На правах рукописи

Малькович Евгений Геннадьевич

# Некомпактные римановы пространства с группами голономии $G_2$, $Spin(7)$ и $SU(2(n+1))$

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена в Новосибирском Государственном Университете.

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Базайкин Ярослав Владимирович

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н., профессор Берестовский Валерий Николаевич,
д. ф.-м. н., профессор Смоленцев Николай Константинович

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет.

Защита состоится "_____ " мая 2011 года в _______ на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "____ "__________ 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.**

Важной проблемой современной дифференциальной геометрии является построение и исследование примеров конкретных пространств с заданными геометрическими свойствами. Одной из подобных задач является поиск римановых многообразий с заданной группой голономии и изучение их топологических свойств. Зная группу голономии многообразия, можно многое сказать о его кривизне — основной характеристике римановых многообразий; с другой стороны, исследование голономии является технически более простой задачей.

Отдельный интерес к исследованию многообразий со специальными голономиями возник в теоретической физике. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономии $Spin(7)$ в так называемой $M$-теории. В работах Гиббонса, Лю, Поупа, Светича, Канно и др. был построен ряд новых полных примеров, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются Риччи-плоскими и асимптотически ведут себя как конусы, либо как произведения конусов на окружности (асимптотически локально конические — АЛК).

В частности, в работе [7] Светич, Гибонс, Лю и Поуп исследуют вопрос существования метрик с голономией $Spin(7)$ на конусе над семимерной сферой и над пространством Алоффа-Уоллаха; они изучают с помощью численных методов полученную систему дифференциальных уравнений и получают некоторые частные решения. В той же работе ведется поиск метрик с голономией $G_2$ на конусе над $S^3 \times S^3$. Далее, в работе [8] те же авторы строят АЛК метрику с голономией $Spin(7)$ на пространстве, вне начальной точки гомеоморфном $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3 \times S^1$, где $S^1$ — окружность постоянного на бесконечности радиуса, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3$ — конус над $\mathbb{C}P^3$ с нестандартной метрикой. В работе [9] они развивают свои методы и находят новые метрики с другим поведением на бесконечности — найденные метрики определены либо на $\mathbb{R}^8$, либо на $\mathbb{R}^4 \times S^4$.

В работе [10] Гуков и Спаркс независимо от предыдущего коллектива авторов находят метрики с голономией $Spin(7)$ на $\mathbb{R}^4$ - расслоениях над $S^4$ и дают физическую интерпретацию найденным геометрическим структурам в терминах $M$-теории.

Как нам недавно удалось выяснить, Канно и Ясуи в работе [11] искали метрики с голономией $Spin(7)$ на конусе над пространством Алоффа-Уоллаха. В работе [12] они использовали тот факт, что оно расслаивается над $\mathbb{C}P^2$, и ими было найдено решение (4) в этом частном случае.

С другой стороны, исследование вопроса о существовании некомпактных примеров представляет собственный интерес для геометрии, поскольку нельзя исключить возможность построения дальнейших компактных примеров из некомпактных при помощи конструкции, схожей с конструкцией Куммера.

Первым примером полной римановой метрики с группой голономии $SU(n)$ явилась метрика Калаби, найденная в [5] в 1979 году. Метрика Калаби строится на пространстве соответствующего линейного комплексного расслоения над произвольным многообразием Кэлера-Эйнштейна $F$. В той же работе [5] Калаби исследует гиперкэлеровы метрики, и строит в явном виде полную риманову метрику с группой голономии $Sp(m)$ на $T^*\mathbb{C}P^m$ — первый явный пример гиперкэлеровой метрики. Необходимо отметить, что метрики Калаби, были описаны более удобным способом физиками в работах [13] и [6].

**Целями работы являются:**

1. Исследование систем дифференциальных уравнений, эквивалентных существованию параллельных $Spin(7)$ и $G_2$ структур.

2. Поиск частных решений специального вида, и изучение топологических свойств найденных римановых многообразий.

