На правах рукописи

Миронов Андрей Евгеньевич

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2010

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
Тайманов Искандер Асанович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Медных Александр Дмитриевич,

доктор физико-математических наук, с.н.с.
Мохов Олег Иванович,

доктор физико-математических наук, профессор
Царёв Сергей Петрович

Ведущая организация:

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Защита состоится 2 сентября 2010 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан ______________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Гутман А. Е.

Общая характеристика работы

Цель работы. Диссертация посвящена изучению коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2, их разностных аналогов, коммутативных колец дифференциальных операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами, связанных с многомерными алгебраическими многообразиями, а также некоторым приложениям теории интегрируемых систем в дифференциальной геометрии и математической физике.

Постановка задач и актуальность темы диссертации. Уравнения коммутации двух обыкновенных дифференциальных операторов

$$L_1 = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad L_2 = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \qquad (1)$$

представляют собой сложную систему нелинейных уравнений на их коэффициенты. Одни из первых результатов по этим уравнениям были получены в 1920–30-е годы Берчналлом и Чаунди [1]–[3]. В частности, Берчналл и Чаунди доказали следующее утверждение.

- *Если $L_1L_2 = L_2L_1$, то существует ненулевой полином Q от двух коммутирующих переменных такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$.*

Например, несложно убедиться, что операторы

$$L_1 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}, \quad L_2 = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{x^2}\frac{d}{dx} + \frac{3}{x^3}$$

коммутируют между собой, при этом они связаны полиномиальным соотношением $L_1^3 = L_2^2$.

Новый интерес к коммутирующим дифференциальным операторам появился в 1960–70-е годы в связи с тем, что было замечено, что некоторые нелинейные уравнения типа уравнения Кортевега–де Фриза эквивалентны условию коммутации специально подобранных операторов. Например, операторы

$$L = \partial_x^2 - u, \quad A = \partial_t - \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x,$$

коммутируют в том и только в том случае, когда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

Наличие L, A-пары позволяет строить точные решения этих уравнений.

В основе построения операторов L_1 и L_2 лежит спектральная кривая Γ — пополнение кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $Q(z,w)=0$. Мы будем рассматривать только случай общего положения, когда кривая Γ гладкая. Для каждой точки $P \in \Gamma$ найдется совместная собственная функция $\psi(x,P)$ (функция Бейкера–Ахиезера) операторов L_1 и L_2. Эта функция имеет существенную особенность в некоторой выделенной точке $q \in \Gamma$, а на $\Gamma \backslash \{q\}$ она мероморфна. При этом

$$L_i \psi = \lambda_i(P)\psi, \tag{2}$$

где $\lambda_i(P)$ — некоторая мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в точке q. Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $P \in \Gamma$ называется *рангом* пары L_1, L_2. Порядки операторов L_1 и L_2 делятся на l: $n = n'l, m = m'l$. Порядки полюсов функций λ_1 и λ_2 в точке q равны соответственно n' и m'. В случае ранга 1 ψ можно выразить через тэта-функцию кривой Γ и коэффициенты операторов восстанавливаются по ψ (см. [4]). В случае ранга $l > 1$, как показал Кричевер [5], нахождение ψ сводится к решению интегрального уравнения, точное решение которого получить не удается. На самом деле для нахождения операторов ранга $l > 1$ не обязательно знать ψ. Кричевер и Новиков [6] предложили следующий метод (называемый методом деформации параметров Тюрина) нахождения таких операторов.

Пусть $\psi_0(x,P), \ldots, \psi_{l-1}(x,P)$, $P \in \Gamma$ совместные собственные функции, нормированные следующим образом

$$\frac{d^i}{dx^i}\psi_j(x_0,P) = \delta_{ij}, \tag{3}$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка. Обозначим через Ψ матрицу Вронского

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \ldots & \psi_{l-1} \\ \psi_0' & \ldots & \psi_{l-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_0^{(l-1)} & \ldots & \psi_{l-1}^{(l-1)} \end{pmatrix}.$$

Компоненты $\chi_i(x,P)$ матрицы

$$\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_{l-1} \end{pmatrix}$$

не зависят от выбора точки x_0. По функциям χ_i из разложения

$$\frac{d^l}{dx^l}\psi_j = \chi_{l-1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\psi_j + \cdots + \chi_0\psi_j \tag{4}$$

и нормировки (3) можно находить производные ψ_j любого порядка в точке x_0. Далее, из (2) можно найти значения коэффициентов операторов L_i в точке x_0. Поскольку функции χ_j не зависят от x_0, получаем значения коэффициентов операторов в любой точке. Таким образом нахождение операторов сводится к нахождению функций χ_j. Новиков и Кричевер [6] нашли χ_j в случае кривой рода 1 и ранга 2. Мохов [7] нашел χ_j в случае $g = 1$ и $l = 3$. Как указали Новиков и Гриневич спектральная теория периодических операторов ранга $l > 1$, связанных с кривой Γ, сводится к спектральной теории операторов ранга 1 после перехода к l-листному накрытию кривой Γ [8], [9].

Необходимо отметить, что к задаче отыскания пар коммутирующих операторов существует и чисто алгебраический подход. Диксмье [10] нашел коммутирующие операторы рода 1 ранга 2 с полиномиальными коэффициентами

$$L_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^2 - 2x,$$

$$L_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)x\right),$$

где α — некоторая константа.

Гриневич [11] выделил среди операторов рода 1 ранга 2, найденные Кричевером и Новиковым, те которые имеют рациональные коэффициенты. Моховым [7] получен аналог этого результата для операторов рода 1 ранга 3.

Задача нахождения коммутирующих операторов ранга $l > 1$ в общем случае не решена.

В теориях коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов и коммутирующих разностных операторов существует много общего. Как и в случае дифференциальных операторов, для коммутирующих разностных операторов

$$L_1 = \sum_{N_-}^{N_+} u_i(n)T^i, \quad L_2 = \sum_{M_-}^{M_+} v_i(n)T^i, \tag{5}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ — дискретная переменная, T — оператор сдвига по дискретной переменной

$$Tf(n) = f(n+1),$$

существует спектральная кривая Γ, заданная в $\mathbb{C}^2$ некоторым полиномом $Q(\lambda, \mu)$, которая параметризует их совместные собственные функции и собственные значения

$$L_1\psi(n,P) = \lambda\psi(n,P), \quad L_2\psi(n,P) = \mu\psi(n,P), \quad P = (\lambda, \mu) \in \Gamma.$$

Точно также как и в гладком случае определяется *ранг* операторов L_1 и L_2, как размерность пространства совместных собственных функций в точке $P \in \Gamma$ общего положения. Одним из основных отличий дискретного случая от гладкого заключается в следующем. Любое коммутативное кольцо обыкновенных дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической кривой с единственным полюсом в выделенной точке $q \in \Gamma$, а любое коммутативное кольцо разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической кривой с m полюсами, где m может быть любым натуральным числом [12]. Такие операторы называются m-точечными.

Мамфордом [13] и Кричевером [14] найдены спектральные данные, отвечающие двухточечным операторам ранга 1.

Мы будем рассматривать только одноточечные операторы. При $l > 1$ нахождение функции $\psi(n, P)$ сводится к решению задачи Римана и найти ее в явном виде не удается. Метод деформации параметров Тюрина работает также и в дискретном случае: Кричевером и Новиковым [12] показано, что коэффициенты операторов можно восстановить из решений уравнений на параметры Тюрина голоморфных стабильных расслоений, которые однозначно задаются функцией $\psi(n, P)$, при этом коэффициенты операторов зависят от произвольных l функциональных параметров. А именно, ими показано, что для восстановления коэффициентов операторов достаточно найти матричную функцию

$$\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P), \tag{6}$$

где $\Psi(n,P)$ — матрица Вронского, построенная по некоторому базису в пространстве совместных собственных функций. Используя этот метод Кричевер и Новиков нашли операторы ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. При этом коэффициенты операторов выражены через ζ и $\wp$-функции Вейерштрасса от двух функциональных параметров. Интересной задачей, сформулированной И.М. Кричевером и С.П. Новиковым, является задача выделения среди этих операторов, операторов с полиномиальными коэффициентами.

