

На правах рукописи

Оспичев Сергей Сергеевич

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНЫЕ
СВОЙСТВА ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА
В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН
Гончаров Сергей Савостьянович

Официальные оппоненты:
Бадаев Серикжан Агыбаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, профессор кафедры фундаментальной математики.
Корольков Юрий Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет», директор института математики, экономики и информатики ИГУ.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 16 ноября 2013 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «15» октября 2013 г.
Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А. И. Стукачев

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы диссертации. Теория нумераций была развита для исследования алгоритмических свойств классов абстрактных объектов методами классической вычислимости, кодированием информации о них и их связей через свойства их номеров (имен). Впервые эффективность этого подхода была продемонстрирована в классической работе К. Геделя о неполноте арифметики.

В дальнейшем С.К. Клини [13] построил универсальную частично вычислимую функцию (другими словами, вычислимую нумерацию всех частично вычислимых функций). Результат Клини имеет огромное значение для теории вычислимости.

Понятие нумерации, как математического объекта, было введено А.Н. Колмогоровым [14], а его ученик, В.А. Успенский занимался изучением вычислимых нумераций частично вычислимых функций [22], [21].

Х. Роджерс [18], [37] исследовал вычислимые нумерации семейства всех частично вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. Именно им было введено понятие $Com(\mathcal{S})$ всех вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$. Отношение сводимости $\leq$ между вычислимыми нумерациями определяет предпорядок на классе всех вычислимых нумераций. Факторизация по отношению эквивалентности $\equiv$, определяемому данным предпорядком, позволяет построить частично упорядоченное множество $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \langle Com(\mathcal{S})/\equiv, \leq \rangle$, образующее верхнюю полурешетку вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$. Роджерс рассматривал только те вычислимые нумерации, степени которых соответствовали наибольшему элементу описанной полурешетки. Минимальные элементы $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, а также некоторые другие свойства были позднее представлены Р.Ф. Фридбергом (R. F. Friedberg) [30], А.И. Мальцевым [15] и М.Б. Пур-Эль (M. B. Pour-El) [35].

Результаты классической теории вычислимых нумераций нашли наибольшее применение в рекурсивной математике [28], [29]. Так, метод построения семейств вычислимо перечислимых множеств с конечным числом вычислимых фридберговых нумераций, предложенный Гончаровым в [7], послужил отправной

точкой для исследования алгоритмических размерностей рекурсивных моделей [27], [10], [6].

Теория нумераций нашла применение и в классической рекурсивной теории. Например, используя упомянутую теорему Гончарова [7] о числе вычислимых фридберговских нумераций семейств вычислимо перечислимых множеств, Куммер [33] нашел решение известной задачи о типах рекурсивных изоморфизмов частично вычислимых функций ([18], глава 4). Точнее, он доказал, что для любого $k \in \omega$ существует вычислимая функция, обладающая ровно k типами рекурсивных изоморфизмов.

Далее в работе мы приведем обзор результатов по вычислимым нумерациям в известных иерархиях множеств, таких как иерархия Ершова (разностная иерархия) и арифметическая иерархия. В работе С.С. Гончарова и А. Сорби [9] был предложен новый общий подход к введению понятия вычислимого семейства конструктивных объектов, имеющих описание в языке, допускающем геделевскую нумерацию формул. В рамках подхода Гончарова – Сорби оказалось возможным подойти с единых позиций к понятию вычислимости семейств таких конструктивных объектов, как вычислимо перечислимые множества, конструктивные модели, семейства вычислимых морфизмов и т. д. Этот подход также позволяет ввести понятие вычислимого семейства множеств для иерархий Ершова и Клини – Мостовского (арифметической), а также понятие полурешетки Роджерса для подобных семейств. Согласно подходу Гончарова – Сорби, вычислимость нумерации α семейства множеств из данного класса $\mathcal{K}$ эквивалентна определимости ее универсального множества $\{\langle x, n \rangle \mid x \in \alpha(n)\}$ в терминах класса $\mathcal{K}$.

В случае семейств вычислимо перечислимых множеств ($\mathcal{K} = \Sigma_1^0$) такой подход полностью совпадает с классическим определением вычислимой нумерации (см., например, [12]) и универсальное множество $\{\langle x, n \rangle \mid x \in \alpha(n)\}$ представляет собой равномерно эффективную процедуру, определяющую, попадает ли элемент x во множество $\alpha(n)$.

В случае $\mathcal{K} = \Sigma_{n+1}^0$, вычислимость α означает, что универсальное множество для α является $0^{(n)}$ -перечислимым по сильной теореме о иерархии Клини и Поста [18]. А значит,

многие результаты классической теории нумерации могут быть релятивизованы для арифметической иерархии.