**Основные результаты.**

1. Полностью проинтегрирована система ОДУ, эквивалентная существованию параллельной $G_2$-структуры на конусе над твисторным пространством произвольного семимерного 3-сасакиева многообразия. Исследованы конкретные примеры.

2. Полностью исследовано поведение траекторий системы ОДУ, эквивалентная существованию параллельной $Spin(7)$-структуры на конусе над произвольным семимерным 3-сасакиевым многообразием. Найдено одномерное семейство метрик с голономией $SU(4) \subset Spin(7)$, «соединяющее» восьмимерные метрики Калаби.

3. Найденное однопараметрическое семейство обобщено на случай произвольной размерности вида $4m$. Исследована топология соответствующих римановых многообразий.

**Методы исследований.**

Доказательства в значительной степени опираются на геометрические свойства 3-сасакиевых многообразий и связанных с ними пространств. Исследование поведения траекторий системы дифференциальных уравнений основано на поиске полуинтегралов системы, то есть функций, возрастающих на решениях системы.

**Научная новизна, теоретическая и практическая ценность.** Все результаты являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейшем для построения новых примеров метрик со специальными голономиями и другими геометрическими свойствами.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались:
– на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» Института математики им.С.Л. Соболева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН И.А. Тайманова,
– на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН под руководством академика Ю.Г. Решетняка,
– на объединенном семинаре по геометрической теории функций

ИМ СО РАН под руководством д.ф.-м.н. А.Д. Медных,
– на российской конференции «Топоноговские чтения 2010», проходившей зимой 2010 года в Новосибирске,
– на международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии проходившей осенью 2009 года в Новосибирске,
– на международном семинаре «Special Geometries in Mathematical Physics», проходившем весной 2008 года в Германии,
– на МНСК-46, проходившей весной 2008 года в Новосибирске.

**Публикации.** Результаты диссертации изложены в работах [14, 15, 16]. Часть результатов получена совместно с Я.В. Базайкиным в процессе неразделимой творческой деятельности.

**Структура диссертации.** Диссертация изложена на 69 страницах и состоит из введения и двух глав, каждая из которых разбита на пункты. Библиография содержит 24 наименования.

Первая Глава является вводной. В ней мы приводим основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Параграф 1.1 касается групп голономии римановых многообразий; в параграфе 1.2 излагаются основные факты о геометрии 3-сасакиевых многообразий; параграф 1.3 содержит определение геометрических структур на орбифолдах. Глава 1 содержит лишь необходимые нам утверждения и не претендует на какую-либо полноту.

Во второй Главе мы приводим общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $G_2$ по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию $M$. Рассмотрим 3-сасакиево многообразие $M$, на нем свободно действует группа $S^1$, порождаемая одним из характеристических полей, фактор-пространство $M/S^1 = \mathcal{Z}$ — шестимерный орбифолд, обладающий метрикой Кэлера-Эйнштейна. Конус над $\mathcal{Z}$ будет иметь группу голономии $G_2$, если функции, отвечающие за деформацию конусной метрики, удовлетворяют определенной системе нелинейных дифференциальных уравнений и краевым условиям. При этом за деформацию отвечают функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, зависящие от радиальной переменной $t$, меняющейся вдоль образующей конуса:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \tag{1}$$

где $\eta_2, \eta_3$ — характеристические 1-формы $M$, а $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$ — формы, аннулирующие 3-сасакиево слоение на $M$.

Основным результатом параграфа 2.1 является **Лемма 2.1**: если кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O} = M/SU(2)$ обладает кэлеровой структурой, то (1) является метрикой с группой голономии $G_2$ тогда, и только тогда, когда функции $A, B, C$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l} A' = \frac{2A^2-B^2-C^2}{BC}, \\ B' = \frac{B^2-C^2-2A^2}{CA}, \\ C' = \frac{C^2-2A^2-B^2}{AB}. \end{array} \tag{2}$$

В частности, метрика (1) является Риччи-плоской. Ранее система (2) была получена в [7] в частном случае $M = SU(3)/S^1$.

