На правах рукописи

ПОПОВ Александр Александрович

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ПРОСТЫЕ
АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ И ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ**

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Пожидаев Александр Петрович.

Официальные оппоненты:

Пчелинцев Сергей Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, профессор;

Зубков Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Омский государственный педагогический университет, заведующий кафедрой.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.

Защита диссертации состоится **15 ноября 2013 г.** в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук. Автореферат разослан «__» октября 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 003.015.02

кандидат физико-математических наук

А.И.Стукачев

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Как известно, основным вопросом в теории колец является описание простых колец (алгебр). В классификацию простых альтернативных алгебр основополагающий вклад внесли А.И. Ширшов, Р. Брак, Л.А. Скорняков, М. Слейтер, Э. Клейнфелд и другие. Так, например, Л.А. Скорняков в [1] доказал, что альтернативная неассоциативная алгебра с делением является алгеброй Кэли-Диксона. Э. Клейнфелд в [2] обобщил этот результат на произвольные простые альтернативные неассоциативные алгебры. Еще одним важным классом алгебр, близких к ассоциативным, являются йордановы алгебры. Эти алгебры возникли как формализм описания аксиом квантовой механики в совместной работе П. Йордана, Дж. фон Неймана и Е. Вигнера [3], в которой были описаны конечномерные формально-вещественные йордановы алгебры. Они показали, что каждая такая алгебра, за одним исключением, является прямой суммой алгебр, близких к матричным алгебрам. Проблема описания простых йордановых алгебр была сформулирована Дж. фон Нейманом и являлась одной из самых трудных задач в теории йордановых алгебр. Исследованием этой проблемы занимались многие математики, например, Н. Джекобсон, Дж. Осборн, К. Маккриммон. Однако, описать простые йордановы алгебры удавалось только при дополнительных условиях. Даже не было понятно, как выглядят йордановы алгебры с делением. Эта проблема была сформулирована Н. Джекобсоном и решена Е.И. Зельмановым в [4]. Затем Е.И. Зельманов [5] описал произвольные простые йордановы алгебры.

Дифференциально простые алгебры являются естественным обобщением простых алгебр и применялись еще Х. Цассенхаусом в 1939 г. в работе [6] при изучении алгебр Ли, однако сам термин «дифференциально простая алгебра» (если более точно, $\mathfrak{D}$ -простая алгебра, где $\mathfrak{D}$ — множество всех дифференцирований данной алгебры) появился в 1953 г. в работе [7] и принадлежит А. Алберту, который применял дифференциально простые алгебры для исследования алгебр с ассоциативными степенями. В этой же работе, среди прочего, было доказано, что в случае характеристики $p > 0$ радикал ассоциативной коммутативной дифференциально простой алгебры с единицей является ее наибольшим идеалом и выделяется полупрямым слагаемым, причем все элементы радикала нильпотентны индекса p , а если характеристика основного поля равна 0, то данная алгебра будет простой. Также в работе [7] был при-

веден пример дифференциально простой конечномерной ассоциативно-коммутативной алгебры над полем ненулевой характеристики (алгебра усеченных многочленов), и уже в 1960 г. Л. Харпер в работе [8] доказал, что над алгебраически замкнутым полем нет других примеров.

Э. Познер продолжил изучение дифференциально простых алгебр (колец). В 1960 г. в работе [9] им было установлено, что дифференциально простое кольцо не является локально нильпотентным, а в случае характеристики 0 будет первичным или даже простым, если дополнительно потребовать наличие минимального идеала (здесь следует отметить, что по аналогии с центроидом, который для простых колец является полем, Э. Познером был введен дифференциальный центроид, являющийся полем в случае дифференциально простых колец, так что дифференциально простое кольцо всегда является алгеброй над некоторым полем); в этой же работе было доказано, что всякое ассоциативно-коммутативное дифференциально простое кольцо содержит единицу; исследовались расширения дифференциально простых колец. Далее в 1964 г. Ш. Юань в работе [10] существенно развил теорию дифференциально простых ассоциативно-коммутативных колец характеристики $p > 0$ и, в частности, получил результаты аналогичные результатам Алберта: выделение радикала полупрямым слагаемым и нильпотентность (индекса, не превосходящего p) элементов радикала без условия конечномерности. В этой же работе Ш. Юань доказал, что дифференциально простая ассоциативно-коммутативная алгебра над полем характеристики $p > 0$ локальна, и, если ее радикал (он будет единственным максимальным идеалом) нильпотентен, то сама алгебра изоморфна алгебре усеченных многочленов над основным полем, что является существенным улучшением упомянутого результата Л. Харпера. Следует отметить, что Ш. Юань использовал топологию, определяемую собственным идеалом дифференциально простого кольца.