В случае $\mathcal{K} = \Sigma_n^{-1}$, любой элемент x может быть помещен в $\alpha(n)$ на некотором шаге равномерно эффективной процедуры, но, в отличие от классического случая, x может быть в дальнейшем удален из $\alpha(n)$. Число перечислений x «в» и «из» $\alpha(n)$ ограничено n .

Согласно концепции Ю.Л. Ершова, полурешетки Роджерса определяют алгоритмическую сложность семейств множеств в целом и во многих вопросах могут быть более полезными, чем различные понятия сложности отдельно взятых элементов этих семейств. Можно выделить три основных направления исследования полурешеток Роджерса. Первое направление связано с глобальными характеристиками полурешеток Роджерса: мощность, решетки и т. п. Второе — посвящено характеристике нумераций, порождающих в полурешетках Роджерса элементы с особыми алгебраическими свойствами: наибольшие, минимальные, неразложимые элементы и т. п. Третье — направлено на изучение локальных алгебраических свойств полурешеток Роджерса: строение сегментов, идеалов и т. п. Рассмотрим эти направления подробнее и обратимся к истории изучения строения нумераций, порождающих экстремальные элементы в полурешетках Роджерса. Началом изучения минимальных нумераций послужила известная теорема Фридберга [30] о существовании однозначной нумерации семейства всех вычислимо перечислимых множеств. Пур-Эль и Путнам в [36] построили пример семейства вычислимо перечислимых множеств без вычислимых однозначных (фридберговых) нумераций:

$$\{\{2x, 2x + 1\} | x \in K\} \cup \{\{2x\}, \{2x + 1\} | x \notin K\}, \text{ где}$$

K — креативное множество. Отметим, что во второй главе, в качестве следствия одного из основных результатов, будет показано, что описанное семейство обладает Σ_3^{-1} -вычислимой фридберговой нумерацией.

Фридберговы и позитивные нумерации представляют собой важный случай минимальных нумераций. Основные задачи исследования минимальных нумераций можно условно разделить на два направления:

1. Поиск условий, при которых семейство $\mathcal{A} \in \Sigma_n^i$ обладает Σ_n^i -вычислимыми нумерациями.
2. Определение количества минимальных элементов полурешетки Роджерса заданного семейства множеств.

В классическом случае, некоторые необходимые условия существования фридберговой нумерации для семейств вычислимо перечислимых множеств были найдены Лахланом [34]. Затем множество необходимых условий были предложены в работах Ершова [11], Куммера [32], [31], Мальцева [15] и других. Для семейств множеств арифметической иерархии можно выделить следующие результаты:

Теорема 1. (Бадаев, Гончаров [3]) Для любого n , если $\mathcal{A}$ – бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство, то полурешетка Роджерса $\mathcal{R}_{n+2}^0(\mathcal{A})$ содержит бесконечно много минимальных элементов.

Этот результат сохраняется и в гиперарифметической иерархии (Н. Бакланова, [5]).

Теорема 2. (Бадаев, Гончаров [3]). Семейство $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_{n+1}^0$ обладает Σ_{n+2}^0 -вычислимой позитивной нумерацией тогда и только тогда, когда существует Σ_{n+2}^0 -вычислимая нумерация α семейства $\mathcal{A}$, такая что множество $\{\langle x, y \rangle \mid \alpha(x) = \alpha(y)\} \in \Delta_2^0$.

Теорема 3. (Гончаров, Сорби [9]). Если бесконечное семейство $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_{n+2}^0$ обладает Σ_{n+2}^0 -вычислимой позитивной нумерацией, тогда существует Σ_{n+2}^0 -вычислимая фридбергова нумерация семейства $\mathcal{A}$.

В иерархии Ершова отметим результаты, полученные в [8]:

Теорема 4. (С. С. Гончаров, С. Лемпп, Д. Р. Соломон). Для любого $n > 1$ существует Σ_n^{-1} -вычислимая фридбергова нумерация семейства всех Σ_n^{-1} -множеств.

Теорема 5. (С. С. Гончаров, С. Лемпп, Д. Р. Соломон). Существует бесконечное Σ_2^{-1} -вычислимое семейство без Σ_2^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации.

Далее в работе эти результаты будут расширены на случай Σ_a^{-1} , для любого $a \in \mathcal{O}$ – обозначения конструктивного ординала.

Таласбаевой в [20] показано, что для любого конечного уровня n иерархии Ершова каждое бесконечное вычислимое семейство, содержащее $\emptyset$ при n четном или ω при n нечетном, имеет бесконечно много вычислимых позитивных неразрешимых нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций (при $n = 1$ это было впервые доказано Бадаевым [2]). В дальнейшем, этот результат был обобщен Андреа Сорби и Манатом Мустафой [16] для всех уровней Σ_a^{-1} иерархии Ершова, где a является обозначением любого ненулевого вычислимого ординала.