Для того, чтобы решение системы (2) было определено на некотором орбифолде либо многообразии, необходимо дополнительное выполнение краевых условий в точке $t_0$, которые мы формулируем в **Лемме 2.2**. Эти условия не могут быть выполнены, кроме случая $B = C$, который приводит нас к функциям, дающим решения, найденные впервые в [4] в случае $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$. В случае $B = C$ метрика (1) определена на тотальном пространстве $\mathbb{R}^3$-расслоения $\mathcal{N}$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Вообще говоря, $\mathcal{N}$ является орбифолдом, кроме случая $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$.

В параграфе 2.2 мы рассматриваем известные примеры 3-сасакиевых многообразий, построенные в [3] с помощью взвешенного действия окружности на $SU(3)$, и описываем в **Лемме 2.3** и **Следствии 2.1** топологию твисторного пространства $\mathcal{Z}$, топологически эквивалентного расслоению $\mathcal{N}$.

В Главе 3 мы строим в явной, алгебраической форме однопараметрическое семейство полных римановых метрик, «соединяющих» гиперкэлерову метрику Калаби и метрику Калаби с голономией $SU(4)$ в пространстве специальных кэлеровых метрик в размерности восемь в случае, когда $F$ является многообразием комплексных 3-флагов в $\mathbb{C}^3$. В этом случае четырехмерное кватернионно-кэлерово многообразие $\mathcal{O}$, связанное с $F$ допускает «расщепление» касательного расслоения, что позволяет ввести дополнительный параметр деформации метрики и решить в элементарных функциях возникающую систему уравнений.

Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа-Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \tag{3}$$

где $t$ — координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на $M$, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности в параграфе). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ разрешим следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору $\eta_1$ окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ — квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$. В параграфе 3.2 мы приводим доказательство и уточненную формулировку следующей теоремы:

**Теорема 3.1**. *При* $0 \leq \alpha < 1$ *каждая риманова метрика из семейства*

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha = \tfrac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}dr^2 + \tfrac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) \\ +(r^2+\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2) + (r^2-\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2),\end{aligned} \tag{4}$$

*является полной гладкой римановой метрикой на* $H/\mathbb{Z}_2$ *с группой голономии* $SU(4)$. *При* $\alpha = 0$ *метрика (4) изометрична метрике*

*Калаби [5] с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика (4) изометрична метрике Калаби [5] с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^*\mathbb{C}P^2$.*

Отметим, что метрика (4) в Теореме 3.1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от [5]; метрики Калаби в таком виде исследовались в [13] и [6].

Этот результат получен нами при систематическом изучении метрик вида (3), имеющих группу голономии $Spin(7)$ методом, разработанным в [1] и применявшемся затем в [14, 2]: метрика (3) строится по произвольному 7-мерному 3-сасакиеву многообразию $M$ и обладает естественной $Spin(7)$-структурой. В **Лемме 3.1** мы показываем, что условие параллельности этой структуры сводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} A_1' = \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3} + \frac{A_1^2(B^2+C^2)}{B^2C^2}, \\ A_2' = \frac{A_1^2-A_2^2+A_3^2}{A_1A_3} - \frac{B^2+C^2-2A_2^2}{BC}, \\ A_3' = \frac{A_1^2+A_2^2-A_3^2}{A_1A_2} - \frac{B^2+C^2-2A_3^2}{BC}, \\ B' = -\frac{CA_1+BA_2+BA_3}{BC} - \frac{(C^2-B^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3C}, \\ C' = -\frac{BA_1+CA_2+CA_3}{BC} - \frac{(B^2-C^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3B}. \end{array} \qquad (5)$$

(отметим, что система (5) при $B = C$ полностью исследована в [1, 2]). Для получения гладкой метрики (3) необходимо разрешить конусную особенность на $\bar{M}$ одним из двух способов, получив пространства $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Эта схема описывается в параграфе 3.1 диссертации, условия для разрешения конусной особенности в случае $\mathcal{M}_2$ мы формулируем в **Лемме 3.2**. Тогда семейство метрик (4) на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2$ получается интегрированием системы (5) при $A_2 = -A_3$.

