На правах рукописи

Кремлёв Антон Геннадьевич

СИГНАТУРА КРИВИЗНЫ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Рубцовского индустриального института (филиала) ГОУ ВПО "Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Никоноров Юрий Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Родионов Евгений Дмитриевич

кандидат физико-математических наук
Базайкин Ярослав Владимирович

Ведущая организация: Кемеровский государственный университет

Защита состоится 01 октября 2009 года в 14-00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "____" августа 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена классификации возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли. Хорошо известно, что различные ограничения на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Ярким примером этого является теорема Майерса, утверждающая, что полное риманово многообразие с положительной кривизной Риччи является компактным и имеет конечную фундаментальную группу [22].

Для однородных римановых многообразий кривизна Риччи еще более информативна. Например, согласно теореме Бохнера однородное риманово многообразие отрицательной кривизны Риччи обязано быть некомпактным [12]. Для заданного однородного пространства G/H (где H — компактная подгруппа группы Ли G) естественно попытаться отыскать общие свойства оператора Риччи для всевозможных G-инвариантных римановых метрик на пространстве G/H. Эту проблему можно уточнить и конкретизировать разными способами. Один из возможных вариантов — рассмотреть следующий вопрос: каковы возможные сигнатуры операторов Риччи G-инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H?

Есть основания надеяться на то, что для пространств малой размерности этот вопрос может быть полностью разрешен. Благодаря работе Дж. Милнора [21] мы знаем ответ на этот вопрос в размерности не больше 3. Работы [11, 18, 26] дают ответ на поставленный вопрос для всех четырехмерных однородных пространств, отличных от групп Ли. Частичные результаты для групп Ли получены в работах Дж. Милнора [21], Ф. Набоннана [23], И. Дотти [17], Д. Чена [14] и др.

Поскольку произвольная левоинвариантная риманова метрика ρ на группе Ли G определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и, наоборот, каждое скалярное произведение Q на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику ρ на группе G, то можно переформулировать рассматриваемую задачу в терминах алгебр Ли.

Вещественные четырехмерные алгебры Ли классифицированы Г.М. Мубаракзяновым [7] (см. также [10, 15, 16, 25]). Нильпотентные алгебры Ли размерности пять были классифицированы В. В. Морозовым [5]. В диссертации используется нумерация из работы [7].

Цель работы. Целью диссертационной работы является полная классификация возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малой размерности. Основные результаты работы следующие:

1. Получена полная классификация возможных сигнатур оператора Риччи для всех унимодулярных групп Ли размерности 4;

2. Получена полная классификация возможных сигнатур оператора Риччи для всех неунимодулярных групп Ли размерности 4;

3. Получена полная классификация возможных сигнатур оператора Риччи для всех нильпотентных групп Ли размерности 5.

Методы исследования. Методика исследований ориентирована на использование стандартных методов анализа, дифференциальной геометрии, линейной алгебры, теории групп и алгебр Ли.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеют теоретическое значение и могут быть использованы для дальнейшего развития теории однородных римановых многообразий. Диссертационная работа обобщает исследования Ф. Набоннана [23], Д. Чена [14] и содержит новые результаты по геометрии четырехмерных и пятимерных однородных римановых многообразий. В частности, исследована реализуемость сигнатур оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик для каждой четырехмерной группы Ли и каждой пятимерной нильпотентной группы Ли. Разработаны новые методы, позволяющие работать с метрическими алгебрами Ли малой размерности.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: VIII всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире” (Рубцовск, 2006 г.); Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006 г.); Региональная конференция по математическому образованию на Алтае (Барнаул, 2006 г.); IX всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире” (Рубцовск, 2007 г.); X всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире” (Рубцовск, 2008 г.);

Всероссийская научно-практическая конференция “Математическое образование в регионах России” (Барнаул, 2008 г.); Международная конференция “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008 г.); Международная научная конференция “X Белорусская математическая конференция” (Минск, 2008 г.); Алтайская государственная педагогическая академия (семинар кафедры геометрии и математических методов в экономике под руководством д.ф.-м.н. Е.Д. Родионова) – 2009 г.; Институт математики СО РАН (семинар по геометрии, топологии и их приложениям под руководством чл.-корр. РАН И.А. Тайманова) – 2009 г.; Кемеровский государственный университет (семинар по геометрии и анализу под руководством д.ф.-м.н. Н.К. Смоленцева) – 2009 г. Институт математики СО РАН (семинар отдела геометрии и анализа под руководством академика РАН Ю.Г. Решетняка) – 2009 г. Кроме того, все результаты работы в разное время докладывались на семинарах кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по ведущим научным школам Российской Федерации (грант НШ — 5682.2008.1).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ. В совместных научных публикациях с Ю.Г. Никоноровым имеет место неделимое соавторство.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Нумерация каждого утверждения в диссертации состоит из трех чисел, первое из которых обозначает номер главы, второе — номер раздела, третье — номер утверждения данного типа. Для таблиц и формул используется сплошная нумерация. Общий объем диссертации составляет 146 страниц, библиография состоит из 57 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Каждая глава, в свою очередь, разбита на несколько разделов.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор современного состояния изучаемых проблем и приводится краткое изложение диссертации.

