На правах рукописи

Матвиенко Иван Викторович

Римановы метрики положительной кривизны Риччи на многообразиях с торическими действиями

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена на кафедре геометрии и топологии
Новосибирского государственного университета

Научный руководитель:	д. ф.-м. н. **Базайкин Ярослав Владимирович**
Официальные оппоненты:	д. ф.-м. н., профессор **Медных Александр Дмитриевич**, д. ф.-м. н., профессор **Панов Тарас Евгеньевич**
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 12 мая 2011 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 12 апреля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Одной из важных и интересных проблем римановой геометрии является задача о связи свойств кривизны и топологического строения риманова многообразия. Ставший классическим вопрос о топологии римановых многообразий положительной секционной кривизны, как показывает опыт, является весьма сложным; гораздо более слабое свойство положительной скалярной кривизны практически не доставляет геометрических ограничений. Промежуточный вопрос о многообразиях положительной кривизны Риччи представляется в этом свете весьма правильно поставленным: с одной стороны, это свойство значительно слабее свойства положительности секционной кривизны, и известны серии примеров; с другой стороны примеров не так уж много и задача представляется нетривиальной.

Классическими примерами многообразий положительной кривизны Риччи являются нормально однородные пространства с конечной фундаментальной группой и их римановы произведения, например S^n, $\mathbb{C}P^n$, $S^n \times S^m$.

Более сложные топологические типы впервые были сконструированы Дж. Ша и Д. Янгом [10] в 1991 г. Они построили метрику положительной кривизны Риччи на связных суммах любого числа $S^n \times S^m$ при фиксированных n, m:

$$\# \, k \, S^n \times S^m \quad \forall k \geq 1 \; \forall n, m \geq 2.$$

Этот результат показал неограниченность чисел Бетти многообразий положительной кривизны Риччи при фиксированной размерности (что находится в контрасте с положительной секционной кривизной).

Подход Дж. Ша и Д. Янга оказался продуктивным. Д. Рейт [12] в 2007 г. обобщил их результат для связных сумм произвольных $S^{n_i} \times S^{m_i}$:

$$\#_{i=1}^{k} S^{n_i} \times S^{m_i} \quad \forall k \geq 1 \;\; \forall n_i, m_i \geq 2, \; n_i + m_i = const.$$

В основе обеих работ лежит метод хирургии с сохранением положительности кривизны Риччи.

На связных суммах двух комплексных проективных пространств:

$$\mathbb{C}P^n \# \pm \mathbb{C}P^n$$

известна метрика Чигера [4] неотрицательной секционной кривизны, для которой, как очевидно, кривизна Риччи является положительной.

Метрики положительной кривизны Риччи на связных суммах произвольного числа комплексных проективных пространств известны лишь в размерности четыре. Дж. Ша и Д. Янг [11] в 1993 г. показали, что связные суммы $\mathbb{C}P^2$ и $\overline{\mathbb{C}P}^2$:

$$k\,\mathbb{C}P^2 \# \, l\,\overline{\mathbb{C}P}^2 \ \ \forall k, l \geq 0$$

обладают метриками положительной кривизны Риччи. Чуть позже, в 1997 г. Г. Перельман [9] частично повторил этот результат, построив метрики на связной сумме одинаково ориентированных проективных пространств:

$$\# \, k\,\mathbb{C}P^2 \ \ \forall k \geq 1.$$

Все вышеупомянутые примеры в четной размерности 2n допускают действие компактного тора $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$. В связи с этим возникает вопрос о существовании метрик положительной кривизны Риччи в более общих классах многообразий с действием T^n.

Основное внимание в работе уделяется в квазиторическим и момент-угол многообразиям. Эти два класса многообразий впервые были введены М. Дэвисом и Т. Янушкиевичем в [5] в 1991 г. Их топология тесно связана с комбинаторикой выпуклых многогранников. До сих пор они изучались в основном с точки зрения алгебраической топологии. В этом свете изучение свойств кривизны квазиторических и момент-угол многообразий представляет весьма интересным.

Цель работы.

Целью настоящей работы состоит в построении новых примеров римановых многообразий положительной кривизны Риччи. А именно, в основную задачу работы входит поиск римановых метрик положительной кривизны Риччи на некоторых квазиторических и момент-угол многообразиях.

Объект исследований.

Объектом исследований настоящей диссертации являются квазиторические и момент-угол многообразия, снабженные римановыми метриками. Топология этих пространств тесно связана с комбинаторикой выпуклых полиэдров. Оба класса многообразий допускают действие компактного тора T^n, факторпространство по которому является простым многогранником.

Методы исследований.

Получение основных результатов опирается на методы дифференциальной и алгебраической геометрии, в частности, теории римановых субмерсий, теории раздутий орбифолдных особенностей и теории торических многообразий.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии построена риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой тор T^2 действует изометриями.

