РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. Соболева

На правах рукописи
УДК 519.1

Ковалевская Дарья Игоревна

О ВЛОЖИМОСТИ СИСТЕМ ШТЕЙНЕРА В СОВЕРШЕННЫЕ КОДЫ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2013

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Зиновьев
	кандидат физико-математических наук, А. Л. Пережогин
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Защита состоится 18 декабря 2013 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: ауд. 417, пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 06 ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В данной диссертации исследуются вопросы классификации и взаимосвязи объектов, изучаемых в теории блок-схем и теории кодов, исправляющих ошибки в каналах связи с шумами. Объектами исследования настоящей работы являются системы троек и четверок Штейнера, совершенные и расширенные совершенные двоичные коды, а также эквидистантные и двудистантные коды над двоичным и недвоичным алфавитом.

Одной из основных задач теории блок-схем является задача классификации систем Штейнера. В настоящее время известна[1,2] классификация систем троек Штейнера порядка не больше 19. Также открытым является вопрос о вложимости произвольной системы троек (четверок) Штейнера в некоторый совершенный (расширенный совершенный) двоичный код.

Двоичный код C длины n называется *совершенным кодом, исправляющим одну ошибку* (кратко – *совершенным*), если каждый вектор x из $\mathbb{F}^n$ находится на расстоянии не более 1 ровно от одного кодового слова C. Пусть $\bar{C}$ – *расширенный совершенный код*, полученный из совершенного кода C добавлением общей проверки на четность (т.е. добавлением координаты, равной сумме остальных по модулю 2). Далее будут рассматриваться только приведенные совершенные и приведенные расширенные совершенные двоичные коды (т.е. коды, содержащие нулевое кодовое слово). *Рангом* приведенного кода называется размерность линейного подпространства пространства $\mathbb{F}^n$, образованного векторами из этого кода.

Наиболее известным совершенным кодом является линейный код Хэмминга, открытый Р. Хэммингом в 1950 г. Известно, что такой код единственный с точностью до эквивалентности (далее код Хэмминга длины n будем обозначать через $\mathcal{H}^n$). Совершенные q-ичные коды Хэмминга имеют следующие параметры: длина $n = \frac{q^r-1}{q-1}$, $r > 1$, число кодовых слов q^{n-r}, минимальное расстояние равно 3. В 1949 г. М. Голеем было открыто 2 линейных совершенных кода, отличных от кода Хэмминга, а именно – двоичный код длины 23, размерности 12 с расстоянием 7, а также троичный

---

[1] *Холл М.* Комбинаторика. Пер. с англ. М.: Мир. 1970. 424 с. [2] *Kaski P., Östergård P. R. J.* The Steiner Triple Systems of Order 19 // Math. Comput. 2004. N 73. P. 2075–2092.

код длины 11, размерности 6 с расстоянием 5. В. А. Зиновьев и В. К. Леонтьев[3] и независимо А. Титвайнен[4] доказали, что любой нетривиальный совершенный код имеет параметры кода Хэмминга либо кода Голея. Первый свитчинговый метод построения нелинейных совершенных двоичных кодов был предложен в 1962 г. Ю.Л. Васильевым[5]. Известно[6], что любой совершенный код длины n ранга $n - \log(n+1)+1$ является кодом Васильева, построенным свитчингами i-компонент (по одной координатной позиции) из кода Хэмминга с помощью некоторой функции $\lambda : H^{\frac{n-1}{2}} \to \{0,1\}$ (которая, вообще говоря, может быть нелинейной). Код Васильева V_λ^n может быть, с точностью до эквивалентности, представлен в виде

$$V_\lambda^n = \{(|x| + \lambda(y), x+y, x) | x \in \mathbb{F}^{\frac{n-1}{2}}, y \in \mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}}\} \qquad (1)$$

для некоторой функции $\lambda : \mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}} \to \{0,1\}$. Первое существенное улучшение нижней границы числа известных кодов Васильева было получено в 1997 г. в работе С. В. Августиновича и Ф. И. Соловьевой[7], где был предложен свитчинговый метод α-компонент построения совершенных кодов. В настоящее время полная классификация совершенных кодов все еще не получена.