Одним из наиболее важных и интересных результатов в теории дифференциально простых алгебр является следующая теорема, опубликованная Р. Блоком в 1969 г. в работе [11]:

Теорема. Пусть A — дифференциально простое (не обязательно ассоциативное) кольцо (или K -алгебра над ассоциативным коммутативным кольцом K с единицей), обладающее минимальным идеалом. Тогда либо A — простое кольцо (K -алгебра), либо

$$A = S \otimes_K B_{n,p}(K),$$

где S — простое кольцо характеристики $p > 0$ и

$$B_{n,p}(K) = K[x_1, \dots, x_n]/\text{idl} \langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle -$$

алгебра усеченных многочленов над полем K ; здесь через $\text{idl} \langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle$ обозначен идеал, порожденный множеством $\{x_1^p, \dots, x_n^p\}$.

В этой же работе данный результат был применен к исследованию полупростых алгебр Ли.

В связи с теоремой Р. Блока И.П. Шестаковым была сформулирована

Проблема. *Описать дифференциально простые алгебры, близкие к ассоциативным, не обладающие, вообще говоря, минимальными идеалами.*

Решению данной проблемы и посвящена настоящая диссертация. Иными словами, основная цель данной диссертации — распространить теорему Блока на случай алгебр без минимального идеала. Это удастся сделать в случае альтернативных и йордановых алгебр характеристики p (в йордановом случае $p > 2$) благодаря развитой структурной теории соответствующих классов алгебр и, в особенности, теории простых йордановых и альтернативных алгебр. Следует отметить, что теорию дифференциально простых альтернативных и йордановых алгебр нельзя назвать развитой. Автору известна единственная работа [12] (Т. Равишанкар, 1970), посвященная вообще-то конечномерным $\mathfrak{D}$ -полупростым алгебрам, где упоминаются альтернативные дифференциально простые алгебры.

Теория дифференциально простых алгебр интересна еще и своими связями с теорией супералгебр. Так, например, Ш.-Дж. Ченг в работе [13] в 1995 г. обобщил результаты Р. Блока на случай дифференциально простых супералгебр характеристики 0 с минимальным идеалом. Дифференциально простые алгебры (и их обобщения) также были использованы И.П. Шестаковым в 1997 г. в работе [14] при исследовании первичных альтернативных супералгебр. Еще одним важным примером является работа 2001 г. Е.И. Зельманова и К. Мартинез [15], в которой дифференциально простые алгебры применялись для описания простых конечномерных йордановых супералгебр простой характеристики. Также дифференциально простые алгебры возникают при исследовании некоммутативных йордановых супералгебр (см. [16]).

Основные результаты диссертации.

1. Доказано, что всякая дифференциально простая (относительно некоторого множества дифференцирований) альтернативная неассоциативная алгебра A над полем характеристики 0 будет кольцом Кэли-Диксона, квадратичным над своим центром, который, в свою очередь, является дифференциально простой ассоциативной коммутативной алгеброй. Установлено, что в этом случае алгебра A есть конечно порожденный проективный модуль ранга 8 над своим центром (теоремы 2.1.2 и 2.1.5, опубликовано в [18]).
2. Описаны дифференциально простые альтернативные неассоциативные алгебры над полем характеристики $p > 0$. Доказано, что всякая такая алгебра есть тензорное произведение своего центра на алгебру Кэли-Диксона над некоторым полем (теорема 2.2.4, опубликовано в [18]).
3. Доказано, что всякая дифференциально простая исключительная йорданова алгебра будет кольцом Алберта, каждый элемент которого удовлетворяет уравнению третьей степени с коэффициентами из центра упомянутой алгебры (теорема 3.2.1, опубликовано в [19]).
4. Доказано, что всякая дифференциально простая йорданова алгебра, не являющаяся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, над полем характеристики $p > 2$ представима в виде тензорного произведения своего центра на некоторую простую центральную исключительную конечномерную йорданову алгебру (теорема 3.3.1, опубликовано в [19]).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, изложенные в диссертации, имеют теоретическое значение и являются распространением классической теоремы Р. Блока на более широкий класс алгебр, чем тот, что был исследован в данной теореме. Результаты могут быть полезны для дальнейшего развития теории дифференциально простых алгебр и супералгебр.

