*На правах рукописи*

Мещеряков Евгений Александрович

# ПОЛНЫЕ ПЛОСКИЕ СТРОГО ПРИЧИННЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Омск — 2008

Работа выполнена на кафедре моделирования сложных систем Омского филиала института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | кандидат физико-математических наук,<br>доцент *Гичев Виктор Матвеевич* |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>доцент *Никоноров Юрий Геннадьевич* |
| | кандидат физико-математических наук<br>*Базайкин Ярослав Владимирович* |
| Ведущая организация: | Московский государственный<br>университет им. М.В. Ломоносова |

Защита состоится 4 сентября 2008 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 4 августа 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Гутман А.Е.

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Полные плоские лоренцевы многообразия могут быть определены в терминах дифференциальной геометрии как геодезически полные лоренцевы многообразия с нулевыми кривизной и кручением. Все многообразия этого класса могут быть реализованы в виде $M = \mathbb{M}_n/\Gamma$, где $\mathbb{M}_n$ — $n$-мерное пространство-время Минковского и $\Gamma$ — дискретная подгруппа группы Пуанкаре $\mathcal{P}_n$, действующая свободно и собственно разрывно. В этом случае $\Gamma \cong \pi_1(M)$. Фиксируя начало координат $o$, можно отождествить $\mathbb{M}_n$ с набором $(V, \ell)$, где $V$ — вещественное векторное пространство, $\ell$ — лоренцева форма сигнатуры $(+, -, \dots, -)$.

Рассматриваемый класс многообразий лежит в пересечении двух довольно хорошо изученных областей геометрии: полных аффинных многообразий (см. обзоры Абеля[1] и Чаретти[2]) и структур причинности в лоренцевых многообразиях; главным стимулом к изучению последних является общая теория относительности (см. книги Бима[3] и Эллиса, Хокинга и Эрлиха [4]). К их общей части относятся некоторые работы хроногеометрической школы А.Д. Александрова (ссылки можно найти в статье Гуца[5]), а также статьи Барбо[6], Фрида[7], Гичева и Морозова[8].

Полные аффинные многообразия изучались в 60-х годах в связи с вопросом Ауслендера: верно ли, что фундаментальная группа полного плоского компактного аффинного многообразия является виртуально разрешимой? В общем случае вопрос остался без ответа, но при некоторых условиях на многообразия ответ положительный. Если $M$ неком-

[1]Abels H. Properly Discontinuous Groups of Affine Transformations // A Survey, Geometriae Dedicata, vol. 87, 2001, p. 309–333.

[2]Charette V., Drumm, T., Goldman, W. and Morill M. Complete Flat Affine and Lorentzian Manifolds // Geometriae Dedicata, vol. 97, 2003, p. 187-198.

[3]Beem, J.K. and Ehrlich, P.E. Global Lorentzian geometry
Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2nd ed., vol. 202, Marcel Dekker, New York, 1996.

[4]Ellis G. and Hawking S. The large scale structure of space–time // Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1, Cambridge University Press, London, New York, 1973.

[5]Guts A.K. Semigroups in foundations of geometry and axiomatic theory of space-time // in: Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis, (editors K.-H. Hofmann, J.D. Lawson, E.B. Vinberg), Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1995, p. 56-76.

[6]Barbot T. Globally hyperbolic flat space–times // Journal of Geometry and Physics №53, 2005, p. 123–165.

[7]Fried D. Flat Spacetimes // J. Diff. Geom., vol. 26, 1987, p. 385-396.

[8]Gichev V.M. and Morozov O.S. On Flat Complete Causal Lorentzian Manifolds // Geometriae Dedicata, vol. 116, 2005, p. 37-59.

пактно, то $\pi_1(M)$ может быть свободной неабелевой. Пример был построен Маргулисом[9].

В статье Гичева и Морозова были описаны, с точностью до конечных накрытий, полные плоские строго причинные лоренцевы многообразия. Точнее, в этой работе была дана конструкция группы $\Gamma$, позволяющая построить любое такое многообразия с точностью до конечного накрытия. Условимся для краткости называть полные плоские строго причинные лоренцевы многообразия с унипотентной группой голономии *унипотентными*. В той же работе было показано, что произвольное полное плоское строго причинное лоренцево многообразие, с точностью до конечных накрытий, представляет собой топологически тривиальное расслоение над унипотентным многообразием, слой которого — евклидово пространство (нетривиальность возникает уже на уровне аффинной структуры). Поэтому изучение унипотентных многообразий указанного класса представляет собой естественный следующий шаг.