2. Построены римановы метрики положительной кривизны Риччи на некоторых момент-угол многообразиях, отвечающих многогранникам, которые получаются из трёхмерного куба срезанием непересекающихся наборов вершин и рёбер. В частности, построен пример неформального момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи.

Отметим, что односвязные четырехмерные T^2-многообразия в точности являются четырехмерными квазиточескими многообразиями.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами по дифференциальной геометрии и интересны специалистам, занимающимся положительной кривизной Риччи, квазиторическими и момент-угол многообразиями.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на международных и российских конференциях:

- «Современные проблемы анализа и геометрии» (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, сентябрь 2009),

- «Топоноговские чтения» (Институт математики им. С. Л.Соболева СО РАН, март 2010).

Кроме того, результаты докладывались на следующих семинарах:

- «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством С. П. Новикова, В. М. Бухштабера (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова),
- «Геометрия, топология и их приложения» под руководством И. А. Тайманова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН),
- «Риманова геометрия» под руководством И. А. Тайманова, Я. В. Базайкина (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН),
- «Интегрируемые системы» под руководством А. Е. Миронова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН).

Публикации.
Результаты диссертации изложены в трёх работах автора [13, 14, 15], которые приведены в конце автореферата.

Структура и объём работы.
Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 25 наименований. Общий объём диссертации составляет 59 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты и даётся краткий обзор исследований по теме диссертации.

Первая глава содержит определения и понятия, необходимые в дальнейшем. Значительное внимание уделяется квазиторическим и момент-угол многообразиям, их взаимосвязи и базовым фактам о геометрии пространств. Кроме того, вводятся квазиторические орбифолды как многообразия с особенностями, которые появляются в качестве естественного обобщения для квазиторических многообразий. В конце главы приведены некоторые факты римановой геометрии и элементы теории римановых субмерсий, в частности приведены формулы О'Нила для кривизны, которые используются в дальнейшем как инструмент при построении метрик положительной кривизны Риччи.

Введём определение квазиторического многообразия. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных понятий.

Представление тора T^n диагональными матрицами из $U(n)$ мы будем называть стандартным действием на $\mathbb{C}^n$. Пространством орбит стандартного действия является положительный конус $\mathbb{R}^n_+$. Каноническая проекция

$$\mathbb{R}^n_+ \times T^n \to \mathbb{C}^n : (x_1, \ldots, x_n) \times (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (x_1 t_1, \ldots, x_n t_n)$$

отождествляет $\mathbb{C}^n$ с факторпространством $(\mathbb{R}^n_+ \times T^n)/\sim$. Это факторпространство служит «локальной моделью» для квазиторических многообразий.

Многообразие M размерности $2n$ с заданным действием n-мерного тора будем называть *T^n-многообразием.* Карту U для T^n-многообразия, инвариантную относительно действия тора, будем считать *стандартной*, если U эквивариатно гомеоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием тора. Скажем, что действие тора T^n на M является *локально стандартным*, если M допускает атлас из стандартных карт.

Многообразием с углами назовём гладкое многообразие с краем, которое локально моделируется открытыми подмножествами в положительном конусе $\mathbb{R}^n_+$. Простейшими примерами многообразий с углами являются простые многогранники. *Простым многогранником* является выпуклый n-мерный многогранник, который задаётся в $\mathbb{R}^n$ системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

«общего положения». Последнее означает, что в каждой вершине пересекается ровно n гиперграней.

Определение. Пусть P — простой многогранник размерности n. *Квазиторическим многообразием* над P называется $2n$-мерное T^n-многообразие M, удовлетворяющее следующим двум условиям:

а) действие тора является локально стандартным;

б) пространство орбит диффеоморфно, как многообразие с углами, многограннику P.

Теперь введём определение момент-угол многообразий. Обозначим как и раньше через P простой многогранник размерности n. $F_1, \ldots, F_m$

— его гиперграни. Для $q \in P$ обозначим через $G(q)$ наименьшую (по включению) грань, в которой содержится точка q. Рассмотрим $P \times T^m$, где T^m — стандартный m-мерный тор, в котором нумерация координат соответствует нумерации граней P. Обозначим через T^{F_i} окружность $S^1 \subset T^m$, отвечающую i-ой грани. Теперь для любой грани G многогранника P положим

$$T^G = \prod_{G \subset F_i} T^{F_i} \subset T^m.$$

Определение. Рассмотрим факторпространство

$$Z_P = (P \times T^m)/\sim,$$

где $(p, t_1) \sim (q, t_2)$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in T^{G(q)}$. На Z_P можно ввести структуру гладкого многообразия такую, что естественное действие T^m будет гладким [2, 3]. Многообразие Z_P (с некоторой T^m-инвариантной гладкостью) будем называть *момент-угол многообразием* для простого многогранника P.