Пусть V – множество, состоящее из v элементов, t-(v,k,λ)-*схемой* называется такое размещение v различных элементов по блокам, что каждый блок содержит точно k различных элементов, любое t-элементное подмножество из V появляется точно в λ блоках. *Системой троек Штейнера порядка* v (обозначаемой $STS(v)$) и *системой четверок Штейнера порядка* v (обозначаемой $SQS(v)$) называются 2-$(v,3,1)$ и 3-$(v,4,1)$-схемы соответственно.

Первая публично заявленная задача, связанная с системами троек и четверок Штейнера, была поставлена У.С.Б. Вулхаусом в

---

[3] *Зиновьев В. А., Леонтьев В. К.* О совершенных кодах // Пробл. передачи информ. 1972. Т. 8. № 1. С. 26–35. [4] *Tietavainen A.* A short proof for the nonexistence of unknown perfect codes over GF(q), q > 2 // Ann. Acad. Sci. Fenn. 1974. A I 580. P.1–5. [5] *Васильев Ю. Л.* О негрупповых плотно-упакованных кодах // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. 1962. Вып. 8. С. 337–339.
[6] *Августинович С. В., Соловьева Ф. И., Хеден У.* О структуре группы симметрий кодов Васильева // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. № 2. С. 42–49.
[7] *Августинович С. В., Соловьева Ф. И.* Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами $\tilde{\alpha}$-компонент // Пробл. передачи информ. 1997. Т. 33. № 3. С. 15–21.

1844 г. и формулировалась как определение существования различных сочетаний k-элементных множеств (также называемых блоками) из некоторого n-элементного множества, при условии, что никакие t символов, встречающиеся в некотором блоке, не встречаются ни в каком другом блоке из данного сочетания. То есть, из данного n-элементного множества необходимо построить такие k-элементные блоки, что каждая комбинация из t символов встречается в единственном блоке. Задача оказалась чрезвычайно сложной, и сначала рассматривался ее частный случай при $k = 3$, $t = 2$, который был разрешен Т.П. Киркманом в 1847 г. Им было показано, что сочетание блоков с такими параметрами существует лишь при $n \equiv 1, 3\,(mod\,6)$. Независимо от работы Т.П. Киркмана, Я. Штейнер в 1853 г. представил частный случай задачи У.С.Б. Вулхауса при $k = 3$, $t = 2$. Следующий значимый прогресс в решении поставленной У.С.Б. Вулхаусом задачи в случае $k = 4$, $t = 3$ достигнут Х.Ханани только в 1960 г. Им было доказано, что сочетание блоков с такими параметрами существует лишь при $n \equiv 2, 4\,(mod\,6)$. Впоследствии, сочетания блоков из задачи У.С.Б. Вулхауса были названы системами Штейнера, в частности — системами троек Штейнера при $k = 3$, $t = 2$ и системами четверок Штейнера при $k = 4$, $t = 3$.

Известно[8,9], что ранг системы троек Штейнера $STS(n)$ порядка $n = 2^r - 1$ (системы четверок Штейнера $SQS(N)$ порядка $N = 2^r$) варьируется от $2^r - r - 1 = n - \log(n+1) = N - \log N - 1$, ранга кода Хэмминга длины $2^r - 1$ до полного ранга $2^r - 1$.

Нетрудно показать, что носители всех кодовых слов веса 3 в приведенном совершенном двоичном коде C длины $n = 2^r - 1$ образуют систему троек Штейнера $STS(2^r - 1)$, а носители кодовых слов веса 4 в приведенном расширенном совершенном коде $\bar{C}$ длины $N = 2^r$ образуют[10] систему четверок Штейнера $SQS(2^r)$. Если совершенный (расширенный совершенный) код является кодом Хэмминга длины n (расширенным кодом Хэмминга длины N), то соответствующая ему система троек (четверок) Штейнера называ-

[8] *Doyen J., Hubaut X., Vandensavel M.* Ranks of incidence matrices of Steiner triple systems // Math. 1978. S. Z. N 163. P. 251–259. [9] *Teirlinck L.* On projective and affine hyperplanes // J Combin. Theory. 1980. S. A. N 28. P. 290–306. [10] *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж.* Теория кодов, исправляющих ошибки. Пер. с англ. М.: Связь. 1979. 744 с.

ется *Хэмминговой системой троек Штейнера* $STS(\mathcal{H}, n)$ *(Хэмминговой системой четверок Штейнера* $SQS(\bar{\mathcal{H}}, N)$*)*. Если для некоторой системы троек Штейнера $STS(n)$ существует приведенный совершенный двоичный код C, носители всех кодовых слов веса 3 которого образуют данную $STS(n)$, то указанную систему троек Штейнера будем называть *вложимой* в совершенный код C. Понятие системы четверок Штейнера, вложимой в расширенный совершенный двоичный код, определяется аналогично.