В **первой главе** диссертации приводятся необходимые сведения о метрических алгебрах Ли и локализации собственных значений симметрических операторов.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию сигнатур кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли и основана на совместной с Ю.Г. Никоноровым работе [37].

Таблица 1

№	Сигнатура	№	Сигнатура	№	Сигнатура
1	$(-,-,-,-)$	6	$(-,-,+,+)$	11	$(0,0,0,0)$
2	$(-,-,-,0)$	7	$(-,0,0,0)$	12	$(0,0,0,+)$
3	$(-,-,-,+)$	8	$(-,0,0,+)$	13	$(0,0,+,+)$
4	$(-,-,0,0)$	9	$(-,0,+,+)$	14	$(0,+,+,+)$
5	$(-,-,0,+)$	10	$(-,+,+,+)$	15	$(+,+,+,+)$

Таблица 2

Алгебра Ли	Ненулевые коммутаторы
$4A_1$	
$A_{3,1} \oplus A_1$	$[e_2,e_3]=e_1$
$A_{3,4} \oplus A_1$	$[e_1,e_3]=e_1, [e_2,e_3]=-e_2$
$A_{3,6} \oplus A_1$	$[e_1,e_3]=-e_2, [e_2,e_3]=e_1$
$A_{3,8} \oplus A_1$	$[e_1,e_2]=-e_3, [e_3,e_1]=e_2, [e_2,e_3]=e_1$
$A_{3,9} \oplus A_1$	$[e_1,e_2]=e_3, [e_3,e_1]=e_2, [e_2,e_3]=e_1$
$A_{4,1}$	$[e_2,e_4]=e_1, [e_3,e_4]=e_2$
$A_{4,2}^{-2}$	$[e_1,e_4]=-2e_1, [e_2,e_4]=e_2, [e_3,e_4]=e_2+e_3$
$A_{4,5}^{\alpha,-1-\alpha}$, $\alpha \in (-1,-1/2]$	$[e_1,e_4]=e_1, [e_2,e_4]=\alpha e_2, [e_3,e_4]=-(1+\alpha)e_3$
$A_{4,6}^{-2\beta,\beta}$, $\beta \in (0,+\infty)$	$[e_1,e_4]=-2\beta e_1, [e_2,e_4]=\beta e_2-e_3, [e_3,e_4]=e_2+\beta e_3$
$A_{4,8}$	$[e_2,e_3]=e_1, [e_2,e_4]=e_2, [e_3,e_4]=-e_3$
$A_{4,10}$	$[e_2,e_3]=e_1, [e_2,e_4]=-e_3, [e_3,e_4]=e_2$

В **первом разделе** второй главы исследуются разложимые унимодулярные алгебры Ли размерности четыре. Основным результатом является

Теорема 2.1.1 *Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая унимодулярная разложимая четырехмерная алгебра Ли вида $4A_1$ или $A_{3,i} \oplus A_1$ из таблицы 2, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 3 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

Во **втором разделе** второй главы исследуются неразложимые унимодулярные алгебры Ли размерности четыре. Основным результатом раздела

Таблица 3

	№ сигнатуры														
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$4A_1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,1} \oplus A_1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,4} \oplus A_1$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,6} \oplus A_1$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,8} \oplus A_1$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,9} \oplus A_1$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

является

Теорема 2.2.1 *Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая унимодулярная неразложимая четырехмерная алгебра Ли вида $A_{4,i}$ из таблицы 2, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 4 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «$+$».*

Таблица 4

	№ сигнатуры														
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A_{4,1}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,2}^{-2}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,5}^{\alpha,-1-\alpha}$, $\alpha \in (-1, -1/2)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,5}^{-1/2,-1/2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,6}^{-2\beta,\beta}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,8}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{4,10}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Третья глава посвящена изучению сигнатур кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных группах Ли и основана на совместной с Ю.Г. Никоноровым работе [36].