## Цель работы

Цель работы состоит в описании полных плоских строго причинных унипотентных лоренцевых многообразий, их накрытий и вложений, а также в изучении причинной структуры таких многообразий. Кроме того, исследуется вопрос о возможности реализации такого многообразия в виде $H/\Gamma$, где $H$ — подгруппа группы Пуанкаре, действующая просто транзитивно на пространстве Минковского.

## Научная новизна

Основные результаты данной работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Показано, что полное плоское строго причинное лоренцево многообразие может быть реализовано с помощью предложенной в работе[10] конструкции (без использования конечных накрытий) тогда и только тогда, когда ее группа голономии унипотентна.

[9] Margulis G. Free properly discontinuous groups of affine transformations // Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 272, 1983, p. 937-940.

[10] Gichev V.M. and Morozov O.S. On Flat Complete Causal Lorentzian Manifolds // Geometriae Dedicata, vol. 116, 2005, p. 37-59.

2. Каждому такому многообразию сопоставлены сигнатура (четыре натуральных числа) и кривая в конусе положительно определенных матриц (парабола, которая может вырождаться в луч или точку). На этой основе получена частичная классификация таких многообразий (с точностью до почти причинной изометрии).

3. Описаны вложения и накрытия многообразий этого класса.

4. Исследованы причинные структуры в таких многообразиях, точнее, описаны существенные прошлое и будущее произвольной точки.

5. Охарактеризованы (в терминах инвариантов многообразия) полные плоские строго причинные лоренцевы многообразия, допускающие реализацию вида $H/\Gamma$, где $H$ — подгруппа группы Пуанкаре, действующая просто транзитивно на пространстве Минковского, а $\Gamma$ — ее дискретная подгруппа.

### Методы исследования

В диссертации используются различные методы геометрии. В четвёртой главе используется теория левосимметричных алгебр.

### Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретических характер. Её результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях лоренцевых многообразий.

### Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на заседании кафедры математического анализа ИМИТ ОмГУ им Ф.М. Достоевского;

- на семинаре отдела анализа и геометрии под руководством академика
Ю.Г.Решетняка, ИМ СО РАН г. Новосибирск;

- на семинаре лаборатории МСС ОФИМ СО РАН;

- на 38-ая Региональная молодежная конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики Екатеринбург, УрО РАН; 2007.

- на международной конференции "Математика в современном мире 17–23 сентября 2007, Новосибирск.

### Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приводится в конце автореферата.

### Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 4-х глав и списка литературы (32 наименования). Общий объем диссертации составляет 115 страниц.

## Краткое содержание работы

Во **введении** кратко изложены история вопроса и содержание диссертации.

**Первая глава** содержит определения и предварительные сведения по строению полных плоских строго причинных лоренцевых многообразий.

**Вторая глава** посвящена геометрии таких многообразий. В ней приводится конструкция, по которой могут быть построены все унипотентные (т.е. с унипотентной группой голономии) полные плоские строго причинные лоренцевы многообразия, а также дается частичная их классификация. Кроме того, описываются накрытия и вложения многообразий рассматриваемого класса.

**Геометрия**

Полное плоское лоренцево многообразие может быть реализовано как фактор-пространство $\mathbb{M}_n/\Gamma$, где $\mathbb{M}_n$ — $n$-мерное пространство Минковского, а $\Gamma$ — подгруппа группы Пуанкаре $\mathcal{P}_n$, действующая свободно и собственно разрывно. Следующая конструкция была предложена в уже упомянутой работе Гичева и Морозова.

Выбор некоторой точки $o \in \mathbb{M}_n$ позволяет отождествить $\mathbb{M}_n$ с вещественным векторным пространством $V$, на котором задана лоренцева форма $\ell$ сигнатуры $(+, -, \dots, -)$. Неравенство $\ell(v, v) \geq 0$ задает пару замкнутых выпуклых круглых конусов в $V$. Пусть $C$ — один из них.

Группа $\Gamma$ действует в $V$ свободно и собственно разрывно аффинными преобразованиями, линейные части которых сохраняют $\ell$ и $C$. Через $\kappa$ обозначим отображение факторизации $V \to V/\Gamma$.