В 2007 – 2009 гг. П. Р. Остергардом и О. Поттоненом[11,12] было доказано, что только 33 из 80 неизоморфных систем троек Штейнера порядка 15 являются вложимыми в совершенный код, и только 15590 из 1054163 неизоморфных систем четверок Штейнера порядка 16 вложимы в расширенный совершенный код.

В. Д. Тончевым[13] найдено число различных систем троек Штейнера порядка $2^r - 1$ ранга $2^r - r$, что на 1 превышает минимально возможный ранг. Тем же автором[14] получена аналогичная формула для числа различных систем четверок Штейнера порядка 2^r ранга $2^r - r$. Задача вложимости систем троек (четверок) Штейнера в совершенные (расширенные совершенные) двоичные коды В. Д. Тончевым не рассматривалась. Первые результаты, посвященные этой проблеме, принадлежат В. А. Зиновьеву и Д. В. Зиновьеву[15], где доказано, что все системы четверок Штейнера порядка 2^r, $r > 3$, ранга $2^r - r$ (т.е. ранга "+1") вложимы в расширенные коды Васильева длины 2^r такого же ранга. В.А. Зиновьевым и Д.В.

---

[11] *Östergård P. R. J., Pottonen O.* The perfect binary one-error-correcting codes of length 15: Part 1 – Classification // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. N 55. P. 4657–4660. [12] *Östergård P. R. J., Pottonen O.* There exist Steiner triple systems of order 15 that do not occur in a perfect binary one-error-correcting code // Journal of Combin. Designs. 2007. V. 15. P. 465–468. [13] *Tonchev V. D.* A mass formula for Steiner triple systems $STS(2^n - 1)$ of 2-rank $2^n - n$ // Journal of Combin. Theory. 2001. Series A. N 95. P. 197–208. [14] *Tonchev V. D.* A formula for the number of Steiner quadruple systems on 2^n points of 2-rank $2^n - n$ // Journal of Combin. Designs. 2003. N 11. P. 260–274. [15] *Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.* О кодах Васильева длины $n = 2^m$ и удвоение систем Штейнера $S(n, 4, 3)$ заданного ранга // Пробл. передачи информ. 2006. Т. 42. Вып. 1. С. 13–33.

Зиновьевым[16,17] показано, что все системы троек Штейнера порядка 2^r-1, $r>3$, ранга 2^r-r+1 вложимы в некоторые совершенные двоичные коды, но остается неясным ранг таких кодов.

Изучение свойства метрической жесткости в теории кодирования представляет собой один из важных вопросов, который является недостаточно глубоко исследованным. В каждом конкретном случае выяснение вопроса о метрической жесткости – довольно нетривиальная задача. Приведем дополнительные определения.

Отображение $I: C \to C'$, где C, C' – равномощные коды пространства $\mathbb{F}_q^n$, называется *изометрией* кода C в код $I(C)=C'$, если выполняется $d(x,y)=d(I(x),I(y))$ для всех кодовых слов x,y из C, где d – расстояние Хэмминга. Два кода C и D из $\mathbb{F}_q^n$ называются *эквивалентными*, если существует изометрия пространства $\mathbb{F}_q^n$, переводящая код C в код D.

Хорошо известно, что *автоморфизмы пространства* $\mathbb{F}_q^n$ исчерпываются всеми изометриями $\mathbb{F}_q^n$ и выглядят следующим образом:

$$Aut(\mathbb{F}_q^n)=\{(\pi;\sigma_1,\ldots,\sigma_n): \pi\in S_n,\ \sigma_i\in S_q,\ 1\le i\le n\},$$

где S_n и S_q – симметрические группы порядка n и q соответственно.