Теорема 6. (Бадаев, Таласбаева, Сорби, Манат). Пусть $\mathcal{S}$ – Σ_a^{-1} -вычислимое бесконечное семейство и $\emptyset \in \mathcal{S}$, если $e(a) = 0$ ($\omega \in \mathcal{S}$, если $e(a) = 1$). Тогда $\mathcal{S}$ имеет бесконечно много Σ_a^{-1} -вычислимых позитивных неразрешимых нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций.

Используя этот результат, Манат и Сорби показали в [16], что для любого $a \in \mathcal{O}$ существует бесконечное Σ_a^{-1} -вычислимое семейство без Σ_a^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации, но существует бесконечно много позитивных Σ_a^{-1} -вычислимых нумераций этого семейства.

Перейдем к изучению локальных алгебраических свойств полурешеток Роджерса, точнее, к вопросам существования идеалов, содержащих и не содержащих минимальные элементы. Каждый идеал полурешетки Роджерса $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ содержит минимальный элемент, если $\mathcal{A}$ – семейство вычислимых функций или $\mathcal{A}$ – конечное семейство [12]. Если $\mathcal{C}$ – семейство всех вычислимо перечислимых множеств, тогда $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ содержит, как идеал с минимальными элементами, так и идеал без них [11], [23]. Также, существует семейство $\mathcal{A}$, такое что $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ не содержит минимальных элементов [1]. Для арифметических нумераций подобные исследования были начаты в [9] и [3].

Теорема 7. (Бадаев, Гончаров). Если $\mathcal{A}$ – бесконечное Σ_{n+2}^0 -вычислимое семейство, тогда для любой не $0'$ -универсальной Σ_{n+2}^0 -вычислимой нумерации α существует бесконечно много минимальных накрытий α .

Этот результат имеет место и для гиперарифметической иерархии (Н. Бакланова, [4]). Также в [3] было показано, что для $n \geq 2$ существуют бесконечные семейства, полурешетки Роджерса которых содержат идеалы без минимальных элементов. Позднее С.Ю. Подзоровым, в [17], было доказано, что вне зависимости от выбора семейства класс полурешеток, являющихся главными идеалами полурешетки Роджерса этого семейства, достаточно широк: он включает в себя как фактор-решетку решетки вычислимо перечислимых множеств по модулю конечных множеств, так и семейство начальных сегментов полурешетки m -степеней, порожденных иммунными множествами.

Для иерархии Ершова Бадаевым и Таласбаевой в [26] были представлены некоторые необходимые условия для семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_2^{-1}$, при которых полурешетка Роджерса $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{A})$ содержит главный идеал, изоморфный полурешетке вычислимо перечислимых m -степеней. Далее в работе будет показано, что для любого бесконечного Σ_a^{-1} -вычислимого семейства $\mathcal{S}$, полурешетка Роджерса $\mathcal{R}_c^{-1}(\mathcal{A})$ содержит бесконечно много непересекающихся главных идеалов полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_c^{-1}(\mathcal{S})$, изоморфных верхней полурешетке L_m^0 , здесь $c = a + \mathcal{O} a$, если $e(a) = 0$ и $c = 2^{a+\mathcal{O} a}$, если $e(a) = 1$.

На сегодняшний день вопрос о мощности и типе алгебраической структуры полурешеток Роджерса семейств множеств иерархии Ершова привлекает внимание исследователей. Это связано с тем, что алгебраические свойства полурешеток Роджерса семейств множеств иерархии Ершова сильно отличается от подобных свойств полурешеток Роджерса семейств вычислимо перечислимых множеств и семейств множеств арифметической иерархии. Рассмотрим один из важнейших в классической теории вычислимости результатов.

Теорема 8. (А. Б. Хуторецкий [24]). Пусть $\mathcal{S}$ – семейство вычислимо перечислимых множеств.

1. Если $\mu \not\leq \nu$ – вычислимые нумерации семейства $\mathcal{S}$, тогда существует вычислимая нумерация π семейства $\mathcal{S}$, такая что $\pi \not\leq \nu$ и $\mu \not\leq \pi \oplus \nu$
2. Если полурешетка Роджерса $\mathcal{R}_1^0(\mathcal{S})$ семейства $\mathcal{S}$ содержит больше одного элемента, тогда она бесконечна.