Пусть $v_0, v_1 \in \partial C$ удовлетворяют условию $\ell(v_0, v_1) = 1$. Положим

$$L = \mathbb{R}v_0, \quad W = L^{\perp}, \quad N = W \cap v_1^{\perp}; \tag{1}$$
$$l_0(v) = \ell(v, v_0).$$

Пусть $T$ — линейное подпространство $N$. Пусть $\Gamma$ — решетка в $T$ и $a$ — $\ell$-симметричное линейное отображение:

$$a : T \to N,$$
$$\ell(ax, y) = \ell(x, ay), \quad x, y \in T. \tag{2}$$

Определим линейное отображение $\lambda(x) : V \to V$, где $x \in T$, а также аффинное действие $\gamma$ векторной группы $T$ в $V$ формулами

$$\lambda(x)v = v + l_0(v)ax - \big(\ell(v, ax) + \tfrac{1}{2}\, l_0(v)\ell(ax, ax)\big)\, v_0, \tag{3}$$
$$\tau(x) = x - \tfrac{1}{2}\, \ell(ax, x)v_0, \tag{4}$$
$$\gamma_x(v) = \lambda(x)v + \tau(x). \tag{5}$$

Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы действие $T$ было свободным, а действие $\Gamma$ — свободным и собственно разрывным:

$$\ker(I + sa) = 0 \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где $I$ — тождественное отображение.

**Теорема 2.1.** *Плоское полное строго причинное лоренцево многообразие допускает реализацию из основной конструкции тогда и только тогда, когда ее группа голономии унипотентна.*

Любое $\ell$-симметричное отображение $T \to N$ имеет очевидную структуру: если $a$ удовлетворяет $\ell(ax, y) = \ell(x, ay)$ для всех $x, y \in T$, то существует единственное разложение

$$a = a' + a'', \tag{7}$$

где $a' : T \to T$ — самосопряженное преобразование $T$, соответствующее симметрической билинейной форме $\ell(ax, y)$ относительно отрицательно определенной на $T$ формы $\ell(x, x)$:

$$\ell(ax, y) = \ell(a'x, y) = \ell(x, a'y), \quad x, y \in T,$$

$a''$ — произвольное линейное отображение

$$a'' : T \to T^{\perp} \cap N.$$

Положим $R = a''T$.

Для любых $p \in M$ и $x \in \pi_1(M,p)$ существует единственная реализация петли в виде отрезка прямой линии в $M$. Положим

$$q_v(x) = -\ell(\gamma_x(v) - v, \gamma_x(v) - v). \tag{8}$$

Это функция на группе $\pi_1(M,p) = \Gamma$. Подставляя (3) и (4) в (8), прямыми вычислениями получаем:

$$q_v(x) = q_s(x) = -\ell((\mathbf{1} + sa)x, (\mathbf{1} + sa)x), \quad \text{где} \quad s = l_0(v). \tag{9}$$

Таким образом, $\{q_v : v \in V\}$ — однопараметрическое семейство квадратичных форм на $T$. Так как $\ell$ отрицательно определена на $T$, то все формы $q_s$ положительно определены на $T$ благодаря (6). Это задает кривую в конусе положительно определенных квадратичных форм на $T$, параметризованную $s = l_0(v)$. Согласно (8) и (9), перенос начала координат в точку $\tilde{o}$ влечет сдвиг параметра:

$$s \to s - s_0, \quad s_0 = l_0(\tilde{o}). \tag{10}$$

Замена $v_0, v_1$ на $tv_0, v_1/t$ (соответственно) при любом $t > 0$ приводит к тем же формулам с $tl_0, a/t$ вместо $l_0, a$. Это соответствует замене

$$s \to ts \tag{11}$$

параметра $s$. Если $t < 0$, то время обращается. Поэтому мы будем рассматривать кривую $s \to q_s$ с точностью до сохраняющей ориентацию аффинной замены переменной $s$.

Фиксируем отождествление $\widehat{\Gamma} = \mathbb{R}^m$ и $\Gamma = \mathbb{Z}^m$. Точнее, выберем линейный изоморфизм $\iota : \mathbb{R}^m \to T$ такой, что $\iota\,\mathbb{Z}^m = \Gamma$. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Согласно (9), форма $q_s$ квадратична по $s$. Записывая стандартным образом отвечающую ей форму на $\mathbb{R}^m$, получаем

$$q_s(x) = \big\langle (A + 2sB + s^2C)z, z \big\rangle \quad \text{для всех } z \in \mathbb{R}^m, \quad \text{где } x = \iota\, z \in T \tag{12}$$

и $A, B, C$ — некоторые симметрические $m$-матрицы. Условимся записывать условие положительной определенности матрицы $S$ неравенством $S > 0$, причем $S \geq 0$ будет означать неотрицательную определенность $S$. Обозначим через $P_m$ множество положительных матриц размера $m$. Это однородное пространство группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, действующей в $P_m$ по правилу

$$S \to X^\top S X, \quad X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}),$$