В литературе известно несколько определений метрической жесткости. Наиболее общим является следующее: код $C\subset\mathbb{F}_q^n$ называется[18,19,20] *метрически жестким*, если всякая изометрия $I: C\to C'$, для любого кода C', равномощного коду C, продолжается до изометрии (автоморфизма) пространства $\mathbb{F}_q^n$. Код $C\subset\mathbb{F}_q^n$ – *метрически жесткий в слабом смысле*, если всякий код $C'=I(C)$ эквивалентен коду C. Наконец, код $C\subset\mathbb{F}_q^n$ называется *метрически*

---

[16] *Zinoviev D. V., Zinoviev V. A.* Steiner Triple Systems $S(2^m-1,3,2)$ of 2-rank $r\le 2^m-m+1$: Construction and Properties // Proc. of 13th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria. June 15–21, 2012). P. 358—363. [17] *Zinoviev V. A., Zinoviev D. V.* Steiner Triple Systems $S(2^m-1,3,2)$ of Rank 2^m-m+1 over $\mathbb{F}_2$ // Problems of Inform. Transm. 2012. V. 48. N 2. P. 102–126. [18] *Августинович С. В.* Об изометричности плотно упакованных бинарных кодов // Труды института математики. СО РАН. 1994. Т. 27. С. 3–5. [19] *Solov'eva F. I., Avgustinovich S. V., Honold T., Heise W.* Metrically rigid codes // Proc. of 6th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory. (Pskov, Russia. Sept. 6–12, 1998). P. 215–219. [20] *Solov'eva F. I., Avgustinovich S. V., Honold T., Heise W.* On the Extendability of Code Isometries // J. of Geometry. 1998. V. 61. N 1/2. P. 3–16.

жестким в узком смысле, если для всякой изометрии $I : C \to C$ существует некоторая изометрия I' пространства $\mathbb{F}_q^n$, такая, что I и I' на словах кода C действуют одинаково, т.е. $I|_C = I'|_C$.

Если код не является метрически жестким (метрически жестким в слабом смысле, метрически жестким в узком смысле), будем называть его *метрически нежестким* (*метрически нежестким в слабом смысле, метрически нежестким в узком смысле*).

Исследования метрической жесткости кодов начаты в 1994г. С. В. Августиновичем, которым была доказана метрическая жесткость в слабом смысле совершенных двоичных кодов длины больше 15. Хорошо известно, что некоторые двоичные коды Адамара длины $n \geq 16$, полученные из матриц Адамара одного порядка заменой 1 на 0 и -1 на 1 являются метрически нежесткими, поскольку существуют такие неэквивалентные матрицы и, соответственно, неэквивалентные коды Адамара. В 1998 г. Ф. И. Соловьева, С. В. Августинович, Т. Хонольд, В. Хайзе доказали, что:

а) все совершенные q-ичные коды являются метрически жесткими, за исключением двоичного кода Хэмминга длины 7 и троичного кода Хэмминга длины 4;

б) все q-ичные $(n, n-1)$ MDS-коды являются метрически жесткими, за исключением двух кодов длины 3 и одного кода длины 4;

в) все q-ичные $(q, 2)$ и $(q+1, 2)$ MDS-коды являются метрически нежесткими, за исключением $(2, 2)$ и $(3, 2)$ MDS-кодов;

г) двоичный линейный код с параметрами $(n, 2^{n-1}, 2)$ является метрически жестким тогда и только тогда, когда $n \neq 4$.

Теми же авторами в 1998 г. установлено, что полные равновесные q-ичные коды являются метрически жесткими. В 2003 г. С. В. Августинович и Ф. И. Соловьева[21] установили, что при $n \geq k^4$ каждый приведенный двоичный код, содержащий 2-(n, k, λ)-схему, является метрически жестким. Поскольку любая t-(v, k, λ)-схема, $t \geq 2$, является 2-(v, k, λ')-схемой, то любой приведенный код, содержащий t-(v, k, λ)-схему, также является метрически жестким. Поэтому все расширенные примитивные коды БЧХ и расширенные совершенные коды являются метрически жесткими. Этим свойством обладают и равномерно упакованные коды, удовлетворяю-

[21] *Августинович С. В., Соловьева Ф. И.* К метрической жесткости двоичных кодов // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39. № 2. С. 23–28.

щие условию $d - \rho \geq 2$, где d – кодовое расстояние, ρ – радиус покрытия, к которым относятся такие важные классы кодов, как коды БЧХ с расстоянием 5 и 7, коды Препараты в широком смысле, коды Геталса в широком смысле с расстоянием 7, а также соответствующие им расширенные коды.

Цель данной **работы** состоит в выяснении вопроса о том, какие системы троек и четверок Штейнера малых рангов вложимы в совершенные и расширенные совершенные двоичные коды таких же рангов соответственно, а также в исследовании вопроса метрической жесткости для некоторых классов кодов.