Одной из основных трудностей при построении коммутирующих дифференциальных операторов нескольких переменных является следующая. В отличие от одномерного случая, наличие бесконечномерного семейства совместных собственных функций, например, запараметризованное точками алгебраического многообразия, не гарантирует их коммутацию. Преодолеть эту трудность можно с помощью построения так называемых модулей Бейкера–Ахиезера со специальными свойствами.

Модули Бейкера–Ахиезера (над кольцом дифференциальных операторов) введены Накаяшики (см. [15], [16]). Эти модули строятся по набору спектральных данных, которые включают в себя алгебраическое многообразие X и некоторые дополнительные объекты. В одномерном случае элементы модулей — это обычные функции Бейкера–Ахиезера.

Модуль Бейкера–Ахиезера M состоит из функций $\psi(x,P)$, которые зависят от $x\in\mathbb{C}^n$, где $n=\dim_{\mathbb{C}} X$, и $P\in X$. При фиксированном x функция ψ является сечением расслоения над X, причем ψ имеет существенную особенность на некотором дивизоре $Y\subset X$. Элементы $\psi\in M$ обладают следующими свойствами:

- $\partial_{x_j}\psi\in M$ и $f(x)\psi\in M$, где $f(x)$ — аналитическая функция в окрестности некоторой фиксированной точки x_0,

- для любой мероморфной функции λ на X с полюсом на Y функция $\lambda\psi$ принадлежит M.

Эти свойства означают, что M является модулем над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n=\mathcal{O}[\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}]$, где $\mathcal{O}$ — кольцо аналитических функций в окрестности x_0, и над кольцом A_Y мероморфных функций на X с полюсом на Y.

Главный интерес представляют свободные конечнопорожденные $\mathcal{D}_n$-модули Бейкера–Ахиезера, поскольку в этом случае данная конструкция позволяет строить коммутативные кольца дифференциальных операторов. Выберем в M базис $\psi_1(x,P),\dots,\psi_N(x,P)$. Через $\Psi(x,P)$ обозначим вектор-функцию $(\psi_1(x,P),\dots,\psi_N(x,P))^\top$. Тогда для $\lambda \in A_Y$ существует единственный дифференциальный оператор $D(\lambda)$ с матричными коэффициентами размерности $N \times N$ такой, что

$$D(\lambda)\Psi(x,P) = \lambda(P)\Psi(x,P).$$

Очевидно, что для различных λ и $\mu \in A_Y$ операторы $D(\lambda)$ и $D(\mu)$ коммутируют. Таким образом данная конструкция позволяет строить решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, которая эквивалентна условию коммутации дифференциальных операторов.

Известны следующие примеры свободных модулей Бейкера–Ахиезера. В [15], [16] показано, что модули Бейкера–Ахиезера на абелевых многообразиях свободны при некоторых ограничениях на спектральные данные (соответствующие операторы изучались в [17], [18]). В [16] также показано, что ограничение модуля Бейкера–Ахиезера с трехмерного абелева многообразия на тета-дивизор остается свободным (над кольцом дифференциальных операторов по двум переменным). В [19] построен еще один пример свободного модуля Бейкера–Ахиезера на поверхности Фано. В общем случае не ясно как строить такие модули.

Построение n-ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$ является классической задачей дифференциальной геометрии. В наше время интерес к этой задаче обусловлен тем, что она тесно связана с задачами теории систем гидродинамического типа и топологической теории поля (Дубровин, Новиков, Царев, Кричевер, см. ссылки в [20, 21]).

К задаче явного построения плоских криволинейных n-ортогональных систем координат применимы методы интегрируемых систем: Захаров [21] применил метод одевания, а Кричевер [20] получил конечнозонный аналог этого метода. Причем в конструкции Кричевера предполагается, что спектральная кривая является гладкой. Это влечет то, что координатные функции выражаются через тэта-функцию спектральной кривой и, следовательно, классические системы координат таким способом не могут быть получены. Интересной задачей является задача отыскания спектральных данных, отвечающих классическим криволинейным ортогональным системам координат.

Кричевером [20] предложена схема решения уравнений ассоциативности двумерной топологической теории поля в терминах тэта-функций спетральных кривых. При этом решения уравнений ассоциативности выражаются через тэта-функции и достаточно очевидно, что корреляторы не могут быть квазиоднородными.

Для заданного симметричного тензора $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha}$, уравнения ассоциативности на функцию F имеют вид

$$\frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\lambda}\, \eta^{\lambda\mu}\, \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^\mu} = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^\lambda}\, \eta^{\lambda\mu}\, \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^\mu}, \tag{7}$$

где $t = (t^1, \ldots, t^n)$ и индексы изменяются от 1 до n. Они эквивалентны условию, что конечномерная алгебра с образующими $e_1, \ldots, e_n$ и коммутативным умножением

$$e_\alpha \cdot e_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \quad c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}, \quad c^\gamma_{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} c_{\alpha\beta\delta},$$

является ассоциативной, т.е. мы имеем

$$(e_\alpha \cdot e_\beta) \cdot e_\gamma = e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot e_\gamma) \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma.$$

Эти уравнения первоначально появились в топологической теории поля, где вместе с условиями

$$c_{1\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n; \quad \eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

где метрика $\eta_{\alpha\beta}$ — постоянная, и

$$F(\lambda^{d_1} t^1, \ldots, \lambda^{d_n} t^n) = \lambda^{d_F} F(t^1, \ldots, t^n) \tag{8}$$

(условие квазиоднородности) они образуют систему уравнений Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде (WDVV) [22, 23].

Условие квазиоднородности обобщается следующим образом: предполагается, что существует векторное поле $E = (q^\alpha_\beta t^\beta + r^\alpha)\partial_\alpha$ такое, что $E^\alpha \partial_\alpha F = d_F F$ (в случае (8) мы имеем $E = d_1 t^1 \partial_1 + \cdots + d_n t^n \partial_n$) и это обобщение покрывает случай квантовых когомологий.

Так как, согласно [22], важно только, чтобы корреляторы c_{ijk}, т.е. третьи производные F, были квазиоднородны в смысле (8), существует другое обобщение квазиоднородности, которое выглядит следующим образом

$$E^\alpha \partial_\alpha F = d_F F + (\text{полином второго порядка по } t^1, \ldots, t^n).$$

Это обобщение важно для нас потому, что в наших примерах часть показателей d_i равны -1.

Геометрической формой решений уравнений WDVV является понятие фробениусова многообразия, введенное Дубровиным [24], открывшим богатые дифференциально–геометрические свойства уравнений WDVV, что положило начало фробениусовой геометрии.

Существует важное соотношение между фробениусовыми многообразиями и егоровскими метриками, также открытое Дубровиным [25].