где $^\top$ обозначает операцию транспонирования. Инволюция $S \to S^{-1}$ определяет в $P_m$ структуру симметрического пространства. Условие

$$Q(s) = A + 2sB + s^2 C > 0 \quad \text{для всех } s \in \mathbb{R} \tag{13}$$

необходимо (но не достаточно) для того, чтобы матричный квадратичный полином $Q$ удовлетворял (12). Из него следует, что $A > 0$, $C \geq 0$ (отметим, что $B = C = 0$, если $a = 0$) Поскольку любая пара квадратичных параметризаций параболы связана аффинной заменой переменной, тем самым мы получаем геометрический объект — *характеристическую кривую* $M$.

Линейная замена переменной $z \in \mathbb{R}^m$, заданная вещественной $m$-матрицей $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, индуцирует ее перемещение в симметрическом пространстве $P_m$:

$$Q(s) \to X^\top Q(s) X. \tag{14}$$

Будем называть $Q(s)$ *характеристическим полиномом* $M$ и обозначать через $Q_M$, считая его определенным с точностью до аффинной замены переменной $s$. Будем говорить, что многообразия $M = V/\Gamma$ и $\tilde{M} = V/\tilde{\Gamma}$ *почти изометричны*, если $M/\widehat{\Gamma}$ и $\tilde{M}/\widehat{\tilde{\Gamma}}$ изометричны. Положим

$$\begin{gathered} n = \dim M, \quad m = \dim T, \quad r = \dim R, \\ k = \dim \ker a. \end{gathered} \tag{15}$$

Набор $(n, m, r, k)$ будем называть *сигнатурой* $M$. Можно показать, что сигнатура не зависит от реализации $M$ в форме (1)–(4). Очевидно, эти числа удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} m + r + 2 \leq n, \\ r + k \leq m. \end{gathered}$$

Следующая теорема показывает, что полное плоское строго причинное унипотентное многообразие, с точностью до причинной изометрии, определяется своей сигнатурой и характеристической параболой.

**Теорема 2.2.** *Многообразия $M$ и $\tilde{M}$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.2, причинно изометричны тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают и*

$$Q_M(s) = X^\top Q_{\tilde{M}}(\alpha s + \beta) X \tag{16}$$

*для некоторых $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.*

Замена включения $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ на включение $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ дает критерий почти причинной изометричности многообразий рассматриваемого класса.

Следующий этап — описание квадратичных полиномов, которые задают характеристическую параболу некоторого многообразия. Это проделано за два шага: сначала проблема сводится к случаю сигнатуры вида $(n, m, r, 0)$, а потом дается ответ на поставленный вопрос для этой сигнатуры.

**Предложение 2.3.** *Пусть многообразие $M$ имеет сигнатуру $(n, m, r, k)$. Предположим, что $k > 0$. Тогда матрицу $Q_M$ можно преобразованием вида (14) сделать блочно-диагональной с блоками размеров $k \times k$ и $(m-k) \times (m-k)$, где $k$-блок не зависит от $s$, а $(m-k)$-блок является характеристическим полиномом для многообразия $\tilde{M}$ сигнатуры $(n-k, m-k, r, 0)$; при этом $M$ почти причинно изометрично произведению $\tilde{M}$ и плоского $k$-тора. Кроме того,*

$$m - k = \operatorname{rank} C. \tag{17}$$

**Теорема 2.4.** *Полином $Q(s)$ из (13) задает характеристическую кривую некоторого полного плоского строго причинного лоренцева многообразия $M$ сигнатуры $(n, m, r, 0)$ тогда и только тогда, когда $n \geq m + r + 2$, выполняется (13) и*

$$C - BA^{-1}B \geq 0, \tag{18}$$

$$r = \operatorname{rank}(C - BA^{-1}B). \tag{19}$$

*Если $m = r$, то (13) можно заменить более слабым условием $A > 0$.*

В силу теоремы 2.2, многообразие однозначно определяется сигнатурой и характеристической кривой. Поэтому мы будем классифицировать характеристические кривые, а точнее, квадратичные полиномы, удовлетворяющие условиям (13), (18) и (19), согласно теореме 2.4. Мы опишем квадратичные полиномы с точностью до сопряжения матрицами из $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, что соответствует описанию многообразий рассматриваемого класса с точностью до почти причинной изометрии. Это описание, в частности, позволяет найти размерность пространства модулей многообразий с фиксированной сигнатурой $\sigma$. Обозначим последнее через $\mathcal{M}_\sigma$.