Методы исследования. В диссертации используются классические методы теории неассоциативных алгебр и методы теории PI-алгебр (как ассоциативных, так и неассоциативных), также используется развитая

структурная теория простых альтернативных (неассоциативных) алгебр и простых исключительных йордановых алгебр.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на международной алгебраической конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2012), на международной конференции по теории колец, посвященной 90-летию со дня рождения А.И. Ширшова (Новосибирск, 2011), на молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2009), на международной конференции «Алгебра и математическая логика», посвященной 100-летию со дня рождения В.В. Морозова (Казань, 2011), на семинаре им А.И. Ширшова «Теория колец» ИМ СО РАН и на семинаре «Алгебра и логика» в Новосибирском государственном университете. По результатам диссертации автором был сделан пленарный доклад на международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2013).

Публикации. Основные результаты опубликованы в форме статей в ведущих отечественных журналах [18], [19], входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Список литературы содержит 43 наименования. Диссертация изложена на 71 странице текста, набранного на компьютере в редакционно-издательской системе $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Нумерация всех утверждений тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — порядковый номер результата. Нумерация формул двойная: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер формулы внутри главы.

Введение

Во введении формулируется постановка задачи, дается обзор исследований по проблеме диссертации, приводятся формулировки результатов диссертации.

Глава 1. Предварительные результаты

Первая глава носит, в основном, реферативный характер: даются определения и приводятся формулировки утверждений, необходимых в дальнейшем. Для полноты изложения приводятся конструкции алгебр Кэли-Диксона и алгебр Алберта.

Напомним, что F -линейное отображение $\partial : A \rightarrow A$ называется *дифференцированием алгебры A* , если $\partial(xy) = \partial(x)y + x\partial(y)$ для всех $x, y \in A$.

Пусть $\mathfrak{Der}(A)$ — множество всех дифференцирований алгебры A . Зафиксируем некоторое $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{Der}(A)$.

Идеал I алгебры A называется *$\mathfrak{D}$ -идеалом* (обозначается $I \triangleleft_{\mathfrak{D}} A$), если для любых $\partial \in \mathfrak{D}$ и $x \in I$ имеет место включение $\partial(x) \in I$.

Алгебра A называется *$\mathfrak{D}$ -простой*, если $A^2 \neq (0)$ и в A нет $\mathfrak{D}$ -идеалов, отличных от (0) и A . В случае, когда $\mathfrak{D} = \mathfrak{Der}(A)$, говорят, что A *дифференциально проста*.

В первой главе доказаны следующие два предложения, относящиеся к случаю альтернативных алгебр:

Предложение 1.2.2. *Если A — $\mathfrak{D}$ -простая альтернативная алгебра, то ее ассоциативный центр совпадает с центром.*

Предложение 1.2.4. *Если A — $\mathfrak{D}$ -простая альтернативная алгебра, то в A не выполнено тождество $[x, y]^n = 0$ ни для какого натурального n , где $[x, y] = xy - yx$.*

Глава 2. Дифференциально простые альтернативные алгебры

Глава 2 посвящена доказательству следующих трех теорем:

Теорема 2.1.2. *Альтернативная неассоциативная $\mathfrak{D}$ -простая алгебра A над полем F характеристики 0 является кольцом Кэли-Диксона. Причем A квадратична над своим центром $Z = Z(A)$, т. е. для всех $x \in A$ выполнено*

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0, \quad t(x), n(x) \in Z,$$

здесь $t(x)$, $n(x)$ определены однозначно, отображение t является Z -линейным, и $n(xy) = n(x)n(y)$ для всех $x, y \in A$. Более того, Z — это $\mathfrak{D}'$ -простая алгебра, где $\mathfrak{D}' = \{\partial|_{Z(A)} \mid \partial \in \mathfrak{D}\}$; в частности, A обладает единицей. Здесь $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры A .