Эта теорема верна и в арифметической иерархии. Ее утверждение следует из доказательства теоремы С. С. Гончарова и А. Сорби [9] о том, что полурешетка Роджерса неоднородного Σ_{n+2}^0 -вычислимого семейства арифметических множеств бесконечна и не является решеткой. Однако, в [25] было доказано:

Теорема 9. (С. А. Бадаев, С. Лемпи). Существует семейство $\mathcal{F}$ Σ_2^{-1} -множеств и существуют такие Σ_2^{-1} -вычислимые нумерации семейства $\mathcal{F}$, что $\mu \not\leq \nu$ и для любой Σ_2^{-1} -вычислимой нумерации π семейства $\mathcal{F}$ либо $\mu \leq \pi$, либо $\pi \leq \nu$.

Другими словами, С. А. Бадаев и С. Лемпи показали, что первая часть теоремы Хуторецкого не выполняется для второго уровня иерархии Ершова. Открытым остается вопрос о том, выполняется ли вторая часть теоремы Хуторецкого.

В [8] была доказана следующая

Теорема 10. (С. С. Гончаров, С. Лемп, Д. Р. Соломон). Существует бесконечное семейство вычислимо перечислимых множеств с единственной вычислимой нумерацией, рассматриваемой как Σ_2^{-1} -вычислимая нумерация Σ_2^{-1} -множеств.

Далее в работе будет представлено обобщение этого результата на все конструктивные ординалы. Отметим, что недавно была анонсирована

Теорема 11. (Бадаев, Манат, Сорби). Для любого ненулевого $n \in \omega \cup \{\omega\}$ и любого обозначения ненулевого ординала $a \in \mathcal{O}$ существует Σ_a^{-1} -вычислимое семейство $\mathcal{A}$, содержащее ровно n множеств и $|\mathcal{R}(\mathcal{A})|_a^{-1} = 1$

Цель исследования.

Целью настоящей работы является исследование свойств вычислимых нумераций семейств иерархии Ершова, а также изучение мощности полурешеток Роджерса этих семейств.

Новизна и научная значимость.

Все результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейшем изучении вычислимых нумераций в иерархии Ершова, при чтении спецкурсов по теории нумераций, написании учебных пособий и монографий.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли апробацию на следующих международных конференциях: МНСК «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2008, 2009, 2010 гг.), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2010, 2011, 2012 гг.), «Logic Colloquium» (София, Болгария, 2009 г.; Париж, Франция, 2010 г.; Барселона, Испания, 2011 г.), «Лобачевские Чтения» (Казань, 2010 г.). Автор неоднократно докладывал результаты диссертации на семинарах Новосибирского Государственного Университета «Теория вычислимости» (2009–2012 гг.), «Алгебра и логика» (2012 г.).

Основные результаты диссертации.

1. Построен пример Σ_a^{-1} -вычислимого бесконечного семейства с одноэлементной полурешеткой Роджерса (опубликовано в [38]).

2. Установлены алгоритмические свойства Σ_a^{-1} -вычислимых фридберговых нумераций семейств Σ_a^{-1} -множеств (опубликовано в [39]).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [38]–[51], из них [38] и [39] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, определений, двух глав и списка литературы (83 наименования). Объём диссертации 72 страницы.

Содержание диссертации

В введении описана актуальность проблемы, рассмотрены известные результаты по тематике вычислимых нумераций.

Затем приводятся определения. Приведем здесь некоторые из них.

Определение 1[19]. Для всех $a \in O$, множество A является Σ_a^{-1} -множеством, если существуют вычислимая функция $f(x, s)$ и частично вычислимая функция $g(x, s)$, такие что для всех $x \in \omega$ выполняются следующие условия:

1. $A(x) = \lim_s f(x, s)$, $f(x, 0) = 0$.
2. $g(x, s) \downarrow \rightarrow g(x, s+1) \downarrow \leq_o g(x, s) <_o a$.
3. $f(x, s) \neq f(x, s+1) \rightarrow g(x, s+1) \downarrow \neq g(x, s)$.

Пару $\langle f, g \rangle$ будем называть Σ_a^{-1} -аппроксимацией множества A .

Здесь и далее, мы будем использовать клиниевскую систему обозначения для ординалов – $(O, <_o)$ с небольшими изменениями: обозначением нулевого ординала будет 0, единичного ординала – 1. Для каждого $a \in O$, $|a|_o$ – ординал α , который имеет O -обозначение a . Мы также определяем функцию четности $e(x)$: для каждого $a \in O$, $e(a) = 0$, если $|a|_o$ четное и $e(a) = 1$, если $|a|_o$ нечетно.