Методика исследований. В диссертации используются традиционные методы и аппарат алгебраической и комбинаторной теории кодирования, комбинаторного анализа и теории блок-схем.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми. В работе получены некоторые новые конструкции систем троек и четверок Штейнера. Используя описанные в диссертации подходы, установлена метрическая нежесткость отдельных классов кодов.

1. Предложена новая итеративная свитчинговая конструкция для систем троек Штейнера. С помощью свитчингового подхода, найдена классификация систем троек Штейнера $STS(n)$ порядка $n = 2^r - 1$, $r > 3$, ранга не больше $n - \log(n+1) + 2$, вложимых в совершенные двоичные коды длины n такого же ранга. Приведены нижняя и верхняя оценки для числа таких различных систем троек Штейнера порядка n. Доказано также, что любая система троек Штейнера порядка n ранга $n - \log(n+1) + 1$ вложима в совершенный код длины n такого же ранга, и этим кодом является код Васильева. Кроме того, описан класс различных систем троек Штейнера порядка n ранга $n - \log(n+1) + 2$, не вложимых в совершенные двоичные коды длины n ранга $n - \log(n+1) + 2$, а также приведена нижняя оценка числа таких систем.

Хорошо известно, что при удалении одного и того же произвольного элемента из всех блоков любой фиксированной системы четверок Штейнера порядка N получившееся множество троек является системой троек Штейнера порядка $N - 1$. В то же время, несмотря на приведенное свойство и на тот факт, что результаты для систем троек и четверок Штейнера имеют аналогичные формулировки, методы получения этих результатов не всегда могут быть напрямую перенесены с объектов одного вида на объекты другого вида. Системы четверок Штейнера являются более сложными объектами, чем системы троек Штейнера, и приведенные задачи, связанные с этими объектами, требуют различных способов решения.

2. Разработан новый итеративный свитчинговый метод построения систем четверок Штейнера, являющийся модификацией метода Линднера. С помощью свитчингового подхода, дана классификация систем четверок Штейнера $SQS(N)$ порядка $N = 2^r$, $r > 3$, ранга не больше $N - \log N + 1$, вложимых в расширенные совершенные двоичные коды длины N такого же ранга. В работе приводятся верхняя и нижняя оценки числа таких различных систем четверок Штейнера порядка N. Описан класс различных систем четверок Штейнера порядка N ранга $N - \log N + 1$, не являющихся вложимыми в расширенные совершенные двоичные коды длины N ранга $N - \log N + 1$, найдена нижняя оценка числа таких систем.

3. Для доказательства метрической нежесткости кодов было предложено сравнить порядки групп изометрий и автоморфизмов данного кода – факт о том, что порядок группы изометрий рассматриваемого кода превосходит порядок группы его автоморфизмов, является гарантией существования некоторой изометрии данного кода, не продолжаемой до автоморфизма пространства $\mathbb{F}_q^n$. Другим методом доказательства метрической нежесткости кода является нахождение неэквивалентных кодов с одинаковыми параметрами – так как произвольный код изометричен любому другому коду с параметрами рассматриваемого, то условие существования неэквивалентных кодов с одинаковыми параметрами гарантирует существование кода, изометричного первоначальному, но неэквивалентного ему, следовательно, можно найти некоторую изометрию данного кода, не продолжаемую до автоморфизма пространства $\mathbb{F}_q^n$. С помощью этих методов доказана метрическая нежесткость трех классов q-ичных эквидистантных кодов; кодов, отвечающих одному классу аффинно разрешимых схем и некоторых двоичных эквидистантных кодов.

Научная и практическая значимость. Результаты работы являются теоретическими и могут быть применены в теории кодирования и теории блок-схем для дальнейшего исследования открытого вопроса вложимости произвольной системы троек (четверок) Штейнера в некоторый совершенный (расширенный совершенный) двоичный код. Метрическая жесткость произвольного кода связана со строением группы изометрий и группы автоморфизмов кода, изучение которых представляется важным с точки зрения практического применения кодов для передачи информации, а также может найти применение в криптографии.