**Теорема 2.5.** *Пусть* $\sigma = (n, m, r, 0)$, $n = m + r + 2$, $r > 0$, *матрица* $B$ *имеет вид* $\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_m)$, *где* $0 = b_1 \leq \cdots \leq b_m = 1$ *(если* $m = 1$, *то* $b_1 = 0$*), а* $F$ *неотрицательна, положительно определена на любом собственном подпространстве* $B$ *и* $\mathrm{rank}\, F = r$. *Каждой такой паре* $(F, B)$ *соответствует единственное (с точностью до почти причинной изометрии) многообразие* $M$ *сигнатуры* $\sigma$, *имеющее характеристический многочлен*

$$Q_M(s) = (B^2 + F)s^2 + 2sB + I. \tag{20}$$

*На плотном открытом подмножестве множества пар таких матриц одному и тому же многообразию отвечает лишь конечное число (не более* $2^n$*) многочленов вида (20). В частности,*

$$\dim \mathcal{M}_\sigma = mr - \frac{r(r-1)}{2} + m - 2. \tag{21}$$

## Накрытия и вложения

Поскольку рассматриваемые нами многообразия имеет естественную аффинную структуру, мы будем рассматривать только аффинные накрытия и вложения. Кроме того, для каждой точки определен конус будущего (и, тем самым, ее будущее). Требование, чтобы при накрытиях (вложениях) будущее сохранялось, приводит к необходимости рассмотрения локально конформных накрытий и вложений. Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.7.** *Любое локально конформное накрытие $\nu : M_1 \to M_2$ полных плоских строго причинных лоренцевых многообразий локально гомотетично.*

**Теорема 2.10.** *Любое конформное вложение $\nu : M_1 \to M_2$ полных плоских строго причинных лоренцевых многообразий гомотетично.*

Очевидно, что любое гомотетичное накрытие (вложение) можно представить в виде композиции изометричного накрытия (вложения) и гомотетии. Поэтому задача описания аффинных локально конформных накрытий (вложений) сводится, с помощью теорем 2.7 и 2.10, к задаче описания локально изометричных накрытий (вложений).

**Теорема 2.8.** *Пусть $\nu : M' \to M$ — локально изометрическое накрытие полных плоских лоренцевых строго причинных многообразий. Если $M = M(\Gamma) = V/\Gamma$, то существует подгруппа $\Gamma' \subseteq \Gamma$ такая, что $M'$ изометрично $M(\Gamma') = V/\Gamma'$.*

**Следствие 2.3.** *Если существует локально изометрическое конечнолистное накрытие $M_1 \to M_2$, то $M_1$ и $M_2$ почти причинно изометричны.*

**Теорема 2.11.** *Пусть $M = M(v_0, v_1, T, a, \Gamma, \ell) = V/\Gamma$, а $\nu : M' \to M$ — гомотетичное вложение в $M$ полного плоского строго причинного лоренцева многообразия $M'$. Тогда $M'$ может быть реализовано в виде*

$$M' = M\left(v_0, \tfrac{1}{c}v_1 + v' - \tfrac{c}{2}\ell(v', v')v_0, T', \tfrac{1}{c}a|_{T'}, \Gamma', c\ell|_{V'}\right) = V'/\Gamma',$$

*где $c$ — коэффициент гомотетии, $\Gamma'$ — подгруппа в $\Gamma$, $T'$ — алгебраическое замыкание $\Gamma'$, $v' \in (T' + aT')^{\perp}$ и $V'$ подпространство $V$ такое, что $\mathbb{R}v_0, \mathbb{R}(\tfrac{1}{c}v_1 + v'), T'$, $aT' \subset V'$.*

Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. выбор произвольной подгруппы $\Gamma'$ группы $\Gamma$ и подпространства $V'$, с соблюдением всех условий теоремы, не гарантирует, что естественное отображение $V'/\Gamma' \to V/\Gamma$, будет вложением (не всегда есть взаимная однозначность).

**Третья глава** посвящена описанию причинных структур на полных плоских строго причинных лоренцевых многообразиях. Задать причинную структуру — значит определить для каждой точки ее прошлое и будущее.

**Определение 1.2.** Множества

$$P_p = \kappa(v - C), \quad F_p = \kappa(v + C), \qquad \text{где} \quad v \in \kappa^{-1}(p),$$

будем называть *прошлым* и *будущим* (соответственно) точки $p \in M$.