Определение 2. Множество A является Π_a^{-1} -множеством, если в условиях предыдущего определения изменить « $f(x, 0) = 0$ » на « $f(x, 0) = 1$ ». И множество A является Δ_a^{-1} -множеством, если заменить условие « $f(x, 0) = 0$ » на « $g(x, 0)$ определена».

В [9] было введено понятие обобщенно вычислимой нумерации, что позволяет нам говорить о Σ_a^{-1} -вычислимых нумерациях.

Определение 3. Нумерацию η будем называть Σ_a^{-1} -вычислимой, если множество $\{ \langle x, y \rangle \mid y \in \eta x \}$ является Σ_a^{-1} -множеством.

Π_a^{-1} - и Δ_a^{-1} -вычислимые нумерации определяются аналогично.

Определение 4[12]. Нумерацию μ будем называть минимальной, если для любой нумерации ν_n из того, что ν сводится к μ следует, что ν эквивалентно μ .

Определение 5[12]. Нумерацию ν назовем *позитивной*, если множество $\{\langle n, m \rangle | \nu_n = \nu_m\}$ является *вычислимо перечислимым* (и разрешимой, если указанное множество *вычислимо*).

Определение 6[12]. Нумерацию η будем называть *фридберговой*, если для любых $n \neq m$ $\eta_n \neq \eta_m$.

Отметим, что всякая фридбергова нумерация является разрешимой, а значит, и позитивной, а каждая позитивная является минимальной.

Определение 7[12]. Σ_a^{-1} -вычислимую нумерацию ν семейства S назовем *главной*, если любая Σ_a^{-1} -вычислимая нумерация μ семейства S сводится к ν .

В первой главе работы исследуются общие свойства вычислимых нумераций и мощность полурешеток Роджерса. В первом параграфе главы показано существование эффективного списка всех Σ_a^{-1} -вычислимых нумераций, и, как следствие, показано существование Σ_a^{-1} -вычислимой главной нумерации семейства всех Σ_a^{-1} -множеств, $a \neq 0$. Затем показано, что не существует Δ_a^{-1} -вычислимой нумерации семейства всех Δ_a^{-1} -множеств, однако существует Σ_a^{-1} -вычислимая нумерация этого семейства, $a \neq 0$.

Во втором параграфе главы исследуются двухэлементные семейства Σ_a^{-1} -множеств. Показано, что любое такое семейство обладает бесконечным числом попарно несравнимых (относительно сводимости нумераций) Σ_c^{-1} -вычислимых нумераций, где $c = a +_O a$, если $e(a) = 0$ и $c = 2^{a+Oa}$, если $e(a) = 1$. Для примера, любое двухэлементное семейство вычислимо перечислимых множеств обладает бесконечным числом попарно несравнимых нумераций уже начиная с третьего уровня иерархии Ершова. В дальнейшем результаты данного параграфа будут использованы при доказательстве одного из основных результатов работы.

Третий параграф главы посвящен обобщению результата Гончарова, Лемппа, Соломона [8] о существовании семейства Σ_2^{-1} -множеств с единственной Σ_2^{-1} -вычислимой нумерацией, а именно доказывается:

Теорема 1.10. Пусть $a \in \mathcal{O}, a \neq 0$. Существует бесконечное семейство Σ_a^{-1} -множеств с единственной с точностью до эквивалентности вычислимой нумерацией.

Четвертый параграф посвящен построению примера семейства Σ_a^{-1} -множеств без главных нумераций. Основным результатом параграфа является

Теорема 1.14. Пусть $\mathcal{S}$ — семейство Δ_2^0 -множеств, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ — Σ_a^{-1} -направленное подсемейство, и пусть множество $\bigcup \mathcal{G}$, если $e(a) = 1$ или множество $\bigcap \mathcal{G}$, если $e(a) = 0$ не принадлежит $\mathcal{S}$, $a \neq 0$. Тогда для любой Δ_2^0 -вычислимой нумерации α семейства $\mathcal{S}$ существует Σ_a^{-1} -вычислимая нумерация β семейства $\mathcal{G}$ такая, что $\beta \not\leq \alpha$.

Учитывая, что класс Δ_2^0 является объединением всех Σ_a^{-1} для всех $a \in \mathcal{O}$, заметим, что семейство из Теоремы 2.1 не будет обладать главной нумерацией ни на одном уровне Σ_b^{-1} . Рассмотрим в качестве примера семейство начальных сегментов натурального ряда, точнее $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \dots\}$. У семейства $\mathcal{T}$ нет Σ_a^{-1} -вычислимой главной нумерации для любого $a \in \mathcal{O}$, однако для семейства $\mathcal{T} \cup \{\omega\}$ такая нумерация есть.