В заключительном параграфе 3.3 приводится доказательство следующей теоремы, завершающей исследование системы (4) в случае пространства $\mathcal{M}_2$:

**Теорема 3.2**. *Пусть $M$ — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения $M$ либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида* (3) *с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

*1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ из (3) имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства (4);*

*2) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ вида (3) с группой голономии $Spin(7)$, найденная в [1]. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности $S^1$.*

*Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (3) с рассмотренной $Spin(7)$-структурой и с группой голономии $H \subset Spin(7)$ изометрична одной из указанных выше.*

Изложение доказательства **Теоремы 3.2** построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (5) (**Леммы 3.4 и 3.5**), они определяют асимптотику соответствующих метрик (**Лемма 3.6**). Далее выясняется, каким начальным точкам $S_0$ отвечают условия **Леммы 3.2**, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (5) (**Лемма 3.7**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области П и Г системы (5) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**Лемма 3.8**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (**Предложение 3.1**).

В Главе 4 мы ставим вопрос об обобщении построенного в Главе 3 однопараметрического семейства метрик на случай общей размерности вида $4m$, так как обе метрики Калаби (впервые построенные в [5]) определены не только в размерности восемь, но и во всех размерностях, кратных четырем. Мы даем положительный ответ на данный вопрос и доказываем следующую теорему:

**Теорема 4.1.** *Следующее семейство состоит из полных, риччи-плоских $4(n+1)$-мерных римановых метрик:*

$$\bar{G}_\alpha = \frac{r^4(r^4-\alpha^4)^n}{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}dr^2 + \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}{r^2(r^4-\alpha^4)^n}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2)$$

$$+(r^2+\alpha^2)\sum_{\beta=1}^n(\eta_{4\beta}^2+\eta_{5\beta}^2) + (r^2-\alpha^2)\sum_{\beta=1}^n(\eta_{6\beta}^2+\eta_{7\beta}^2),$$

*где* $0 \le \alpha \le 1$, $r \ge 1$. *Метрики* $\bar{G}_0$ *и* $\bar{G}_1$ *имеют группы голономии* $SU(2(n+1))$ *и* $Sp(n+1)$, *соответственно, и совпадают с многомерными метриками Калаби из [5]. Метрики* $\bar{G}_\alpha$ *при* $0 < \alpha < 1$ *имеют группу голономии* $SU(2(n+1))$ *и при* $n = 1$ *совпадают с семейством, построенным в Главе 3. При* $0 \le \alpha < 1$ *метрики* $\bar{G}_\alpha$ *определены на* $(n+1)$*-ой тензорной степени линейного комплексного расслоения над пространством комплексных флагов в* $\mathbb{C}^{2n+1}$, *метрика* $\bar{G}_1$ *определена на* $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$.

# Список литературы


[1] Базайкин Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.

[2] Базайкин Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН. 2008. Т. 263. С. 6–17.

[3] Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds. // J. reine angrew. Math. 1994. P. 183–220.

[4] Bryant R. L., Salamon S. L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy// Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.

[5] Calabi E. Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.

[6] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Hyper-Kähler Calabi Metrics, $L^2$ Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and $AdS_4/CFT_3$ Correspondence // Nucl. Phys. B. 2001. V. 617. P.151–197.

[7] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Cohomogeneity one manifolds of $Spin(7)$ and $G(2)$ holonomy// Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N 10. 106004.

[8] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Complete Noncompact Spin(7) Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, N 1-2. P. 29–54.

[9] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Cohomogeneity One Metrics With Spin(7) Holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, N 3–4. P. 350–365.

[10] Gukov S., Sparks J. M-Theory on Spin(7) Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, N 1–2. P. 3–69.

[11] Kanno H., Yasui Y. On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1) // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 293–309.

[12] Kanno H., Yasui Y. On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1) // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 310–326.

[13] Page D., Pope C. Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical and Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.

## Работы автора по теме диссертации

[14] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. Метрики с группой голономии $G_2$, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.

[15] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. $Spin(7)$-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ // Математический Сборник. 2011. Т. 202, № 4. С. 3–30.

[16] Малькович Е. Г. О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(2(n+1))$ // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 1. С. 95–99.