Теорема 2.1.5. *Пусть A — $\mathfrak{D}$ -простая альтернативная неассоциативная алгебра над полем F характеристики 0 , где $\mathfrak{D}$ — некоторое множество дифференцирований алгебры A . Тогда A является конечно-порожденным проективным $Z(A)$ -модулем ранга 8 .*

Теорема 2.2.4. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$, A — альтернативная неассоциативная алгебра над F , $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры A . Тогда если A является $\mathfrak{D}$ -простой, то A изоморфна $B \otimes_K Z(A)$, где $B = A/\mathcal{L}(A)$, а K — поле, изоморфное образу $Z(A)$ при каноническом гомоморфизме A на B , $F \subseteq K \subseteq Z(A)$. При этом B имеет структуру алгебры Кэли-Диксона над K , а $Z(A)$ является $\mathfrak{D}'$ -простой алгеброй, где $\mathfrak{D}' = \{\partial|_{Z(A)} \mid \partial \in \mathfrak{D}\}$; здесь через $\mathcal{L}(A)$ обозначен наибольший локально нильпотентный идеал алгебры A .*

Результаты второй главы опубликованы в [18].

Глава 3. Дифференциально простые йордановы алгебры

Основными результатами главы 3 являются следующие две теоремы:

Теорема 3.2.1. *Пусть J — $\mathfrak{D}$ -простая исключительная йорданова алгебра над полем F характеристики 0 , где $\mathfrak{D}$ — семейство дифференцирований алгебры J . Тогда J является кольцом Алберта, а ее центр $Z(J) = Z$ будет $\mathfrak{D}$ -простой ассоциативной коммутативной алгеброй (в частности, в J есть единица). При этом каждый элемент алгебры*

J удовлетворяет кубическому уравнению над Z , т. е. для всех $x \in J$ выполнено

$$x^3 - t(x)x^2 + \frac{1}{2}(t(x^2) - t(x)^2)x - n(x) = 0,$$

где $t, n : J \rightarrow Z$, t — Z -линейное отображение, а n — однородное отображение над Z степени 3.

Теорема 3.3.1. Пусть J — йорданова алгебра над полем F характеристики $p > 2$, не являющаяся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры J . Тогда если J является $\mathfrak{D}$ -простой, то J изоморфна $H \otimes_K Z(J)$, где $H = J/\mathcal{L}(J)$, а K — поле, изоморфное образу $Z = Z(J)$ при каноническом гомоморфизме J на H , $F \subseteq K \subseteq Z$. При этом H является простой конечномерной центральной исключительной йордановой K -алгеброй, а Z является $\mathfrak{D}$ -простой коммутативной ассоциативной алгеброй. Здесь, как и ранее, через $Z(J)$ обозначен центр алгебры, а через $\mathcal{L}(J)$ — ее наибольший локально нильпотентный идеал.

Кроме того, в главе 3 получены следующие результаты о специальных йордановых алгебрах:

Теорема 3.1.1. Пусть A — $\mathfrak{D}$ -простая ассоциативная алгебра над полем F характеристики не 2, где $\mathfrak{D}$ — семейство дифференцирований алгебры A . Тогда $A^{(+)}$ — $\mathfrak{D}$ -простая йорданова алгебра. Здесь через $A^{(+)}$ обозначена алгебра с аддитивной структурой алгебры A и новым умножением $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - yx)$.

Теорема 3.1.4. Пусть J — $\mathfrak{D}$ -простая специальная йорданова алгебра над полем характеристики не 2, где $\mathfrak{D}$ — произвольное множество дифференцирований алгебры J . Тогда существует $\mathfrak{D}'$ -простая ассоциативная алгебра A такая, что

1. J является подалгеброй $A^{(+)}$;
2. множество J порождает A как ассоциативную алгебру;
3. множество $\mathfrak{D}'$ состоит из дифференцирований алгебры A , являющихся продолжениями дифференцирований из $\mathfrak{D}$ на A .

Результаты главы 3 опубликованы в [19].