Апробация работы. Все результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: на международных конференциях по алгебраической и комбинаторной теории кодирования ACCT-XII (Новосибирск, Россия, 2010 г.) и ACCT-XIII (Поморие, Болгария, 2012 г.); на конференции "Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики" (Академгородок, Новосибирск, Россия, 2011 г.); на конференции "Информационные технологии и системы" (Петрозаводск, Россия, 2012 г.); на конференции "Мальцевские чтения" (Академгородок, Новосибирск, Россия, 2012 г.); на молодежной школе-семинаре "Дискретные модели и методы принятия решений" (Академгородок, Новосибирск, Россия, 2013 г.). Результаты диссертации были доложены на семинаре кафедры "Комплексной защиты информации" СПбГУАП и на семинарах "Теория кодирования" и "Дискретный анализ" НГУ и Института математики СО РАН. Отдельные результаты диссертации отмечены грантом Президента РФ для молодых российских ученых в 2011–2012 гг., а также грантом "Академическая мобильность" Российского Фонда Фундаменальных Исследований в 2012 году.

Основные результаты диссертации.

1. Предложены итеративные свитчинговые конструкции систем троек и четверок Штейнера.

2. Приведены классификации систем троек и четверок Штейнера порядков $n = 2^r - 1$, $r > 3$ и $N = n + 1$ ранга не больше $n - \log(n + 1) + 2$, вложимых в совершенные и расширенные совершенные двоичные коды длины n и N таких же рангов соответственно. Найдены нижние и верхние оценки для числа таких различных систем троек и четверок Штейнера порядков n и N соответственно.

3. Доказано, что произвольная система троек Штейнера поряд-

ка n ранга $n - log(n+1)+1$ вложима в некоторый совершенный код Васильева длины n такого же ранга.

4. Построены классы различных систем троек и четверок Штейнера порядков n и N ранга $n - \log(n+1)+2$, не вложимых в совершенные и расширенные совершенные двоичные коды длины n и N соответственно такого же ранга. Приведены нижние оценки числа таких систем.

5. Доказано, что два класса q-ичных эквидистантных кодов, один класс двоичных эквидистантных кодов, а также коды, отвечающие одному классу аффинно разрешимых схем, являются метрически нежесткими.

На защиту выносятся методы построения систем троек и четверок Штейнера, классификация систем троек и четверок Штейнера малых рангов, вложимых в совершенные и расширенные совершенные двоичные коды таких же рангов соответственно, подходы к доказательству метрической нежесткости кодов и их применение для некоторых классов кодов.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (67 наименований). Объем диссертации составляет 111 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации. Обсуждается новизна работы и приводится краткий обзор ранее полученных результатов, связанных с совершенными кодами, системами троек и четверок Штейнера, метрической жесткостью кодов. Приводится список основных результатов диссертации.

В первой главе предложен новый итеративный свитчинговый метод построения класса систем троек Штейнера $STS(n)$ порядка $n = 2^r - 1$, $r > 3$. Доказана вложимость данного класса $STS(n)$ ранга не более $n - \log(n+1)+2$ в совершенные двоичные коды длины n такого же ранга, найдены нижняя и верхняя оценки числа таких систем троек Штейнера. Также приведены различные системы троек Штейнера порядка n ранга $n - \log(n+1)+2$, не вложимые в совершенные двоичные коды длины n такого же ранга. Указана нижняя оценка числа таких систем троек Штейнера.

В параграфе 1.1 приведены основные понятия, относящиеся к методу свитчингов для совершенного кода, такие, как свитчинг в коде, i-компонента кода, ijk-компонента кода, свитчинг в системе троек Штейнера. Приведем определения этих понятий.

В общем случае говорят, что код $C' = (C \setminus R) \cup R'$ получен *свитчингом* множества R на множество R' в двоичном коде C, если код C' имеет те же параметры, что и C. Такое множество R называется *компонентой* кода C. Более подробно, пусть R – произвольное подмножество совершенного двоичного кода C. *Свитчингом* множества R по i-ой координатной позиции называется замена значения i-й координатной позиции всех векторов множества R. Получившееся в результате такого свитчинга множество будем обозначать через $R+i$ (такое множество часто обозначается[22] через $R+e_i$, где e_i – вектор веса 1 с ненулевой i-й координатной позицией, но в диссертации, в целях более удобного изложения, используется первое обозначение).

Пусть $K(R)$ – множество всех векторов из $\mathbb{F}^n$, находящихся на расстоянии не больше 1 от R. Множество R называется *i-компонентой* совершенного кода C, если $K(R) = K(R+i)$. Полученный в результате новый совершенный код $C' = (C \setminus R) \cup (R+i)$ имеет те же параметры, что и C. В этом случае говорят, что код C' получен из кода C *свитчингом* i-компоненты R. Пусть $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Множество R называется *α-компонентой* совершенного кода C, если R является i-компонентой для любого $i \in \alpha$.