В главе 2 работы исследуются свойства минимальных нумераций в иерархии Ершова. В первом параграфе, используя конструкцию Гончарова, Лемпна, Соломона построения Σ_n^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации семейства всех Σ_n^{-1} -множеств, получена:

Теорема 2.4. Для любого $k > 0$ существует $2k$ -вычислимая фридбергова нумерация семейства всех k -вычислимо перечислимых множеств. А также существует вычислимая функция, которая m -сводит фридбергову нумерацию семейства всех $k - 1$ -вычислимо перечислимых множеств к фридберговой нумерации семейства всех k -вычислимо перечислимых множеств. Причем эта фридбергова нумерация и сводящая функция строятся равномерно по k .

Здесь « k -вычислимая» означает « Σ_k^{-1} -вычислимая». Затем полученный результат используется для доказательства одного из основных результатов работы:

Теорема 2.8. *Существует минимальная ω -вычислимая нумерация семейства всех множеств из $\bigcup_{k \in \omega} \Sigma_k^{-1}$.*

Во втором параграфе, как и в первом, используется результат Гончарова, Лемппа, Соломона о Σ_n^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации семейства всех Σ_n^{-1} -множеств. Этот результат обобщается на все конструктивные ординалы, т. е. показано существование Σ_a^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации семейства всех Σ_a^{-1} -множеств. Затем, используя результаты параграфа 1.1, доказывается существование Σ_a^{-1} -вычислимой нумерации семейства всех Δ_a^{-1} -множеств.

Таласбаевой в [20] показано, что для любого конечного уровня n иерархии Ершова каждое бесконечное вычислимое семейство, содержащее $\emptyset$ при n четном или ω при n нечетном, имеет бесконечно много вычислимых позитивных неразрешимых нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций (при $n = 1$ это было впервые доказано Бадаевым [2]). В дальнейшем, этот результат был обобщен Андреа Сорби и Манатом Мустафой [16] для всех уровней Σ_a^{-1} иерархии Ершова, где a является обозначением любого ненулевого вычислимого ординала. Объединяя этот результат с уже полученными результатами параграфа, получаем:

Теорема 2.16. *Семейство всех Σ_a^{-1} -множеств обладает бесконечным числом попарно несравнимых Σ_a^{-1} -вычислимых фридберговых нумераций, $a \neq 0$.*

Обратимся вновь к результату Бадаева, Маната, Сорби и Таласбаевой. Объединяя его с результатами параграфа 1.2, получаем один из основных результатов работы:

Теорема 2.18. *Для любого Σ_a^{-1} -вычислимого семейства $\mathcal{S}$, такого что $|\mathcal{S}| > 1$ существует бесконечно много Σ_c^{-1} -вычислимых непозитивных нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций, где $c = a + \mathcal{O}a$, если $e(a) = 0$ и $c = 2^{a + \mathcal{O}a}$, если $e(a) = 1$.*

М. Куммер показал, что если Σ_1^{-1} -вычислимое семейство $\mathcal{S}$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся подсемейств $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, где $\mathcal{S}_1$ обладает Σ_1^{-1} -вычислимой

фридберговой нумерацией, а любое конечное подмножество элемента из $\mathcal{S}_2$ имеет бесконечно много расширений в $\mathcal{S}_1$, то $\mathcal{S}$ обладает Σ_1^{-1} -вычислимой нумерацией. Из результата Куммера мы будем использовать только разбиение семейства на два подсемейства, одно из которых обладает фридберговой нумерацией. Внесем некоторые изменения в конструкцию для фридберговой нумерации и получим.

Предложение 2.21. Пусть S_1, S_2 – бесконечные семейства множеств, такие что:

1. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
2. S_1 обладает Σ_a^{-1} -вычислимой нумерацией.
3. S_2 обладает Σ_b^{-1} -вычислимой фридберговой нумерацией, если $e(a) = 0$ и Π_b^{-1} -вычислимой фридберговой нумерацией, если $e(a) = 1$.

Тогда $S = S_1 \cup S_2$ обладает $\Sigma_{b+o_a}^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией.

В третьем параграфе рассматривается обобщение результат Гончарова, Лемппа, Соломона о Σ_2^{-1} -вычислимом бесконечном семействе без Σ_2^{-1} -вычислимых фридберговой нумерации на все конструктивные ординалы.

Теорема 2.22. Существует бесконечное Σ_a^{-1} -вычислимое семейство Σ_a^{-1} -множеств без Σ_a^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации, $a \neq 0$.

Некоторые модификации приведенной в доказательстве конструкции позволяют получить семейство Σ_a^{-1} -множеств с более сложной структурой, а именно справедливо следующее.