Метрика

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} H_i^2(u) \left(du^i\right)^2$$

называется егоровской, если коэффициенты вращения

$$\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i},\ i \neq j,$$

являются симметричными: $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Рассмотрим метрики Дарбу–Егорова, т.е. плоские егоровские метрики

$$\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \sum_{i=1}^{n} H_i^2(u) \left(du^i\right)^2,$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — плоские кооординаты в некоторой области, в которой коэффициенты $\eta_{\alpha\beta}$ постоянны. Имеем

$$\eta^{\alpha\beta} = \sum_i H_i^{-2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i}$$

и условие плоскости метрики вместе с симметричностью коэффициентов вращения влечет, что существует функция F, называемая препотенциалом, такая, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=1}^{n} H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

и имеют место уравнения ассоциативности:

$$c_{\alpha\beta}^{\lambda} c_{\lambda\gamma}^{\mu} = c_{\alpha\lambda}^{\mu} c_{\beta\gamma}^{\lambda} \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n,$$

где

$$c_{\beta\gamma}^{\alpha} = \sum_i \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma}.$$

Интересной задачей является задача отыскания спектральных данных, отвечающих решениям с однородными корреляторами.

Многие задачи дифференциальной геометрии, такие как построение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны в $\mathbb{R}^3$, построение торов постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$, сводятся к нахождению решений солитонных уравнений, которые эквивалентны условию коммутации дифференциальных операторов

$$[\partial_x - A, \partial_y - B] = 0,$$

где A, B — матричные функции. В частности, к этому классу задач относятся и некоторые задачи построения минимальных и гамильтоново–минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

Основные результаты диссертации.

1. Предложен метод построения частных решений уравнений Кричевера–Новикова на параметры Тюрина. С помощью этого метода найдены примеры самосопряженных обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2, а также примеры обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода два.

2. Найдены разностные операторы Кричевера–Новикова ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, отвечающие эллиптическим спектральным кривым.

3. Доказано, что ограничение модуля Бейкера–Ахиезера с главно поляризованного абелева многообразия на пересечение тэта-дивизоров со сдвигами является свободным модулем над кольцом дифференциальных операторов. Отсюда вытекает существование вложения кольца мероморфных функций на пересечении тэта-дивизоров с некоторым полюсом в кольцо дифференциальный операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами.

4. Найден метод построения n-ортогональных криволинейных систем координат в $\mathbb{R}^n$, отвечающих приводимым спектральным кривым. Найдены спектральные данные, отвечающие полярной системе координат на плоскости, цилиндрической системе координат в трехмерном пространстве и сферической системе координат в $\mathbb{R}^n$. Получены новые решения уравнений WDVV с однородными корре-

ляторами, отвечающие приводимым рациональным спектральным кривым.

5. Построены новые примеры гамильтоново минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по интегрируемым системам, дифференциальной геометрии и математической физике, а также в специальных курсах и семинарах для студентов и аспирантов.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории интегрируемых систем, методы алгебраической геометрии, методы дифференциальной геометрии и методы теории тэта-функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на различных конференциях:

Международный математический конгресс, Мадрид, Испания, 2006,

Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти академика И.Г. Петровского, Москва, МГУ, 2007,

Международная конференция «Симметрия и теория возмущений», Отранто, Италия, 2007,

Российско–Германская конференция, посвященная 95-летию со дня рождения академика А.Д. Александрова, Санкт-Петербург, 2007,

Международная конференция «Симметрия в нелинейной математической физике», Киев, 2007,

Международная конференция «Римановы поверхности, гармонические отображения и визуализация», Осака, Япония, 2008,

Конференция по интегрируемым системам, Фукуока, Япония, 2008,

Геометрия в «целом», топология и их приложения, Харьков, 2009 и др.

Результаты диссертации докладывались на различных семинарах: «Геометрия, топология и их приложения» (рук. И. А. Тайманов, Институт Математики СО РАН), «Геометрия, топология и математическая физика» (рук. В. М. Бухштабер и С. П. Новиков, МГУ), на семинаре отдела анализа и геометрии Института Математики СО РАН (рук. Ю.Г. Решетняк), на семинарах в Институте Гидродинамики СО РАН, в Независимом Московском Университете, в Институте Теоретической и Экспериментальной Физики, а также на семинарах в Великобритании (университеты Лафборо, Манчестера), Израиле (университет Тель-Авива), ФРГ (университет имени Гумбольдта, Берлин), Южной Кореи (Корейский Институт Науки и Технологий, Тэджон), Японии (университет Кюшу) и др.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в [27]–[42]. Результаты совместных работ [33], [34], [42] получены в процессе неразделимой творческой деятельности авторов. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Она изложена на 198 страницах, список литературы содержит 78 наименований.

Содержание диссертации.

Во введении формулируются основные результаты диссертации.

Глава 1 состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен коммутирующим дифференциальным операторам ранга 2, отвечающих спектральным кривым рода 2.

Как уже отмечалось, для нахождения коммутирующих дифференциальных операторов (1) достаточно найти функции $\chi_i = \chi_i(x, P)$, которые определяются из равенства (4). В отличие от функции ψ, которая имеет существенную особенность в выделенной точке q, функции χ_i являются мероморфными.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^6 + c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \ \ \sigma(z, w) = (z, -w).$$

Мы рассматриваем случай, когда $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Имеет место
Теорема 1.1 *Компоненты $\chi_0(x, P)$ и $\chi_1(x, P)$ матрицы $\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1}$ имеют следующий вид*

$$\chi_1(x, P) = -\frac{\gamma_1'(x)}{z - \gamma_1(x)} - \frac{\gamma_2'(x)}{z - \gamma_2(x)} - \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)} - \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2(x)},$$

$$\chi_0(x, P) = -\frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_1'(x)}{z - \gamma_1(x)} - \frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_2'(x)}{z - \gamma_2(x)} + \frac{1}{2z} + \frac{\kappa_2(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R(x, z)},$$

$$R(x,z)=\frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{(z-\gamma_1(x))^2}+\frac{2G_1(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)}+\frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{(z-\gamma_2(x))^2}$$
$$+\frac{2G_2(x)\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)}+\frac{c_1}{c_0}\right)+\frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{c_0}.$$

Все нули функции R имеют первый порядок и расположены в точках ветвления, все полюсы имеют второй порядок (поэтому функция $\sqrt{R}$ корректно определена на Γ). Функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ удовлетворяют нелинейному дифференциальному уравнению, которое интегрируемо в квадратурах относительно $\gamma_1(x)$, если положить

$$\gamma_2(x)=\frac{C-B\gamma_1(x)}{B+A\gamma_1(x)},\ A,B,C\in\mathbb{C}.$$

В этом случае решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\gamma_1^{-1}(y_1)=\int\sqrt{\frac{y_1y_2}{2c_0(y_2-y_1)^3}\left(y_2^2F(y_1)-\frac{y_1^2F(y_2)(B+Ay_1)^4}{(B^2+AC)^2}\right)}dy_1,$$

где

$$y_1=\gamma_1(x),\quad y_2=\frac{C-By_1}{B+Ay_1}.$$

Функции $H(x),F_i(x),G_i(x)$ и $\kappa_2(x)$ явным образом выражаются через $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ (см. формулы (1.23), (1.19)–(1.22) и (1.13) в диссертации).