Глава 4. О свободе дифференциально простых алгебр как модулей над своими центрами

Теорема 2.1.5. утверждает, что всякая дифференциально простая альтернативная неассоциативная алгебра характеристики 0 является проективным модулем над своим центром. Возникает естественный вопрос, будет ли данный модуль свободным. Построению примера, показывающего, что ответ, вообще говоря, отрицательный, и посвящена заключительная глава настоящей диссертации.

Пусть R — поле действительных чисел. Рассмотрим алгебру полиномов $R[x_0, \dots, x_n]$ от переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$. Через $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 0, \dots, n$, обозначим операторы дифференцирования алгебры $R[x_0, x_1, \dots, x_n]$ по переменным $x_0, x_1, \dots, x_n$. Положим

$$D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Рассмотрим многочлен $S^n(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$. Тогда $D_1, \dots, D_n$ — дифференцирования алгебры $R[x_0, \dots, x_n]$ и $D_i(S^n(x_0, \dots, x_n)) = 0, i = 0, \dots, n$.

Пусть $Sph(n) = R[x_0, \dots, x_n]/\text{idl} \langle x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 \rangle$ — фактор-алгебра алгебры $R[x_0, \dots, x_n]$ по идеалу $\text{idl} \langle x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 \rangle = S^n(x_0, \dots, x_n)R[x_0, \dots, x_n]$, т.е. $Sph(n)$ — координатное кольцо n -мерной сферы. Ясно, что дифференцирования $D_1, \dots, D_n$ индуцируют дифференцирования алгебры $Sph(n)$, которые мы также обозначим через $D_1, \dots, D_n$. отождествим образы элементов $x_0, x_1, \dots, x_n$ при каноническом гомоморфизме $R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow Sph(n)$ с элементами $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Обозначим через $Sph(n)_0$ подалгебру в $Sph(n)$, порожденную элементами $1, x_1^2, \dots, x_n^2, x_i x_j, 0 \leq i, j \leq n$, а через $Sph(n)_1$ — подпространство $Sph(n)_0 x_0 + \dots + Sph(n)_0 x_n$ пространства $Sph(n)$.

Основными результатами четвертой главы являются следующие теоремы:

Теорема 4.1.5. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in R, \alpha\beta\gamma \neq 0$ и $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем R действительных чисел. Тогда в C можно выбрать базис $e_0 = 1, e_1, \dots, e_7$ такой, что подпространство

$$B_n = \left(\bigoplus_{i=0}^3 Sph(n)_0 \otimes e_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=4}^7 Sph(n)_1 \otimes e_i \right)$$

алгебры $Sph(n) \otimes C$ при $n \geq 8$ будет альтернативной алгеброй, дифференциально простой относительно множества дифференцирований $\mathfrak{D} = \{D_1 \otimes id, \dots, D_n \otimes id\}$, не являющейся свободным модулем над своим центром $Z(B_n)$; здесь $id : C \rightarrow C$ — тождественное отображение, а тензорное произведение берется над полем R .

Теорема 4.1.6. В обозначениях теоремы 4.1.5 пусть отображение $\bar{\cdot} : Sph(n) \otimes C \rightarrow Sph(n) \otimes C$ является продолжением стандартной инволюции алгебры Кэли-Диксона $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ на алгебру $Sph(n) \otimes C$ таким, что $\overline{f \otimes c} = \bar{f} \otimes \bar{c}$ для всех $f \in Sph(n)$, $c \in C$. Тогда алгебра

$$\mathcal{H}(B_{n,3}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_1 & b_2 \\ \bar{b}_1 & \alpha_2 & b_3 \\ \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in Sph(n)_0; b_1, b_2, b_3 \in B_n \right\}$$

с умножением $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ будет исключительной йордановой алгеброй, дифференциально простой относительно множества естественных продолжений дифференцирований $\{D_1, \dots, D_n\}$ алгебры B_n , действующих на элементах $\mathcal{H}(B_{n,3})$ покомпонентно. При этом $Z(\mathcal{H}(B_{n,3})) \simeq Sph(n)_0$, и если $n \geq 27$, то $\mathcal{H}(B_{n,3})$ не является свободным $Z(\mathcal{H}(B_{n,3}))$ -модулем.

Результаты четвертой главы получены в соавторстве с В.Н. Желябиным и И.П. Шестаковым; совместная работа [20] сдана в печать в журнал «Алгебра и логика».