Следствие 2.23. Пусть $a \in \mathcal{O}$ – обозначение непердельного ординала, тогда существует бесконечное Σ_a^{-1} -вычислимое семейство Σ_a^{-1} -множеств без Σ_a^{-1} -вычислимой фридберговой нумерации, но обладающее Σ_b^{-1} -вычислимой фридберговой нумерацией, где b – обозначение последователя $|a|_{\mathcal{O}}$, $a \neq 0$.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю члену-корреспонденту РАН Сергею Савостьяновичу Гончарову за постановку задач, поддержку в работе и интерес к исследованиям автора.

Список литературы

- [1] Бадаев С. А., Минимальные нумерации, в сб. «Математическая логика и теория алгоритмов» (Труды ин-та матем. СО РАН, 25), 1993, с. 3–34.
- [2] Бадаев С. А., О позитивных нумерациях. Сибирский математический журнал. 1977, т. 18, № 3, с. 483–496.
- [3] Бадаев С. А., Гончаров С. С., О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств. Алгебра и логика, 2001, т. 40, № 5, с. 507–522.
- [4] Бакланова Н. А., Минимальные элементы и минимальные накрытия в полурешетке Роджерса вычислимых нумераций в гиперарифметической иерархии, Вестник НГУ. Серия: математика, механика и информатика, 2011, т. 11, № 3, с. 77–84.
- [5] Бакланова Н. А., Неразрешимость элементарных теорий полурешеток Роджерса на предельных уровнях арифметической иерархии, Вестник НГУ. Серия: математика, механика и информатика, 2011, т. 11, № 4, с. 3–7.
- [6] Венцов Ю. Г., Семейство рекурсивно перечислимых с конечными классами неэквивалентных однозначных нумераций. Вычисл. Системы, 1987, т. 120, с. 105–142
- [7] Гончаров С. С., Однозначные вычислимые нумерации. Алгебра и Логика. 1980, т. 19, № 1, с. 23–44.
- [8] Гончаров С. С., Лемпи С., Соломон Д. Р., Фридберговские нумерации семейств n -вычислимо перечислимых множеств. Алгебра и логика, 2002, т. 41, № 2, с. 143–154

- [9] Гончаров С. С., Сорби А., Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса. Алгебра и логика, 1997, т. 36, № 6, с. 621–641.
- [10] Гончаров С. С., Хусаинов Б., О спектре степеней вычислимых отношений, Доклады РАН. 1997, т. 37, № 1, с. 21–34.
- [11] Ершов Ю. Л., О вычислимых нумерациях. Алгебра и Логика. 1968, т. 7, № 5, с. 71–99.
- [12] Ершов Ю. Л., Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [13] Клини С. К., Математическая логика. М.: Мир, 1973.
- [14] Колмогоров А. Н., Успенский В. А., К определению алгоритма. Успехи математических наук, 1958, т. 13, № 4(82), с. 3–28.
- [15] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
- [16] Манат М., Сорби А., Позитивные неразрешимые нумерации в иерархии Ершова, Алгебра и логика, 2011, т. 50, № 6, с. 759–780.
- [17] Подзоров С. Ю., Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ_n^0 -вычислимых нумераций. Алгебра и логика, 2003, т. 42, № 2, с. 211–226.
- [18] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [19] Селиванов В. Л., Об иерархии предельных вычислений. Сиб. Мат. Журнал. 1984, т. 25, № 5, с. 146–156.
- [20] Таласбаева Ж. Т., О позитивных нумерациях семейств множеств иерархии Ершова, Алгебра и логика, 2003, т. 42, № 6, с. 737–746.
- [21] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях. Москва, Физматиз, 1960, 492 с.

- [22] Успенский В. А., Системы перечисления множеств и их нумерации. Доклады АН СССР, 1955, т. 105, № 6, с. 1155–1158.
- [23] Хуторецкий А. Б., Две теоремы для существования для вычислимых нумераций. Алгебра и Логика. 1969, т. 8, № 4, с. 483–492.
- [24] Хуторецкий А. Б., О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций. Алгебра и Логика. 1971, т. 10, № 5, с. 561–569.
- [25] Badaev S. A., Lempp S., A Decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets. J. Symb. Logic, 2009, Vol. 74, No. 2, p. 618–640.
- [26] Badaev S., Talasbaeva Zh., Computability in the Ershov hierarchy. Abstracts of paper of the 9th Asian logic Conference. Novosibirsk, 16–19.08.2005, p. 60–61.
- [27] Cholak P., Goncharov S. S., Khoussainov B., Shore R. A., Computably categorical structures and extensions by constants. J. Symb. Logic, 1999, Vol. 64, No. 1, p. 13–37.
- [28] Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.), Handbook of Recursive Mathematics. Volume 1. Recursive model theory. Amsterdam, Elsevier, 1998
- [29] Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.), Handbook of Recursive Mathematics. Volume 2. Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics. Amsterdam, Elsevier, 1998
- [30] Friedberg Richard M., Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication. J. Symb. Logic, 1958, Vol. 23., p. 309–316.
- [31] Kummer M. An easy priority-free proof of a theorem of Friedberg. Theoretical Computer Science, 1990, Vol. 74, No. 2, p. 249–251.
- [32] Kummer M., Recursive enumeration without repetition revisited. Lecture Notes in Mathematics, 1990, Vol. 1432, p. 255–275.