Следствие 1.1 *Оператор, отвечающий функции*

$$\lambda=\frac{1}{2z^3}+\frac{w}{2z^3\sqrt{c_0}}+\frac{c_1}{4z^2c_0}+\frac{1}{z}\left(\frac{c_2}{4c_0}-\frac{c_1^2}{16c_0^2}\right)$$

имеет следующий вид

$$L=\frac{d^6}{dx^6}+f_4\frac{d^4}{dx^4}+f_3\frac{d^3}{dx^3}+f_2\frac{d^2}{dx^2}+f_1\frac{d}{dx}+f_0,$$

где

$$f_4=\alpha-3a_0,\ f_3=-6a_0'-3b_1,$$
$$f_2=\beta-7a_0''-6b_1'-3a_1-2\alpha a_0+3a_0^2,$$
$$f_1=-2\alpha b_1+3a_0b_1-3b_2-2\alpha a_0'+6a_0a_0'-6a_1'-7b_1''-4a_0''',$$
$$f_0=\gamma-\beta a_0+\alpha a_0^2-a_0^3-2\alpha a_1+3a_0a_1+2(a_0')^2$$

$$-2\alpha b_1' - 6b_2' - \alpha a_0'' + 3a_0 a_0'' - 7a_1'' - 4b_1''' - a_0^{IV}.$$

Функции $a_0(x), a_1(x), b_1(x)$ *и* $b_2(x)$ *находятся из разложений* χ_0 *и* χ_1 *в ряд по степеням* z

$$\chi_0 = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + O(z^2),\ \chi_1 = b_1 z + b_2 z^2 + O(z^3),$$

$$a_0(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma_1(x)+\gamma_2(x)}{2\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{4c_0},$$

$$a_1(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1^2(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2^2(x)} + \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{4\gamma_1^2(x)} - \frac{G_1(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{4\gamma_2^2(x)}$$

$$-\frac{G_2(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{4c_0} - \frac{1}{16}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0}\right)^2,$$

$$b_1(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^2(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^2(x)},\ b_2(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^3(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^3(x)},$$

α, β *и* γ *— коэффициенты разложения* λ *в ряд*

$$\lambda = \frac{1}{z^3} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z} + \gamma + O(z),$$

$$\alpha = \frac{c_1}{2c_0},\ \beta = \frac{c_2}{2c_0} - \frac{c_1^2}{8c_0^2},\ \gamma = \frac{c_1^3}{32c_0^3} - \frac{c_1c_2}{8c_0^2} + \frac{c_3}{4c_0}.$$

Операторы, коммутирующие с L, легко находятся из уравнений коммутации.

Отметим, что при $c_1 = c_5 = 0,\ c_3 = 8c_0$ и при

$$\gamma_1(x) = -\gamma_2(x) = \frac{1}{x}$$

коэффициенты операторов являются рациональными функциями. Среди таких операторов можно выделить операторы с полиномиальными коэффициентами. Укажем пример. Пусть кривая Γ задана уравнением

$$w^2 = z^6 + 2z^3 + \frac{1}{4}.$$

Тогда операторы

$$L_1 = \partial_x^6 - \frac{3x^4}{16}\partial_x^4 - \frac{3x^3}{2}\partial_x^3 + \frac{3}{256}(x^8 - 576x^2)\partial_x^2 + \left(\frac{3x^7}{32} - 6x\right)\partial_x$$

$$-\frac{x^{12}}{4096}+\frac{23x^6}{64}-\frac{3}{2},$$

$$L_2=\partial_x^8-\frac{x^4}{4}\partial_x^6-3x^3\partial_x^5+\frac{1}{128}(3x^8-2368x^2)\partial_x^4+\frac{1}{8}(3x^7-320x)\partial_x^3$$

$$-\left(\frac{x^{12}}{1024}-\frac{45x^6}{16}+30\right)\partial_x^2-\left(\frac{3x^{11}}{256}-\frac{35x^5}{4}\right)\partial_x+\frac{x^{16}-3712x^{10}+716800x^4}{65536}.$$

$$L_3=\partial_x^{10}-\frac{5x^4}{16}\partial_x^8-5x^3\partial_x^7+\frac{5}{128}(x^8-1024x^2)\partial_x^6+\frac{5}{16}(3x^7-416x)\partial_x^5$$

$$-\left(\frac{5x^{12}}{2048}-\frac{85x^6}{8}+150\right)\partial_x^4-\frac{5}{256}(3x^{11}-3136x^5)\partial_x^3$$

$$+\frac{5(x^{16}-8192x^{10}+2437120x^4)}{65536}\partial_x^2+\frac{5}{4096}(x^{15}-2464x^9+215040x^3)\partial_x$$

$$-\frac{x^{20}}{1048576}+\frac{15x^{14}}{2048}-\frac{1505x^8}{256}+\frac{525x^2}{4}$$

попарно коммутируют.

В разделе 1.1.2 эта конструкция обобщается на случай гиперэллиптических спектральных кривых рода 4. Здесь также найден пример таких операторов с полиномиальными коэффициентами

$$L_1=\partial_x^{10}+\frac{5x^3}{12\sqrt{2}}\partial_x^8+\frac{5x^2}{\sqrt{2}}\partial_x^7+\frac{5}{144}(396\sqrt{2}x+x^6)\partial_x^6+\frac{5}{8}(36\sqrt{2}+x^5)\partial_x^5+$$

$$\frac{5x^4(3528+\sqrt{2}x^5)}{3456}\partial_x^4+\frac{5x^3(760+\sqrt{2}x^5)}{192}\partial_x^3+$$

$$\frac{5x^2(622080+3384\sqrt{2}x^5+x^{10})}{82944}\partial_x^2+$$

$$\frac{5x(36288+960\sqrt{2}x^5+x^{10})}{6912}\partial_x+\frac{23}{4}+\frac{61x^5}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{10}}{1536}+\frac{x^{15}}{995328\sqrt{2}},$$

$$L_2=\partial_x^{12}+\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\partial_x^{10}+\frac{15x^2}{2\sqrt{2}}\partial_x^9+\frac{2424\sqrt{2}x+5x^6}{96}\partial_x^8+\left(\frac{109}{\sqrt{2}}+\frac{5x^5}{4}\right)\partial_x^7+$$

$$\left(\frac{109x^4}{8}+\frac{5x^9}{864\sqrt{2}}\right)\partial_x^6+\frac{9680x^3+10\sqrt{2}x^8}{128}\partial_x^5+$$

$$\frac{x^2(6072192+26064\sqrt{2}x^5+5x^{10}}{27648}\partial_x^4+$$

$$\left(294x+\frac{377x^6}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{11}}{1152}\right)\partial_x^3+$$
$$\frac{42964992+6535296\sqrt{2}x^5+14736x^{10}+\sqrt{2}x^{15}}{331776}\partial_x^2+$$
$$\frac{28237824\sqrt{2}x^4+181376x^9+40\sqrt{2}x^{14}}{884736}\partial_x+$$
$$\frac{463822848\sqrt{2}x^3+9092736x^8+5832\sqrt{2}x^{13}+x^{18}}{23887872}.$$

В параграфе 2 построены некоторые обыкновенные формально самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, причем функция Бейкера–Ахиезера этих операторов имеет существенную особенность в точке Вейерштрасса.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l=2$ и кривая Γ рода 2 является гладким пополнением бесконечно удаленной точкой ∞ кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2=F(z)=z^5+c_3z^3+c_2z^2+c_1z+c_0.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma:\Gamma\to\Gamma,\quad \sigma(z,w)=(z,-w).$$

Мы рассматриваем случай, когда $\sigma\chi_1=\chi_1$. Справедлива
Теорема 1.2 *Имеют место равенства*

$$\chi_1=-\frac{\gamma'}{z-\gamma}-\frac{\gamma'}{z-(\gamma+c)},$$

$$\chi_0=-\frac{1}{2}\frac{H_1\gamma'}{z-\gamma}-\frac{1}{2}\frac{H_2\gamma'}{z-(\gamma+c)}+\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2}\frac{w}{(z-\gamma)(z-(\gamma+c))},$$

где

$$\kappa=\frac{F(\gamma)-4\gamma'^4+8c\gamma'^2\gamma''-c^2\gamma''^2+2c^2\gamma'\gamma'''}{2c^2\gamma'^2},$$

$$\gamma^{-1}(y)=\int\left(\frac{4}{3P(y)}\right)^{\frac{1}{4}}dy,$$

$$P=y^5+\frac{5}{2}cy^4+\frac{1}{3}(10c^2+3c_3)y^3+\frac{1}{2}(5c_3+2c_2+3cc_3)y^2+(c^4+c_1+cc_2+c^2c_3)y+\delta,$$

$y=\gamma(x), \delta, c\in\mathbb{C}$. Функции $H_i(x)$ выражаются явным образом через $\gamma(x)$ (см. формулы (1.27)–(1.29) в диссертации).