Я хотел бы выразить глубокую благодарность И.П. Шестакову за постановку интересной задачи и внимание к работе, А.П. Пожидаеву за внимание к работе и неоценимую помощь при ее оформлении, В.Н. Желябину за внимание к работе и полезные обсуждения. Я благодарю коллектив ИМ СО РАН и сотрудников кафедры алгебры и математической логики НГУ за создание творческой атмосферы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (09-01-00157, 11-01-00938-а), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1.419, 2.1.1.10726), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-344.2008.1, НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (№02.740.11.5191).

Литература

- [1] *Скорняков Л. А.* Альтернативные тела // Укр. матем. ж. 1950. Т. 2, №1. С. 70–85.
- [2] *Kleinfeld E.* Simple alternative rings // Ann. of Math. 1953. V. 2, №58. P. 544–547.
- [3] *Jordan P., von Neumann J., Wigner E.* On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // Ann. of Math. (2). 1934. V. 35, №1. P. 29–64.
- [4] *Зельманов Е. И.* Йордановы алгебры с делением // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, №3. С. 286–310.
- [5] *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах II // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, №1. С. 93–104.
- [6] *Zassenhaus H.* Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik (German) // Abh. Math. Sem. Hansische Univ. 1939. V. 13. P. 1–100.
- [7] *Albert A.A.* On commutative power-associative algebras of degree two // Trans. Am. Math. Soc. 1953. V. 74, №2. P. 323–343.
- [8] *Harper L.R.* On differentially simple algebras // Trans. Am. Math. Soc. 1960. V. 100, №1. P. 63–72.
- [9] *Posner E.C.* Differentially simple rings // Proc. Am. Math. Soc. 1960. V. 11, №3. P. 337–343.
- [10] *Yuan S.* Differentially simple rings of prime characteristic // Duke Math. J. 1964. V. 31, №4. P. 623–630.

- [11] *Block R.E.* Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // *Ann. of Math.* 1969. V. 90, №3. P. 433–459.
- [12] *Raviankar T.S.* On differentiably simple algebras // *Pac. J. Math.* 1970. V. 33, №3. P. 725–735.
- [13] *Cheng S.-J.* Differentiably Simple Lie Superalgebras and Representations of Semisimple Lie Superalgebras // *J. Algebra.* 1995. V. 173, №1. P. 1–43.
- [14] *Шестаков И.П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // *Алгебра и логика.* 1997. Т. 36, №6. С. 675–716.
- [15] *Martinez C., Zelmanov E.I.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // *J. Algebra.* 2001. V. 236, №2. P. 575–629.
- [16] *Пожидаев А.П., Шестаков И.П.* Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ // *Алгебра и логика.* 2010. Т. 49, №1. С. 26–59.
- [17] *Жевлаков К.А., Слывко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

Работы автора по теме диссертации

- [18] *Попов А.А.* Дифференциально простые альтернативные алгебры // *Алгебра и логика.* 2010. Т. 49, №5. С. 670–689.
- [19] *Попов А.А.* Дифференциально простые йордановы алгебры // *Сиб. мат. ж.* 2013. Т. 54, №4. С. 890–901.
- [20] *Желябин В.Н., Попов А.А., Шестаков И.П.* Координатное кольцо n -мерной сферы и некоторые примеры дифференциально простых алгебр // принята к печати в журнале *Алгебра и логика.*
- [21] *Попов А.А.* Дифференциально простые альтернативные алгебры. В кн.: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 39: Материалы Восьмой международной молодежной научной школы-конференции. Казанское математическое общество. 2009. С. 324.

- [22] *Porov A.A.* Differentiably simple Jordan Algebras. В кн.: Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию со дня рождения А.И. Ширшова: тезисы докладов. 2011. С. 40.
- [23] *Porov A.A.* Differentiably simple Jordan Algebras. В кн.: Алгебра и математическая логика: Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова. 2011. С. 228.
- [24] *Желябин В.Н., Попов А.А.* Координатное кольцо n -мерной сферы и примеры дифференциально простых альтернативных алгебр. В кн.: Международная конференция Мальцевские чтения: тезисы докладов. 2012. С. 106.

Попов Александр Александрович

**Дифференциально простые альтернативные и йордановы
алгебры**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 18.09.2013. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №99.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6