Связь между квазиторическими и момент-угол многообразиями проявляется в следующем универсальном свойстве момент-угол многообразий, которое доказано в [5].

Пусть P — простой многогранник размерности n с m гипергранями. Если рассмотреть некоторый тор $T^{m-n} \subset T^m$, действие которого свободно на Z_P, то $M = Z_P/T^{m-n}$ будет являться квазиторическим многообразием. И наоборот, для любого квазиторического многообразия M над P существует тор $T^{m-n} \subset T^m$, свободно действующий на Z_P таким образом, что T^n-многообразие Z_P/T^{m-n} слабо эквивариантно гомеоморфно M. При этом возникает главное T^{m-n}-расслоение

$$\pi : Z_P \to M.$$

Приведённое утверждение играет важную роль в работе при построении римановых метрик на квазиторических и момент-угол многообразиях.

Вторая глава посвящена построению T^2-инвариантных метрик положительной кривизны Риччи на четырёхмерных квазиторических многообразиях, которые в точности являются четырёхмерными односвязными T^2-многообразиями с эффективным действием двумерного тора.

Ещё в 1970 г. П. Орлик и Ф. Раймонд [8] показали, что любое односвязное T^2-многообразие гомеоморфно связной сумме конечного числа экземпляров $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\overline{\mathbb{C}P}^2$. С учётом результатов Дж. Ша и Д. Янга [10, 11] любая такая сумма обладает римановой метрикой положительной кривизны Риччи. Но конструкция в [10] не позволяет строить T^2-инвариантные метрики. Кроме того, до сих пор оставался не исследованным вопрос о том, существует ли риманова метрика положительной кривизны Риччи в каждом T^2-эквивариантном классе односвязных четырехмерных T^2-многообразий.

Основным результатом второй главы является следующая теорема:

Теорема. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой тор T^2 действует изометриями.*

В доказательстве теоремы каждое четырёхмерное квазиторическое многообразие M над двумерным многогранником P с m сторонами моделируется как факторпространство Z_P/T^{m-2} момент-угол многообразия Z_P по свободному действию тора $T^{m-2} \subset T^n$. Любая T^n-инвариантная метрика на Z_P при факторизации по T^{m-2} индуцирует T^2-инвариантную метрику на M. При этом возникает риманова субмерсия $\pi : Z_P \to M$. Выбор подходящей метрики на Z_P и применение формул О'Нила для кривизны Риччи [1, 7] даёт искомую метрику на M.

Третья глава содержит результаты о метриках положительной кривизны Риччи на момент-угол многообразиях. Интерес к последним возникает не случайно. Например, момент-угол многообразие Z_P над любым двумерным многоугольником P обладает метрикой положительной кривизны Риччи. Действительно, Ф. Бозио и Л. Мееpссеман [3] посчитали, что Z_P является связной суммой типа $\#_{i=1}^{k} S^{n_i} \times S^{m_i}$, для которой из результатов Д. Рейта [12] следует существование метрики положительной кривизны Риччи. В главе 3 строится серия более сложных примеров, которые получаются из трёхмерного куба.

Положим за $Q = [0,1]^3$ трёхмерный куб. Рассмотрим всевозможные наборы непересекающихся вершин и рёбер. С точностью до изометрий куба их существует ровно 80. Обозначим вершины буквами $ABCDA'B'C'D'$ и рассмотрим совокупность $\mathfrak{S}$, состоящую из следующих 50 наборов:

1) A; 2) A, B; 3) A, C; 4) A, C'; 5) A, B', C; 6) A, B, C, D;
7) A, C, A', C'; 8) $A, B, C, D, A', B', C', D'$; 9) AA'; 10) AA', BB';
11) AA', CC'; 12) AA', BC; 13) AA', BB', CC'; 14) AA', BB', CD;
15) $AA', BC, C'D'$; 16) AA', BB', CC', DD'; 17) $AA', BB', CD, C'D'$;
18) AA', B; 19) AA', C; 20) AA', B, B'; 21) AA', C, C';
22) AA', B, C; 23) AA', B, C'; 24) AA', B, D; 25) AA', B, D';
26) AA', B, C', D; 27) AA', B, C, B', C'; 28) AA', B, D, B', D';
29) AA', BB', C; 30) AA', CC', B; 31) AA', BC, D;
32) AA', BC, D'; 33) AA', BB', C, C'; 34) AA', BB', C, D;
35) AA', BB', C, D'; 36) AA', CC', B, B'; 37) AA', CC', B, D;
38) AA', CC', B, D'; 39) AA', BC, B', C'; 40) AA', BC, B', D;
41) AA', BC, C', D; 42) AA', BC, C', D';
43) AA', BB', C, D, C', D'; 44) AA', CC', B, D, B', D';
45) AA', BB', CC', D; 46) AA', BB', CD, C';
47) $AA', BC, C'D', B'$; 48) AA', BB', CC', D, D';
49) AA', BB', CD, C', D'; 50) $AA', BC, C'D', B', D$.