Следствие 1.2 *Оператор, отвечающий функции z имеет вид*

$$L=L^*=\partial_x^4-\kappa\partial_x^2-\kappa'\partial_x+\frac{\kappa^2}{4}-\frac{\kappa''}{2}-\gamma-\frac{c}{2}.$$

Укажем пример. Пусть кривая Γ задается уравнением

$$w^2=z^5-\frac{10}{3}z^3+\frac{7}{3}z$$

и пусть

$$c=2,\quad \delta=1,\quad \gamma=\frac{1024}{x^4}-1.$$

Тогда L имеет вид

$$\partial_x^4+\left(\frac{x^6}{49152}-\frac{425}{6x^2}\right)\partial_x^2+\left(\frac{x^5}{8192}+\frac{425}{3x^3}\right)\partial_x+\frac{x^{12}}{9663676416}-\frac{245x^4}{589824}+\frac{2569}{144x^4}.$$

В главе 2 рассматриваются разностные операторы Кричевера–Новикова ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. В рамках одноточечной конструкции мы находим такие операторы с полиномиальными по дискретной переменной коэффициентами.

Как уже отмечалось для нахождения операторов вида (5) достаточно найти матричные функции $\chi(n,P)$ (6). Основной результат этой главы заключается в следующем.

Пусть спектральная кривая Γ задана в $\mathbb{C}^2$ с координатами (z,w) уравнением

$$w^2=F(z)=z^4+c_2z^2+c_1z+1$$

и пусть $q=(0,1)\in\Gamma$ — выделенная точка. Кривая Γ допускает инволюцию

$$\sigma:\Gamma\to\Gamma,\ \ \sigma(z,w)=(z,-w).$$

При $l=2$ матрица $\chi(n,P)$ имеет вид

$$\chi(n,P)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \chi_1(n,P) & \chi_2(n,P)\end{pmatrix},\quad P=(z,w)\in\Gamma.$$

Мы рассматриваем случай, когда инволюция σ не изменяет χ_1, т.е.

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)).$$

Имеет место
Теорема 2.1 *Функции* $\chi_1(x,P)$ *и* $\chi_2(x,P)$ *имеют вид*

$$\chi_1(n,P)=\frac{c(n)}{z-\gamma(n)}+\frac{c(n)}{\gamma(n)-\gamma(n+1)},$$

$$\chi_2(n,P)=\frac{1}{2z}+\frac{a(n)}{2(z-\gamma(n))}+\frac{w\gamma(n)}{2z(\gamma(n)-z)}+d(n),$$

где

$$c(n)=\frac{\gamma(n-1)(a^2(n)-F(\gamma(n))}{4\gamma(n)(\gamma(n)-\gamma(n-1))},$$

$$d(n)=\frac{(a(n+1)-1)\gamma(n)+(a(n)+1)\gamma(n+1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n+1)},$$

$\gamma(n),a(n)$ — *произвольные функции дискретной переменной* $n\in\mathbb{Z}$.

Функция $\lambda_1(z)$ на кривой Γ, имеющая единственный полюс второго порядка в точке q, выглядит следующим образом

$$\lambda_1=\frac{1}{2z^2}+\frac{c_1}{4z}+\frac{w}{2z^2}.$$

Обозначим через $b_i(n),e_i(n)$ и p_i коэффициенты разложений функций χ_1, χ_2 и λ_1 в ряд в окрестности q:

$$\chi_1(n,z)=b_0(n)+b_1(n)z+\dots,$$

$$\chi_2(n,z)=\frac{1}{z}+e_0(n)+e_1(n)z+\dots,$$

$$\lambda_1=\frac{1}{z^2}+\frac{p_1}{z}+p_0+\dots,$$

$$p_0=-\frac{c_1^2}{16}+\frac{c_2}{4},\quad p_1=\frac{c_1}{2}.$$

Коэффициенты $b_i,e_i,\ i=0,1$ явным образом выражаются через $\gamma(n),a(n)$ (см. формулы (2.5)–(2.8) в диссертации).
Следствие 2.1 *Оператор* $L(\lambda_1)$ *имеет следующий вид*

$$L(\lambda_1)=T^2+u_1(n)T+u_0(n)+u_{-1}(n)T^{-1}+u_{-2}(n)T^{-2},$$

где

$$u_1(n)=p_1-e_0(n)-e_0(n+1),$$

$$u_0(n) = p_0 - b_0(n) - b_0(n+1) - p_1 e_0(n) + e_0^2(n) - e_1(n) - e_1(n+1),$$

$$u_{-1}(n) = -b_1(n) + b_0(n)\left(-p_1 - \frac{b_1(n-1)}{b_0(n-1)} + e_0(n-1) + e_0(n)\right),$$

$$u_{-2}(n) = b_0(n) b_0(n-1).$$

Основным результатом этой главы является

Теорема 2.2 *Если функциональные параметры $a(n), \gamma(n)$ положить равными*

$$a(n) = n+1, \;\; \gamma(n) = n,$$

то операторы имеют полиномиальные по n коэффициенты. При этом

$$L_2 = T^2 + 2(n+2)T - \left(\frac{n^4}{2} + n^3 - \frac{1}{2}(1-c_2)n^2 - \frac{1}{2}(8-c_1-c_2)n\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(n^3 + (c_2-1)n + c_1 - 2)(n^2+n-1)T^{-1} +$$

$$\frac{1}{16}(n^3+(c_2-1)n+c_1-2)(n^3-3n^2+(2+c_2)n+c_1-c_2-2)(n+1)(n-2)T^{-2}.$$

Оператор третьего порядка мы не приводим в теореме 2.2 из-за его громоздкости. Укажем пример. Пусть спектральная кривая задана уравнением

$$w^2 = z^4 + z^2 + 1,$$

тогда

$$L_2 = T^2 + 2(n+2)T - \frac{1}{2}\left(n^4 + 2n^3 - 7n - 5\right) - \frac{1}{2}\left(n^3 - 2\right)\left(n^2 + n - 1\right)T^{-1}$$

$$+\frac{1}{16}\left(n^3 - 3n^2 + 3n - 3\right)(n+1)(n-2)\,T^{-2},$$

$$L_3 = T^3 + \left(3n + \frac{15}{2}\right)T^2 - \frac{3}{4}\left(n^4 + 4n^3 + 5n^2 - 8n - 14\right)T$$

$$-\frac{3}{4}\left(2n^5 + 7n^4 + 10n^3 + n^2 - 12n - 5\right)$$

$$+\frac{3}{16}\left(n^8 - 2n^6 - 12n^5 - 3n^4 + 10n^3 + 20n^2 + 6n - 12\right)T^{-1}$$

$$+\frac{3}{32}n\left(2n^2 - n - 5\right)\left(n^6 - 3n^5 + 3n^4 - 5n^3 + 6n^2 - 6n + 6\right)T^{-2} -$$

$$\frac{1}{64}(n-3)\left(n^2-1\right)\left(n^3-2\right)\left(n^3-6n^2+12n-10\right)\left(n^3-3n^2+3n-3\right)T^{-3}.$$

В главе 3 изучаются модули Бейкера–Ахиезера на пересечении тэта-дивизоров со сдвигами.