Очевидно, $P_p$ и $F_p$ не зависят от выбора точки $v \in \kappa^{-1}(p)$. Дифференциал $\kappa$ проектирует на многообразие $M$ поле параллельных конусов в $\mathbb{M}_n$:

$$C_p = d_v\kappa(v + C) \subset T_pM, \quad v \in \kappa^{-1}(p).$$

Мы опишем некоторые свойства причинной структуры, в частности, дадим ответ на вопрос: когда точка многообразия имеет замкнутое прошлое или будущее?

Обозначим через $\widehat{\Gamma}$ алгебраическое замыкание группы $\Gamma$. Согласно предложению 2.9, группа $\widehat{\Gamma}$ изоморфна векторной группе $T$. Через $\widehat{M}$ обозначим многообразие $V/T$. Теорема 1.2 позволяет рассматривать многообразие $M = V/\Gamma$, $V \cong \mathbb{R}^n$ и $\Gamma \cong \pi_1(M)$ как расслоение над векторным пространством $\widehat{M}$ со слоем $T/\Gamma$. Обозначим через $\pi$ естественную проекцию $\pi : V/\Gamma \to V/T$.

**Определение 3.1.** Множества, определенные равенствами

$$\widehat{F}_p = \pi(F_q), \quad \widehat{P}_p = \pi(P_q) \quad \text{где} \quad \pi(q) = p,$$

будем называть *существенным будущим* (соответственно, *прошлым*) точки $p \in V/T$.

Как правило, из текста ясно, рассматриваем ли мы тотальное пространство
$M = V/\Gamma$ или базу расслоения $\widehat{M} = V/T$. Поэтому обычно мы будем

опускать крышку в обозначениях существенных прошлого или будущего.

Будем считать, что многообразие $M = M(v_0, v_1, T, a, \Gamma)$ имеет сигнатуру $(n, m, r, k)$. Выберем в пространстве $V$ базис $e_0, \dots, e_{n-1}$ так, что $v_0 = e_0$, $v_1 = e_{n-1}$ и лоренцева форма $\ell$ имеет вид:

$$\ell(u, u) = 2u_0 u_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} u_i^2,$$

где $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$. Кроме того, мы можем считать, что $T$ — линейная оболочка векторов $e_1, \dots, e_m$ и что $R$ — линейная оболочка векторов $e_{m+1}, \dots, e_{m+k}$. Конус будущего в точке $v \in V$ — один из двух конусов, заданных неравенством $\ell(v - u, v - u) \geq 0$. Гиперплоскость $u_{n-1} = v_{n-1}$ разделяет два конуса. Будем считать, что конус будущего $C$ равен замыканию в $V$ множества $\{u \in V : \ell(u - v, u - v) \geq 0, u_{n-1} > v_{n-1}\}$.

Следующее предложение следует непосредственно из определений существенных будущего и прошлого.

**Предложение 3.1.** *Точка $p \in M(\widehat{M})$ принадлежит будущему (существенному будущему) точки $q$ тогда и только тогда, когда существует $x \in \Gamma$ (соответственно, $T$) такое, что $\gamma_x(v) \in u + C$, где $\kappa(v) = p$, $\kappa(u) = q$ (соответственно $(\pi \circ \kappa)(v) = p$, $(\pi \circ \kappa)(u) = q$).*

Определим подмножества в $V$:

$$F_u = \kappa^{-1}(F_q), \quad \widehat{F}_u = (\pi \circ \kappa)^{-1}(\widehat{F}_q).$$

Предложение 3.1 позволяет рассматривать (существенное) будущее не в многообразии $M$ ($\widehat{M}$), а в пространстве $V$. Очевидно, будущее (существенное будущее) точки $u$ в пространстве $V$ — это $\Gamma$-орбита (соответственно, $T$-орбита) конуса будущего с вершиной в точке $u \in V$.

Группа $T$ сохраняет гиперплоскости

$$W_s = \{v \in V : \quad \ell_0(v) = v_{n-1} = s\}.$$

Точка $v$ принадлежит (существенному) будущему точки $u$ тогда и только тогда, когда $v \in F_u \cap W_{v_3}$. Поэтому описание (существенного) будущего точки $u$ сводится к описанию пересечений $F_u \cap W_s$.