В **первом разделе** третьей главы исследуются скалярные произведения с оператором Риччи сигнатуры $(-, -, 0, 0)$. Основным результатом раздела является

Предложение 3.1.3 *Четырехмерная неунимодулярная разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с трехмерным абелевым идеалом допускает скалярное произведение с оператором Риччи сигнатуры $(-, -, 0, 0)$ тогда и только тогда,*

Таблица 5

Алгебра Ли	Ненулевые коммутаторы
$A_2 \oplus 2A_1$	$[e_1, e_2] = e_2$
$2A_2$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4$
$A_{3,2} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$
$A_{3,3} \oplus A_1$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$
$A^{\alpha}_{3,5} \oplus A_1$, $0 < \lvert\alpha\rvert < 1$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = \alpha e_2$
$A^{\alpha}_{3,7} \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$[e_1, e_3] = \alpha e_1 - e_2,\ [e_2, e_3] = e_1 + \alpha e_2$
$A^{\alpha}_{4,2}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$	$[e_1, e_4] = \alpha e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$
$A_{4,3}$	$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2$
$A_{4,4}$	$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = e_1 + e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$
$A^{\alpha,\beta}_{4,5}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, $\alpha + \beta \neq -1$	$[e_1, e_4] = e_1,\ [e_2, e_4] = \alpha e_2,\ [e_3, e_4] = \beta e_3$
$A^{\alpha,\beta}_{4,6}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha \neq -2\beta$	$[e_1, e_4] = \alpha e_1,\ [e_2, e_4] = \beta e_2 - e_3,\ [e_3, e_4] = e_2 + \beta e_3$
$A_{4,7}$	$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_2 + e_3$
$A^{\beta}_{4,9}$, $-1 < \beta \leq 1$	$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = (1 + \beta)e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,\ [e_3, e_4] = \beta e_3$
$A^{\alpha}_{4,11}$, $\alpha > 0$	$[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_4] = 2\alpha e_1,\ [e_2, e_4] = \alpha e_2 - e_3,$ $[e_3, e_4] = e_2 + \alpha e_3$
$A_{4,12}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2,\ [e_1, e_4] = -e_2,\ [e_2, e_4] = e_1$

когда она изоморфна одной из следующих алгебр Ли:

$$A_2 \oplus 2A_1, \quad A_{3,2} \oplus A_1, \quad A^{\alpha}_{3,5} \oplus A_1\ (0 < \alpha < 1), \quad A^{\alpha}_{3,7} \oplus A_1,$$
$$A^{\alpha}_{4,2}\ (\alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)), \quad A_{4,4}, \quad A^{\alpha,\beta}_{4,5}\ (0 < \alpha < \beta < 1),$$
$$A^{\alpha,\beta}_{4,6}\ (\alpha > 0), \quad A^{\alpha,0}_{4,6}.$$

Во **втором разделе** третьей главы исследуются разложимые неунимодулярные алгебры Ли размерности четыре и доказывается

Теорема 3.2.1 *Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая неунимодулярная разложимая четырехмерная алгебра Ли из таблицы 5, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 6 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

В **третьем разделе** третьей главы исследуются неразложимые неунимодулярные алгебры Ли размерности четыре и доказывается

Теорема 3.3.1 *Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая неунимодулярная неразложимая четырехмерная алгебра Ли из таблицы 5, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи*

Таблица 6

	№ сигнатуры														
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A_2 \oplus 2A_1$	−	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$2A_2$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,2} \oplus A_1$	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,3} \oplus A_1$	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,5}^{\alpha} \oplus A_1$, $\alpha \in (-1,0)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,5}^{\alpha} \oplus A_1$, $\alpha \in (0,1)$	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,7}^{\alpha} \oplus A_1$	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Таблица 7

	№ сигнатуры														
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha < 0$, $\alpha \neq -2$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,2}^{1}$	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,3}$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,4}$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha \in [-1,-\frac{1}{2})$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha \in (-\frac{1}{2},0)$	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,1}$, $\alpha \in [-1,0)$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,1}$, $\alpha \in (0,1)$	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{1,1}$	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \in [-1,0)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \in (0,1)$, $\alpha \neq \beta$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq -2\beta$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha > 0$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,6}^{\alpha,0}$	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,7}$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,9}^{\beta}$, $\beta \in (-1,0)$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,9}^{\beta}$, $\beta \in [0,1)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,9}^{1}$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,11}^{\alpha}$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$A_{4,12}$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−

для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 7 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».