Обозначим через X^g главно поляризованное абелево многообразие

$$X^g = \mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\},$$

где Ω — симметричная комплексная матрица с положительно определенной мнимой частью. Через Q обозначим неособый тэта-дивизор, заданный уравнением $\vartheta(z) = 0$, где $\vartheta(z)$ — тэта-функция. Введем обозначения

$$Y_{a_j} = \{z \in X^g : \vartheta_j(z - a_j) = 0,\ a_j \in X^g\},$$

$$Y^k = Y_{a_1} \cap \cdots \cap Y_{a_k},$$
$$Q^k = Y^k \cap Q, k < g - 1.$$

Далее будем предполагать, что многообразие Y^j трансверсально пересекается с $Y_{a_{j+s}}$ и с $Y, j+s \leq k$, предположим, что Y^j и Q^j являются гладкими неприводимыми и пусть также набор $a_1, \ldots, a_k$ находится в общем положении (т.е. принадлежит некоторому открытому всюду плотному множеству в $X^g \times \cdots \times X^g$).

Имеет место

Теорема 3.1 *Существует вложение L_k кольца мероморфных функций на многообразии Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов по $g - k$ переменным с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами*

$$L_k : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Mat}(g!, g - k).$$

Образом вложения является коммутативное кольцо матричных дифференциальных операторов по $(g - k)$-переменным.

Теорема 3.1 вытекает из свободности модуля Бейкера–Ахиезера на многообразии Y^k.

Как и в одномерном случае можно построить операторы L_α, коэффициенты которых зависят от времен и удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$[\partial_{t_\alpha} - L_\alpha, \partial_{t_\beta} - L_\beta] = 0,$$

где L_α и L_β — $g! \times g!$-матричные дифференциальные операторы по $g - k$ переменным, коэффициенты которых зависят от t_α и t_β, α и β принадлежат счетному множеству индексов.

Глава 4 состоит из двух параграфов. В первом параграфе изучается предельный случай конструкции Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат, отвечающий сингулярным спектральным кривым. В случае, когда спектральная кривая является сингулярной и приводимой, причем такой что все ее неприводимые компоненты являются гладкими рациональными комплексными кривыми, процедура построения криволинейных систем координат сильно упрощается и сводится к несложным вычислениям с элементарными функциями. При этом мы показываем как в эту схему вкладываются хорошо известные системы координат, такие как полярные координаты на плоскости, цилиндрические координаты в трехмерном пространстве и сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$.

Во втором параграфе мы строим решения уравнений WDVV, применяя схему Кричевера решения уравнений ассоциативности для приводимых рациональных кривых.

Пусть Γ приводимая алгебраическая кривая такая, что все ее неприводимые компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ изоморфны $\mathbb{C}P^1$ и все сингулярности на Γ являются точками пересечений различных компонент.

Регулярный дифференциал Ω на Γ задается мероморфными дифференциалами $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ на компонентах такими, что каждый такой дифференциал может иметь только простые полюсы и только в точках пересечения компонент, причем сумма вычетов в каждой точке пересечения компонент равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{res}_{\mathrm{P}} \Omega_{i_j} = 0, \quad P \in \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_r}.$$

Возьмем три дивизора на Γ:

$$P = P_1 + \dots + P_n, \quad D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g_a+l-1}, \quad R = R_1 + \dots + R_l,$$

где g_a арифметический род Γ. Обозначим через k_i^{-1} некоторый локальный параметр около P_i, $i = 1, \dots, n$. Говорят, что $\psi(u^1, \dots, u^n, z)$, $z \in \Gamma$ есть функция Бейкера–Ахиезера, отвечающая данным $S = \{P, D, R\}$, если

1) $\psi \exp(-u^i k_i)$ аналитична около P_i, $i = 1, \dots, n$;

2) ψ мероморфна на $\Gamma \backslash \{\cup P_i\}$ с полюсами в γ_j, $j = 1, \dots, g_a + l - 1$;

3) $\psi(u, R_k) = 1$, $k = 1, \dots, l$.

Возьмем дополнительный дивизор $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ на Γ такой, что

$Q_i \in \Gamma \setminus \{P \cup D \cup R\}, i = 1, \dots, n$, и положим

$$x^j(u^1, \dots, u^n) = \psi(u^1, \dots, u^n, Q_j), \ j = 1, \dots, n.$$

Для таких кривых с помощью схемы Кричевера получаем:

- Пусть Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ такую, что

  1) σ имеет в точности $2m, m \le n$ неподвижных точек $P_1, \dots, P_n \in P$ и $2m - n$ точек из Q;

  2) $\sigma(Q) = Q$, т.е. точки из Q либо неподвижны, либо переставляются инволюцией:

  $$\sigma(Q_k) = Q_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n;$$

  3) $\sigma(k_i^{-1}) = -k_i^{-1}$ около P_i, $i = 1, \dots, n$;

  4) существует регулярный дифференциал Ω на Γ такой, что его дивизор нулей и полюсов имеет вид

  $$(\Omega)_0 = D + \sigma D + P, \quad (\Omega)_\infty = R + \sigma R + Q.$$

  Тогда Ω является поднятием некоторого мероморфного дифференциала Ω_0 с $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ и мы имеем

  $$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_{u^i} x^k \partial_{u^j} x^l = \varepsilon_i^2 h_i^2 \delta_{ij},$$

  где

  $$h_i = \lim_{P \to P_i} \left(\psi e^{-u^i k_i} \right), \quad \eta_{kl} = \delta_{k,\sigma(l)} \mathbf{res}_{Q_k} \Omega_0,$$

  и

  $$\Omega_0 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_i^2 \lambda_i + O(\lambda_i) \right) d\lambda_i, \ \lambda_i = k_i^{-2}, \text{ в } P_i, \ i = 1, \dots, n.$$

  Более того, если существует антиголоморфная инволюция

  $$\tau : \Gamma \to \Gamma$$

  такая, что все неподвижные точки σ неподвижны при τ и

  $$\tau^*(\Omega) = \overline{\Omega}$$

  то коэффициенты $H_i(u)$ вещественны для $u^1, \dots, u^n \in \mathbb{R}$ и $u^1, \dots, u^n$ являются n-ортогональными координатами в плоском n-пространстве с метрикой $\eta_{kl} dx^k dx^l$.

Основным результатом этой главы является
Теорема 4.2 *1) Пусть каждая компонента* $\Gamma_i, i = 1, \ldots, n$ *содержит пару точек* $P_i = \infty$, $Q_i = 0$ *и* $k_i^{-1} = z_i$ *— глобальный параметр на* Γ_i. *Предположим также, что каждая точка пересечения* $a \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ *различных компонент имеет одинаковые координаты на обеих компонентах:*

$$z_i(a) = z_j(a),$$

и инволюция σ *на каждой компоненте имеет вид*

$$\sigma(z_i) = -z_i.$$

Тогда метрика

$$ds^2 = \eta_{kl} dx^k dx^l = \sum_i \left(\varepsilon_i^2 h_i^2\right) \left(du^i\right)^2, \quad h_i = h_i(u^1, \ldots, u^n),\ i = 1, \ldots, n,$$

построенная по этим спектральным данным, является метрикой Дарбу–Егорова.