Главный результат третьей главы заключается в теореме:

Теорема. *Пусть для каждого $S \in \mathfrak{S}$ многогранник P_S получается из куба Q срезанием плоскостями малых окрестностей вершин и рёбер из набора S. Тогда на момент-угол многообразии Z_{P_S} существует риманова метрика положительной кривизны Риччи.*

Не все наборы из $\mathfrak{S}$ представляют одинаковый интерес. В частности, момент-угол многообразия, отвечающие наборам 9, 10, 11, 13, 16 со срезанными параллельными рёбрами, являются прямыми произведениями. Действительно, соответствующие многоугольники являются произведением отрезка $I = [0, 1]$ на двумерный многоугольник P. Из определения момент-угол многообразия следует, что $Z_{I \times P} = Z_I \times Z_P = S^3 \times Z_P$. Как отмечалось выше, Z_P обладает требуемой метрикой. Отсюда с помощью римановo произведения получаем метрику положительной кривизны Риччи на $Z_{I \times P}$.

Более интересным является случай 1: куб со срезанной вершиной. В [6] исследована топология соответствующего момент-угол многообразия, в частности оно не может быть представлено в виде связной суммы произведений сфер. Другой интересный пример получается из набора 12: куб с двумя срезанными накрест лежащими рёбрами. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов [2] показали, что момент-угол многообразие, построенное по этой схеме, не является формальным, т. к. его когомологии содержат нетривиальные произведения Масси. Тем самым мы можем сформулировать следствие.

Следствие. *Существует неформальное момент-угол многообразие положительной кривизны Риччи.*

Напоследок в диссертации формулируются два открытых вопроса, которые кажутся вполне естественными.

Вопрос. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех момент-угол многообразиях?*

В качестве одной из предпосылок к утвердительному ответу (помимо результатов настоящей диссертации), указывается следующее: если P — двумерный многоугольник, либо если P получен из многомерного тетраэдра многократным применением операции срезания малой окрестности некоторой вершины, то, как показали Ф. Бозио и Л. Меерссеман [3], Z_P диффеоморфно определенной связной сумме произведений сфер различных размерностей, и положительный ответ на вопрос в этом случае дает работа Д. Рейта [12]. Второй вопрос представляется гораздо более сложным и неоднозначным.

Вопрос. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех квазиторических многообразиях?*

В качестве вероятного положительного ответа на этот вопрос указывается лишь, что в четырёхмерном случае, как следует из результатов диссертации, ответ утвердительный.

Благодарности.
Автор выражает глубокую благодарность Я. В. Базайкину за постановку задачи и поддержку в работе, Т. Е. Панову за полезные консультации, а также всему коллективу кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета за тёплую дружескую учебную атмосферу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

[2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.

[3] Bosio F., Meersseman L. Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes // Acta Mathematica. 2006. V. 197, N 1. P. 53–127.

[4] Cheeger J. Some examples of manifolds of nonnegative curvature // Journal of Differential Geometry. 1973. V. 8, N 4. P. 623–628.

[5] Davis M. W., Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Mathematical Journal. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.

[6] Gitler S., Medrano S. L. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // arXiv:0901.2580v2 [math.GT]

[7] O'Neill B. The fundamental equations of a submersion // Mich Math. J. 1966. V. 13. P. 459–469.

[8] Orlik P., Raymond F. Actions of the torus on 4-manifolds // I. TAMS. 1970. V. 152. P. 531–559.

[9] Perelman G. Construction of Manifolds of Positive Ricci Curvature with Big Volume and Large Betti Numbers // Comparison Geom. MSRI. 1997. V. 30. P. 157–163.

[10] Sha J., Yang D. Positive Ricci curvature on the connected sums of $S^n \times S^m$ // Journal of Differential Geometry. 1991. V. 33, N 1. P. 127–137.

[11] Sha J., Yang D. Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54, Part 3. P. 529-538.

[12] Wraith D. J. New connected sums with positive Ricci curvature // Annals of Global Analysis and Geometry. 2007. V. 32, N 4. P. 343–360.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[13] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О четырехмерных T^2-многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–980.

[14] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О момент-угол многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 1. С. 15–29.

[15] Матвиенко И. В. Момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи, отвечающие трёхмерному кубу // Успехи математических наук. 2011. Т. 66, № 2. С. 233–234.

В работах [13, 14] вклад авторов равноценный.