Четвертая глава посвящена исследованию сигнатур кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на пятимерных нильпотентных группах Ли.

Таблица 8

Алгебра Ли	Ненулевые коммутаторы
$5A_1$	
$A_{3,1} \oplus 2A_1$	$[e_2, e_3] = e_1$
$A_{4,1} \oplus A_1$	$[e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_4] = e_2$
$A_{5,1}$	$[e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_2$
$A_{5,2}$	$[e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2, [e_4, e_5] = e_3$
$A_{5,3}$	$[e_3, e_4] = e_2, [e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_3$
$A_{5,4}$	$[e_2, e_4] = e_1, [e_3, e_5] = e_1$
$A_{5,5}$	$[e_3, e_4] = e_1, [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2$
$A_{5,6}$	$[e_3, e_4] = e_1, [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = e_2, [e_4, e_5] = e_3$

Таблица 9

№	Сигнатура	№	Сигнатура	№	Сигнатура
1	$(-,-,-,-,-)$	8	$(-,-,0,0,+)$	15	$(-,+,+,+,+)$
2	$(-,-,-,-,0)$	9	$(-,-,0,+,+)$	16	$(0,0,0,0,0)$
3	$(-,-,-,-,+)$	10	$(-,-,+,+,+)$	17	$(0,0,0,0,+)$
4	$(-,-,-,0,0)$	11	$(-,0,0,0,0)$	18	$(0,0,0,+,+)$
5	$(-,-,-,0,+)$	12	$(-,0,0,0,+)$	19	$(0,0,+,+,+)$
6	$(-,-,-,+,+)$	13	$(-,0,0,+,+)$	20	$(0,+,+,+,+)$
7	$(-,-,0,0,0)$	14	$(-,0,+,+,+)$	21	$(+,+,+,+,+)$

Основным результатом этой главы является

Теорема 4.1.1 *Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая нильпотентная пятимерная алгебра Ли из таблицы 8, s – произвольная сигнатура из таблицы 9. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 10 на пересечении столбца, соответствующего алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и строки, соответствующей сигнатуре s, находится знак «+».*

Диссертационная работа обобщает частные результаты Ф. Набоннана [23], Д. Чена [14] и содержит новые результаты по геометрии четырехмерных и пятимерных однородных римановых многообразий, в частности, полную классификацию возможных сигнатур оператора Риччи для всех групп Ли размерности 4 и для всех нильпотентентных групп Ли размерности 5.

Таблица 10

-	Алгебра Ли								
№	$5A_1$	$A_{3,1} \oplus 2A_1$	$A_{4,1} \oplus A_1$	$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$	$A_{5,6}$
1	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	−	−	−	−	+	−	+	+	+
4	−	−	−	−	−	−	−	−	−
5	−	−	+	−	+	−	−	+	+
6	−	−	+	+	+	+	−	+	+
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−
8	−	+	+	−	+	−	−	−	+
9	−	−	+	−	+	+	−	−	+
10	−	−	−	−	+	+	−	−	+
11	−	−	−	−	−	−	−	−	−
12	−	−	−	−	−	−	−	−	−
13	−	−	−	−	−	−	−	−	−
14	−	−	−	−	−	−	−	−	−
15	−	−	−	−	−	−	−	−	−
16	+	−	−	−	−	−	−	−	−
17	−	−	−	−	−	−	−	−	−
18	−	−	−	−	−	−	−	−	−
19	−	−	−	−	−	−	−	−	−
20	−	−	−	−	−	−	−	−	−
21	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Ю. Г. Никонорову за постоянное внимание и поддержку.

Литература

[1] *Алексеевский Д. В.* Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Матем. сб. 1975. Т. 96. С. 93–117.

[2] *Алексеевский Д. В.* Сопряженность полярных разложений групп Ли // Матем. сб. 1971. Т. 84. С. 14–26.

[3] *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

[4] *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли. (Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 41.) М.: ВИНИТИ, 1990.

[5] *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Известия вузов. Мат. 1958. № 4. С.161–174.

[6] *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Известия вузов. Мат. 1963. Т. 34. № 3. С. 99–106.

[7] *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Известия вузов. Мат. 1963. Т. 32. № 1. С. 114–123.

[8] *Никитенко Е. В.* О нестандартных эйнштейновых расширениях пятимерных метрических нильпотентных алгебр Ли // Сибирские электронные математические известия. 2006. № 3. С. 115–136.