**Замечание.** Условия вырождения характеристической кривой могут быть представлены следующим образом:

$$C > 0, \quad B = 0: \quad \text{характеристическая кривая — луч;}$$
$$C = 0, \quad B = 0: \quad \text{характеристическая кривая — точка.}$$

Случай $C = 0$, $B \neq 0$ невозможен, так как $Q_M(s) > 0$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

**Теорема 3.1.** *Если характеристическая кривая многообразия $M$ не точка, то существует такое $\xi_M \leq 0$, что для всех точек $u$, из условия $l_0(u) > \xi_M$ ($l_0(u) < 0$) следует незамкнутость будущего (соответственно, прошлого).*

*Для всех точек $u$ таких, что $l_0(u) \geq 0$ ($l_0(u) \leq \xi_M$) существенное будущее (соответственно, прошлое) замкнуто.*

*Если характеристическая кривая не вырождена, то $\xi_M < 0$; если она луч, то $\xi_M = 0$.*

В частности, для четырехмерного многообразия характеристическая кривая может быть лишь лучом или точкой (последнее соответствует эллиптическому случаю). Поэтому в неэллиптическом полном плоском строго причинном унипотентном многообразии всегда существует гиперплоскость $W_0$, характеризующаяся следующим свойством: точка имеет замкнутые прошлое и будущее.

В **четвертой главе** дается ответ на вопрос: когда полное плоское строго причинное лоренцево многообразие $M$ может быть реализовано в виде $G/\Gamma$, где $G$ — просто транзитивная группа автоморфизмов $\mathbb{M}_n$, а $\Gamma$ — ее дискретная подгруппа? Ответ довольно прост: если $(n, m, r, k)$ — сигнатура многообразия $M$, то реализация $M$ в указанном виде возможна тогда и только тогда, когда $m = r+k$. Вопрос сводится к следующему: когда группу $\Gamma$ можно вложить в унипотентную просто транзитивную группу автоморфизмов $\mathbb{M}_n$? Для этого необходимо описание унипотентных просто транзитивных действий на пространстве $\mathbb{M}_n$.

## Унипотентные просто транзитивные действия на пространствах Минковского

Все просто транзитивные группы Ли автоморфизмов $\mathbb{M}_4$ были описаны в работе Фрида[11].Мы дадим описание просто транзитивных действий

[11] Fried D. Flat Spacetimes // J. Diff. Geom., vol. 26, 1987, p. 385-396.

нильпотентных групп Ли на пространствах Минковского всех размерностей[12], что позволит ответить на последний вопрос.

К изучению локально просто транзитивных аффинных действий приспособлен аппарат левосимметричных алгебр.

**Определение 1.13.** Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *левосимметричной*, если для всех
$x, y, z \in \mathfrak{g}$ выполняется соотношение

$$(x, y, z) = (y, x, z), \tag{22}$$

где $(x, y, z)$ обозначает ассоциатор элементов $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

Из (22) следует, что для коммутатора $[x, y] = xy - yx$ выполняются аксиомы алгебры Ли, т.е. $\mathfrak{g}$ *Ли-допустима.* Будем обозначать эту алгебру Ли так же, как и левосимметричную алгебру, при необходимости уточняя, о чем идет речь. Левосимметричные алгебры соответствуют локально просто транзитивным аффинным действиям связных групп Ли. Каждому такому действию отвечает реализация соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ аффинными векторными полями

$$F_x(y) = xy + x,$$

где произведение в первом слагаемом берется в левосимметричной алгебре. Условие (22) равносильно тому, что семейство полей $\{F_x : x \in \mathfrak{g}\}$ образует алгебру Ли относительно обычной скобки Ли (поэтому последнее можно считать еще одним определением левосимметричной алгебры). Орбита нуля под действием соответствующей группы $G$ (т.е. отвечающей $\mathfrak{g}$ связной подгруппы группы Ли $\mathrm{Aff}(\mathfrak{g})$ аффинных преобразований $\mathfrak{g}$), очевидно, открыта в $\mathfrak{g}$, а стабилизатор дискретен. Геодезическая полнота орбиты как многообразия с индуцированной $\mathfrak{g}$ аффинной структурой, очевидно, равносильна глобальной транзитивности действия.

**Определение 1.14.** Будем говорить, что левосимметричная алгебра $\mathfrak{g}$ *полна*, если группа Ли $G$ действует транзитивно на $\mathfrak{g}$.

[12] После того, как это описание было получено, автору стало известно о работе Guediri M. Compact flat spacetimes // Differential Geometry and its Applications, vol. 21, Issue 3, 2004, p 283-295., в которой другими методами были получены близкие результаты, в частности, теорема 4.2 и, в других терминах, предложение 4.2.