2) Более того, предположим, что спектральная кривая связна и функция Бейкера–Ахиезера нормирована в одной точке r*:*

$$\psi(u, r) = 1, \quad R = r \in \Gamma.$$

Тогда функции

$$c_{\alpha\beta\gamma}(x) = \sum_{i=1}^n H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma}, \quad H_i = \varepsilon_i h_i,$$

являются однородными

$$c_{\alpha\beta\gamma}(\lambda x^1, \ldots, \lambda x^n) = \frac{1}{\lambda} c_{\alpha\beta\gamma}(x^1, \ldots, x^n).$$

Решения, полученные в теореме 4.2, расширяются до фробениусовых многообразий с помощью следующей леммы.
Лемма 4.3 *Пусть* $F(t^1, \ldots, t^n)$ *— решение уравнений ассоциативности с постоянной метрикой* $\eta_{\alpha\beta}$. *Тогда функция*

$$\widetilde{F}(t^0, t^1, \ldots, t^n, t^{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\eta_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta t^0 + \left(t^0\right)^2 t^{n+1}\right) + F(t^1, \ldots, t^n)$$

удовлетворяет уравнениям ассоциативности (7) с метрикой

$$\widetilde{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и ассоциативная алгебра, порожденная элементами $e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, *с законом умножения*

$$e_i \cdot e_j = c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k = \widetilde{\eta}^{kl} \frac{\partial^3 \widetilde{F}}{\partial t^l \partial t^i \partial t^j},$$

имеет единицу e_0*:*

$$e_o \cdot e_k = e_k \quad \textit{для всех } k = 0, \ldots, n+1,$$

и нильпотентный элемент e_{n+1}*:*

$$e_{n+1}^2 = 0.$$

Более того, если F *квазиоднородна и* $d_\alpha + d_\beta = c$ *для всех* α, β *таких, что* $\eta_{\alpha\beta} \neq 0$, *тогда* $\widetilde{F}$ *также квазиоднородна с* $d_0 = d_F - c, d_{n+1} = 2c - d_F$ *и теми же значениями* d_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, *как и для* F.

В главе 4 приведены явные примеры решений.

Глава 5 посвящена построению и изучению минимальных и гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$. Эта глава состоит из пяти параграфов.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерное подмногообразие, заданное в системой уравнений

$$e_{1j} u_1^2 + \cdots + e_{nj} u_n^2 = d_j, \ j = 1, \ldots, n-k, \tag{9}$$

где $d_j \in \mathbb{R}, e_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Так как $\dim M = k$, то можно считать, что уравнения (9) линейно независимы и целочисленные векторы

$$e_j = (e_{j1}, \ldots, e_{j(n-k)}) \in \mathbb{Z}^{n-k}, j = 1, \ldots, n$$

задают решетку Λ в $\mathbb{R}^{n-k}$ максимального ранга. Обозначим через Λ^* двойственную решетку к Λ, т.е.

$$\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{n-k} | (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\}.$$

Обозначим через Γ следующую фактор-группу

$$\Gamma = \Lambda^*/2\Lambda^*.$$

Имеет место очевидный изоморфизм

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2^{n-k}.$$

Через T^{n-k} обозначим $(n-k)$-мерный тор

$$T^{n-k} = \{(e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, e^{\pi i(e_n,y)})\} \subset \mathbb{C}^n,$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$(e_j, y) = e_{j1}y_1 + \dots + e_{j(n-k)}y_{n-k}.$$

Определим действие группы Γ на многообразии $M \times T^{n-k}$. Для $\gamma \in \Gamma$ положим

$$\gamma(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 \cos\pi(e_1,\gamma), \dots, u_n \cos\pi(e_n,\gamma), y+\gamma).$$

Отметим, что $\cos\pi(e_j,\gamma) = \pm 1$. Введем отображение

$$\varphi : M \times T^{n-k} \to \mathbb{C}^n,$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, u_n e^{\pi i(e_n,y)}).$$

Обозначим посредством e вектор

$$e = e_1 + \dots + e_n.$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}^n$ задана евклидова метрика и симплектическая форма

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Основным результатом параграфа 1 является

Теорема 5.1 *Группа Γ действует на $M \times T^{n-k}$ свободно. Отображение φ задает погружение*

$$\psi_1 : M_1 = M \times T^{n-k}/\Gamma \to \mathbb{C}^n.$$

Погружение ψ_1 является H-минимальным лагранжевым. Если $e = 0$, то ψ_1 — минимальное лагранжево погружение.

Рассмотрим случай, когда M является конусом, т.е. $d_j = 0$ в уравнениях (9). Тогда этому конусу отвечает погружение ψ_2 в комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ $(n-1)$-мерного многообразия M_2, которое получается факторизацией многообразия

$$(M - \{0\}) \times T^{n-k}/\Gamma$$

по действию $\mathbb{R}^*$

$$\psi_2(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i(e_1, y)} : \dots : u_n e^{\pi i(e_n, y)}).$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}P^{n-1}$ задана метрика Фубини–Штуди и в качестве симплектической формы берется кэлерова форма Ω этой метрики.

Имеет место

Теорема 5.2 *Погружение ψ_2 является H-минимальным лагранжевым погружением.*

Если $e = 0$, то ψ_2 является минимальным лагранжевым погружением.

В параграфе 2 получены уравнения, описывающие гамильтоново минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^2$ и получены их частные решения.

В параграфе 3 мы показываем, что иерархия Веселова–Новикова задает интегрируемые деформации минимальных лагарнжевых торов в $\mathbb{C}P^2$.

Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ — расслоение Хопфа. Будем задавать конформное лагранжево погружение

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}P^2$$

области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ как композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathcal{H}$.

Имеет место лемма

Лемма 5.6 *Компоненты r_j вектор–функции r удовлетворяют уравнению Шредингера*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0,$$

где $2e^v(dx^2 + dy^2)$ — индуцированная метрика на поверхности $\varphi(\Omega)$, а $\beta(x, y)$ — лагранжев угол, определяемый равенством

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 — координаты в $\mathbb{C}^3$, x, y — координаты в Ω, σ — репер образованный векторами r, $\frac{r_x}{|r_x|}$, $\frac{r_y}{|r_y|}$.

Лемма 5.6 позволяет ввести следующее определение.

Лагранжев тор, заданный двояко периодическим конформным отображением

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2,$$

называется конечнозонным, если отвечающий ему оператор Шредингера L с периодическими коэффициентами, является конечнозонным на нулевом уровне энергии, т.е. если блоховские функции (совместные собственные функции L и операторов трансляций — операторов сдвига на периоды) оператора L на нулевом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью Γ конечного рода. Риманова поверхность Γ называется спектром лагранжева тора, а ее род — спектральным родом тора.

Так как отображение φ двояко периодическое, то компоненты вектор-функции r являются блоховскими функциями оператора L.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть отображение

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5$$

задает конечнозонный минимальный лагранжев тор $T \subset \mathbb{C}P^2$ спетрального рода $g > 4$. Тогда справедлива

Теорема 5.4 *Существует отображение $\widetilde{r}(t), t = (t'_1, t''_1, t'_2, t''_2 \dots), \widetilde{r}(0) = r$, задающее деформации тора T в классе минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Отображение $\widetilde{r}$ удовлетворяет уравнениям*

$$L\widetilde{r} = \partial_x^2 \widetilde{r} + \partial_y^2 \widetilde{r} + 4e^{\widetilde{v}} \widetilde{r} = 0,$$

$$\partial_{t'_n} \widetilde{r} = A'_n \widetilde{r}, \ \partial_{t''_n} \widetilde{r} = A''_n \widetilde{r},$$

где A'_n, A''_n — операторы порядка $(2n+1)$ по переменным (x, y). Потенциал $\widetilde{V} = 4e^{\widetilde{v}}, \widetilde{v}(0) = v$, деформируется согласно иерархии Веселова–Новикова

$$\frac{\partial L}{\partial t'_n} = [L, A'_n] + B'_n L, \ \frac{\partial L}{\partial t''_n} = [L, A''_n] + B''_n L,$$

где B'_n, B''_n — операторы порядка $(2n-1)$ по переменным (x, y). Деформации $\widetilde{r}(t)$ сохраняют спектр тора T и его конформный тип.