[9] *Никитенко Е. В., Никоноров Ю. Г.* Шестимерные эйнштейновы солвмногообразия // Мат. труды. 2005. Т. 8. № 1. С. 71–121.

[10] *Andrada A., Barberis M. L., Dotti I. G., Ovando G. P.* Product structure on four dimensional solvable Lie algebras // Homology, Homotopy and Applications, 7(1) (2005), 9–37.

[11] *Berard-Bergery L.* Les espaces homogenes Riemanniens de dimension 4 // Semin. Arthur Besse, Paris, 1978/79, (1981), 40–60.

[12] *Bochner S.* Vector fields and Ricci curvature // Bull. Am. Math. Soc. 52 (1946), 776–797.

[13] *Cheeger, J. and Gromoll, D.* The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature // J. Diff. Geom. 6 (1971/72), 119–128.

[14] *Chen, D.* A note on Ricci signatures //Proc. Am. Math. Soc. 137(1) (2009), 273–278.

[15] *Christodoulakis T., Papadopoulos G. O. and Dimakis A.* Automorphisms of real four-dimensional Lie algebras and the invariant characterization of homogeneous 4-spaces // J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003), 427–441. Corrigendum: J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003), 2379.

[16] *De Graaf W. A.* Classification of solvable Lie algebras // Experimental Math., 14(1) (2005), 15–25.

[17] *Dotti Miatello I.* Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups // Math. Zeit. 180 (1982), 257–263.

[18] *Ishihara S.* Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // J. Math. Soc. Japan, 7 (1955), 345–370.

[19] *Jensen G.* The scalar curvature of left invariant Riemannian metrics // Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1125–1143.

[20] *Lai Heng-Lung, Lue Huei-Shyong.* Scalar curvature of Lie groups // Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 311–315.

[21] *Milnor J.* Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 21 (1976), 293–329.

[22] *Myers S. B.* Riemannian manifolds with positive mean curvature // Duke Math. J. 8 (1941), 401–404.

[23] *Nabonnand Ph.* Diplôme d'études approfondies. — Nancy: Universite de Nancy 1 1978.

[24] *Ovando G.* Invariant complex structures on solvable real Lie groups // Manuscripta Math. 103 (2000), 19–30.

[25] *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Mathematical Phys. 17(6) (1976), 986–994.

[26] *Patrangenaru V.* Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples // Pacific J. Math., 173(1) (1996), 511–532.

Публикации автора[1]

[27] *Кремлев А. Г.* Исследование операторов Риччи метрических алгебр Ли // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. С. 48–50.

[28] *Кремлев А. Г.* Сигнатуры операторов Риччи метрических алгебр Ли // Вестник БГПУ. 2006. № 6. С. 40–44.

[29] *Кремлев А. Г.* О некоторых сигнатурах операторов Риччи метрических алгебр Ли малой размерности // МОНА 2006: тезисы региональной конференции по математическому образованию на Алтае. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2006. С. 14–15.

[30] *Кремлев А. Г.* Исследование сигнатуры оператора Риччи метрических алгебр Ли // Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире: материалы всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Часть 1. РИИ. Рубцовск. 2006. С. 21–23.

[31] *Кремлев А. Г.* Исследование сигнатур операторов Риччи 4-мерных разрешимых разложимых алгебр Ли // Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире: материалы всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Часть 1. РИИ. Рубцовск. 2007. С. 14–15.

[32] *Кремлев А. Г.* О кривизне Риччи левоинвариантных метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Проблемы социального и научно-технического развития в современном мире: материалы всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Часть 1. РИИ. Рубцовск. 2008. С. 25–27.

[33] *Кремлев А. Г.* Исследование оператора Риччи нильпотентных метрических алгебр Ли размерности 5 // Математическое образование в регионах России: материалы всероссийской научно-практической конференции. Барнаул. 2008. С. 19–21.

[1]Жирным шрифтом выделены статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

[34] *Kremlyov A. G., Nikonorov Yu. G.* The Ricci curvature of left-invariant metrics on four-dimensional Lie groups // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения С.Л. Соболева: тез. докладов. Новосибирск. 2008. С. 389.

[35] *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* О кривизне Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли // Международная научная конференция "X Белорусская математическая конференция", 3–7 ноября 2008 г. Тезисы докладов. Часть 1. Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2008. С. 84–85.

[36] **Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11. № 2. С. 115-147.**

[37] **Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12. № 1. С. 40-116.**

Подписано к печати 22.05.09. Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз. Зак. 09-734. Рег. № 46
Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6