикой // Сиб. мат. журнал. 2011. Т. 52, № 1. С. 133–142.

[11] Рыбников И.П. Минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ в терминах функций Бейкера-Ахиезера спектральных кривых // Матем. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, № 2. С. 98–108.

[12] Бердинский Д.А., Рыбников И.П. Об ортогональных криволинейных системах координат в пространствах постоянной кривизны // Сиб. мат. журнал. 2011. Т. 52, № 3. С. 502–511.

В работе [12] вклад авторов равноценный.