Так как $\mathfrak{g}$ односвязна, то в этом случае $G$ односвязна и стабилизатор тривиален, т.е. действие свободно. Условие изометричности действия относительно симметричной билинейной формы $\ell$ дает дополнительное ограничение: операторы левого умножения должны быть $\ell$-кососимметричными.

**Определение 1.15.** Будем называть *$\ell$-алгеброй* левосимметричную алгебру, в которой все операторы левого умножения кососимметричны относительно $\ell$.

**Определение 1.16.** Будем называть левосимметричную алгебру $\mathfrak{g}$ *нильпотентной*, если в $\mathfrak{g}$ есть базис, в котором все операторы $L(x)$, $x \in \mathfrak{g}$, строго верхнетреугольны; условимся называть $\mathfrak{g}$ *абелевой*, если $L = 0$.

Левосимметричные нильпотентные $\ell$-алгебры находятся во взаимно однозначном соответствии с унипотентными просто транзитивными действиями на пространствах Минковского.

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественное векторное пространство, в котором задана лоренцева форма $\ell$ сигнатуры $(+, -, \ldots, -)$.

1. Фиксируем изотропный вектор $v_0 \in \mathfrak{g}$ и вектор $v_1 \in \mathfrak{g}$ такие, что $\ell(v_0, v_1) = 1$. Обозначим
$$\mathfrak{h} = (\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1)^{\perp}, \quad \lambda(x) = \ell(v_0, x).$$
Из выбора $v_0$ и $v_1$ следует, что $\ell$ отрицательно определена на $\mathfrak{h}$.

2. Выберем любой вектор $v_2 \in \mathfrak{h}$ и произвольный линейный оператор $\tilde{\rho} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ такой, что $\tilde{\rho}^2 = 0$. Пусть $\pi$ — ортогональный проектор на $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ (он определен корректно, так как $\ell$ невырождена на $\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1$). Определим оператор $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ так:
$$\rho x = \tilde{\rho}\pi x + \lambda(x)v_2.$$

3. Зададим умножение в $\mathfrak{g}$ формулой: $xy = \lambda(y)\rho x - \ell(\rho x, y)v_0$.

**Теорема 4.1.** *Все алгебры, заданные приведенной выше конструкцией, являются полными нильпотентными левосимметричными $\ell$-алгебрами. Любая нильпотентная левосимметричная $\ell$-алгебра полна и может быть построена с помощью этой конструкции.*

### Полные плоские строго причинные унипотентные лоренцевы многообразия вида $G/\Gamma$

Пусть $M = V/\Gamma$ — полное плоское строго причинное лоренцево многообразие. Группа $\Gamma$ унипотентна. Вопрос о представлении $M$ в виде $G/\Gamma$ очевидным образом сводится к вопросу о вложимости $\Gamma$ в какую-нибудь просто транзитивно и аффинно действующую на $V$ группу $G$ — подгруппу группы Паункаре. Можно считать, что $G$ — унипотентная алгебраически замкнутая группа. Описание полных нильпотентных левосимметричных $\ell$-алгебр (теорема 4.1) позволяет найти все унипотентные просто транзитивные на пространствах Минковского группы Ли $G$; зная их, можно ответить на вопрос о возможности вложения $\Gamma$ в какую-нибудь просто транзитивную группы Ли.

**Теорема 4.4.** *Полное плоское строго причинное унипотентное лоренцево многообразие $M$ сигнатуры $(n, m, r, k)$, может быть реализовано в виде $G/\Gamma$ тогда и только тогда, когда $m = r + k$.*

## Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю Гичеву Виктору Матвеевичу за постановку задач, а также постоянные интерес и внимание к работе.

## Работы автора по теме диссертации


[1] Мещеряков Е.А. Классификация плоских полных строго причинных лоренцевых многообразий // Вестн. Ом. ун-та., №3, 2007, с. 6–9.

[2] Мещеряков Е.А. Накрытия полных плоских строго причинных лренцевых многообразий // Вестн. Ом. ун-та., №2, 2008, с. 11–16.

[3] Мещеряков Е.А. О плоских полных строго причинных лоренцевых многообразиях // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007, ISBN 5-7691-1490-8. С. 50–54.

[4] Гичев В.М. и Мещеряков Е.А. О геометрии плоских полных лоренцевых строго причинных многообразий // Сиб. матем. журнал, т. 48, №1, 2007, с. 75–88. (Мещерякову Е.А. принадлежит половина результатов).


Результаты разделов 2.2, 2.3 и 4.1 получены совместно с В.М. Гичевым при равном вкладе участников.