Теорема 5.4. объясняется тем, что уравнение Цицейки, описывающее минимальные лагранжевы торы, является редукцией стационарного уравнения Веселова–Новикова, а высшие уравнения иерархии Веселова–Новикова задают симметрии уравнения Цицейки. Это обсуждается в разделе 5.3.2.

В параграфе 4 мы указываем новый метод построения минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ с диагональной индуцированной метрикой.

Если на минимальном лагранжевом (**ML**-)торе в $\mathbb{C}P^2$ выбрать изотермические координаты с индуцированной метрикой $ds^2 = e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$, то функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Цицейки. Это уравнение допускает представление Лакса со спектральным параметром. Все **ML**-торы отвечают гладким периодическим решениям уравнения Цицейки (все такие решения выражаются через тэта-функции спектральных кривых).

С другой стороны теорема 5.2 показывает, что существуют примеры **ML**-торов в $\mathbb{C}P^2$, которые описываются в элементарных функциях, причем в соответствующих координатах индуцированная метрика имеет диагональный вид.

В этом параграфе мы строим **ML**-отображение плоскости в $\mathbb{C}P^2$ (с индуцированной диагональной метрикой) по спектральным данным, которые проще чем спектральные данные для решения уравнения Цицейки. А именно мы строим такое отображение по вещественной алгебраической кривой, которая допускает голоморфную инволюцию. В частности, мы не требуем чтобы спектральная кривая была тригональной (как для решений уравнения Цицейки).

Основное отличие нашего метода от метода работы [26] заключается в следующем. Мы не пользуемся представлением Лакса со спектральным параметром. Вместо этого мы, пользуясь методами главы 4, в явном виде строим отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^5 \subset \mathbb{C}^3,$$

которое удовлетворяет уравнениям

$$< \varphi, \varphi_x > = < \varphi, \varphi_y > = < \varphi_x, \varphi_y > = 0,$$

где $< .,. >$ — эрмитово произведение в $\mathbb{C}^3$. Композиция отображений $\varphi \circ \mathcal{H}$ дает лагранжево отображение плоскости в $\mathbb{C}P^2$. В теореме 5.10 мы указываем спектральные данные, отвечающие **ML**-отображениям плоскости в $\mathbb{C}P^2$.

В параграфе 5 мы даем описание одного класса минимальных и гамильтоново минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$

Автор выражает благодарность И. А. Тайманову за полезные обсуждения.

Литература

[1] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. London Math. Society. 1923. Ser. 2. V. 21. P. 420–440.

[2] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London 1928. Ser. A. V. 118. P. 557–583.

[3] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London 1931. Ser. A. V. 134. P. 471–485.

[4] И.М. Кричевер. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц. анализ. и его прилож. 1977. Т. 11. Вып. 1. С. 15–31.

[5] И.М. Кричевер. Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Функц. анализ. и его прилож. 1978. Т. 12. Вып. 4. С. 41–52.

[6] И.М. Кричевер., С.П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. Вып. 6. С. 47–68.

[7] О.И. Мохов. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения // Известия АН СССР. Серия матем. 1989. Т. 53. N. 6, 1989. С. 1291–1314.

[8] С.П. Новиков, П.Г. Гриневич. О спектральной теории коммутитующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функц. анализ. и его прилож. 1982. Т. 16. Вып. 1. С. 25–26.

[9] С.П. Новиков. Коммутирующие операторы ранга $l > 1$ с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1982. Т. 263. N. 6. С. 1311–1313.

[10] Ж. Диксмье. Об алгебрах Вейля // Математика. 1969. Т.13, N. 4. С. 16–44.

[11] П.Г. Гриневич. Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. Вып. 1. С. 19–24.

[12] И.М. Кричевер, С.П. Новиков. Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения // УМН. 2003. Т. 58. Вып. 3. С. 51–88.

[13] D. Mumford. An algebro-geometric construction of commuting operators and of solution to the Toda lattice equation, Kortweg-de Vries equation and related nonlinear equations // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store. 1978. P. 115–153.

[14] И.М. Кричевер. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН. 1978. Т. 33. N. 4. С. 215–216.

[15] A. Nakayashiki. Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.

[16] A. Nakayashiki. Structure of Baker–Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems // Duke Math. J. 1991. V. 62. N. 2. P. 315–358.

[17] А.Е. Миронов. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41, N 6. С. 1389-1403.

[18] А.Е. Миронов. Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журнал. 2002. Т. 43, N. 1. С. 126–143.

[19] M. Rothstein. Sheaves with connection on abelian varieties // Duke Math. J. 1996. V. 84. N. 3. P. 565–598.

[20] И.М. Кричевер. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31. N. 1. С. 32–50.

[21] V.E. Zakharov. Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equation // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139.

[22] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde. Topological strings in $d < 1$ // Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59–86.

[23] E. Witten. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity // Nucl. Phys B. 1990. V 340. P. 281–332.

[24] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories.Lecture Notes in Math. 1 V. 1620. Springer. Berlin. 1995. P. 120–348.

[25] B. Dubrovin. Integrable systems in topological field theory // Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.

[26] Р.А. Шарипов. Минимальные торы в пятимерной сфере // Теор. и мат. физ. 1991. Т. 87. N. 1. С. 48–56.

Работы автора по теме диссертации.

[27] А.Е. Миронов. Кольцо коммутативных дифференциальных операторов ранга 2 отвечающее кривой рода 2 // Матем. сборник. 2004. Т. 195. N. 5. С. 103–114.

[28] А.Е. Миронов. О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. 2009. Т.6. С. 533–536.

[29] А.Е. Миронов. Коммутативныые дифференциальные операторы ранга 2 отвечающие кривой рода 2 // Функц. анализ и его прилож. 2005. Т. 39. Вып. 3. С. 91–94.

[30] А.Е. Миронов. Коммутирующие разностные операторы с полиномиальными коэффициентами // УМН. 2007. Т. 63. вып. 4. С. 169–170.

[31] А.Е. Миронов. Дискретные аналоги операторов Диксмье // Матем. сборник. 2007. Т. 198. N. 10. С. 109–118.

[32] А.Е. Миронов. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям // Сиб. матем. журнал. 2002. Т. 43, N. 5. С. 1102–1114.

[33] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Труды матем. института РАН. 2006. Т. 255. С. 180–196.

[34] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. О некоторых алгебраических примерах фробениусовых многообразий // Теорет. и матем. физ. 2007. Т. 151. N. 2. С. 195–206.

[35] А.Е. Миронов. О новых примерах гамильтоново–минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Матем. сборник. 2004. Т. 195. N. 1. С. 89–102.

[36] А.Е. Миронов. О гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразиях в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Доклады РАН. 2004. Т. 396. N. 2. С. 159–161.

[37] А.Е. Миронов. О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$. // Сиб. матем. журнал. 2003. Т. 44, N.6. С. 1324–1328.

[38] А.Е. Миронов. Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ // Сибирские электронные математические известия. 2004. Т.1. С. 38–46.

[39] А.Е. Миронов. Связь между симметриями уравнения Цицейки и иерархией Веселова–Новикова // Матем. заметки. 2007. Т. 82. N. 4. С. 637–640.

[40] A.E. Mironov. Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$ // OCAMI (Osaka City University Advanced Mathematical Institute) Studies Series 2010. Vol. 3. P. 185–196.

[41] А.Е. Миронов. Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$ // Матем. заметки. 2007. Т. 81. N. 3. С. 374–384.

[42] A.E. Mironov, D. Zuo. On a Family of Conformally Flat Hamiltonian–Minimal Lagrangian Tori in $\mathbb{C}P^3$. // International Mathematics Research Notices 2008 (2008), rnm078, P. 1–13.

Миронов Андрей Евгеньевич

Коммутирующие дифференциальные операторы и их приложения в дифференциальной геометрии

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать ...	Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5.	Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6