- [33] Kummer M., Some applications of computable one-one numberings. Arch. Math. Logic, 1990, Vol. 30, No. 4, p. 219–230.
- [34] Lachlan A.H., On recursive enumeration without repetition. Z. Math. Logik Grundle. Math., 1965, Vol. 11, No. 3, p. 209–220.
- [35] Pour-El M.B., Godel numberings versus Friedberg numberings. Proc. Am. Math. Soc., 1964, Vol. 15, No. 2, p. 252–255.
- [36] Pour-El M.B., Putnam H.. Recursively enumerable classes and their applications to sequences of formal theories. Arch. Math. Logik und Grundlagenforschung, 1965, Vol. 8, p. 104–121.
- [37] Rogers H., Godel numberings of partial computable functions. J. Symb. Logic, 1958, Vol. 23, No. 3, p. 49–57.

Работы автора по теме диссертации

- [38] С. С. Оспичев, Бесконечное семейство Σ_a^{-1} -множеств с единственной вычислимой нумерацией, Вестник НГУ. Серия: математика, механика и информатика, 2011, т. 11, № 2, с. 89–92.
- [39] С. С. Оспичев, Некоторые свойства нумераций различных классов иерархии Ершова. Вестник НГУ. Серия: математика, механика и информатика. 2010, т. 10, № 4, с. 125–132.
- [40] S. Ospichev, Infinite family of Σ_a^{-1} -sets with a unique computable numbering, Journal of Mathematical Sciences, 2013, Vol. 188, Issue 4, p. 449–451.
- [41] S. Ospichev, Properties of numberings in various levels of the Ershov hierarchy, Journal of Mathematical Sciences, 2013, Vol. 188, Issue 4, p. 441–448.
- [42] S. Ospichev, Computable family of Σ_a^{-1} -sets without Friedberg numberings. In *6th Conference on Computability in Europe, CiE 2010*, 6th Conference on Computability in Europe, CiE 2010, Ponta Delgada, Azores, 2010, p. 311–315.

- [43] S. Ospichev, Families with Infinite Rogers Semilattices in Ershov Hierarchy, CiE-2011, Abstract and Handout Booklet, Sofia, Bulgaria, June 27–July 2, 2011, p. 174–179,
- [44] С. С. Оспичев, Вычислимые нумерации в иерархии Ершова, Материалы XLVIII международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Математика, Новосибирск 10–14 апреля 2010 г., с. 28.
- [45] С. С. Оспичев, Некоторые свойства нумераций различных классов иерархии Ершова, Материалы XLVII международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», Математика, Новосибирск 10–15 апреля 2009 г., с. 90.
- [46] С. С. Оспичев, Некоторые свойства нумераций различных классов иерархии Ершова, Материалы научной конференции Мальцевские чтения – 2009, 24–28 августа, 2009, Новосибирск.
- [47] С. С. Оспичев, Фридберговские нумерации в иерархии Ершова, Материалы научной конференции Мальцевские чтения – 2010, 2–6 мая, 2010, Новосибирск.
- [48] S. Ospichev, Some Properties of Computable Numberings in Various Classes in Difference Hierarchy, Abstracts, Logic Colloquium 2009, July 31–August 5, Sofia, Bulgaria, 2009, p. 74–75.
- [49] S. Ospichev, Friedberg Numberings in Ershov’s Hierarchy, Abstracts, Logic Colloquium 2010, July 25–31, Paris, France, 2010, p. 41.
- [50] S. Ospichev, About one construction of Goncharov, Lempp, Solomon, Abstracts, Logic Colloquium 2011, July 11–16, Barcelona, Spain, 2011, p. 22.
- [51] С. С. Оспичев, Вычислимые нумерации в иерархии Ершова, Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, Казанское математическое общество, 2010, т. 40, с. 255–256.

Оспичев Сергей Сергеевич

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНЫЕ
СВОЙСТВА ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА В
ИЕРАРХИИ ЕРШОВА**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.09.2013
Заказ №

Формат 60 x 84 1/16
Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул.Пирогова 2