Понятие свитчинга для t-$(v,k,1)$-схемы определяется аналогично понятию свитчинга в коде. Два множества R и R', состоящие из k-элементных подмножеств множества V, называются *равновесными*[23], если каждое неупорядоченное подмножество из t элементов, которое может быть найдено в k-элементных подмножествах одного множества, встречается также и в k-элементных подмножествах другого множества. Говорят, что t-$(v,k,1)$-схема $A' = (A \setminus R) \cup R'$ получена *свитчингом* множества блоков R на множество блоков R'

---

[22] *Solov'eva F. I.* On perfect codes and related topics // Com^{2}Mac Lecture Note Series 13, Pohang. 2004. 80 P. [23] *Петренюк А. Я.* Признаки неизоморфности систем троек Штейнера // Укр. матем. ж. 1972. Т. 24. Вып. 6. С. 772–780.

в t-$(v,k,1)$-схеме A, если R и R' – равновесные множества. Такое множество R (равно как и множество R') В. А. Зиновьев и Д. В. Зиновьев[24] называют *компонентой*.

Понятие свитчинга для системы троек Штейнера определяется как частный случай свитчинга для t-$(v,k,1)$-схемы. Говорят, что система троек Штейнера $STS'(n) = (STS(n)\backslash R) \cup R'$ получена *свитчингом* множества блоков R на множество блоков R' в $STS(n)$, если R и R' – равновесные множества, т.е. каждая пара элементов, которая может быть найдена в тройках множества R, встречается также и в тройках множества R'.

В параграфе 1.2 приведена итеративная свитчинговая конструкция систем троек Штейнера, позволяющая из произвольной системы троек Штейнера порядка $m \equiv 1,3(mod\,6)$ строить систему троек Штейнера порядка $n = 4m+3$. В частности, с помощью этого метода можно из Хэмминговой системы троек Штейнера порядка m строить Хэммингову систему троек Штейнера порядка n.

Также указаны определенные правила (обозначенные в работе через $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}2$, $\mathcal{B}1$, $\mathcal{B}2$, $\mathcal{B}3$), позволяющие делать свитчинги Пашконфигураций исходной системы троек Штейнера порядка n, построенной по указанному методу из произвольной системы троек Штейнера порядка m. Приведенные правила позволяют получать различные системы троек Штейнера порядка n разного ранга, превосходящего ранг Хэмминговой системы троек Штейнера. Обозначим класс таких систем троек Штейнера порядка n ранга r через $\tilde{S}w(STS(n),r)$. Через $Sw(STS(n),r)$ обозначим подкласс класса $\tilde{S}w(STS(n),r)$, содержащий системы троек Штейнера порядка n ранга r, которые получены из произвольной системы троек Штейнера порядка n посредством правил $\mathcal{A}1$, $\mathcal{B}1$, $\mathcal{B}2$.

Найдена нижняя оценка числа различных $STS(n)$, построенных с помощью приведенной конструкции.

Теорема 1. *Для числа $R(n)$ всех различных* STS(n)*, $n = 4m+3$, $m \geq 3$, лежащих в классах $\tilde{S}w(STS(n),r)$ при всех $r \geq n - log(n+1)$, верно* $R(n) \geq \left(c_1 \cdot n \cdot 2^{n/2} \cdot 310^{(n^2-10n)/96}\right) \cdot n(n-1)/12 \cdot R((n-3)/4)(1-o(1))$*, где* $c_1 = 2^{-219/96} \cdot 155^{21/96}$.

[24] *Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.* Системы Штейнера $S(v,k,k-1)$: компоненты и ранг // Пробл. передачи информ. 2011. Т. 47. № 2. С. 52–71.

Параграфы 1.3 и 1.4 посвящены вопросу вложимости построенных в параграфе 1.2 систем троек Штейнера в совершенные коды и основаны на свитчинговом методе (С. В. Августинович, Ф. И. Соловьева, 1997 г.) построения совершенных кодов.

Основные идеи этого метода состоят в следующем. Пусть множество α содержится в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого числа n. Предположим, что имеется некоторый совершенный код длины n, разбитый на α- и i-компоненты, причем $i \in \alpha$. Сначала для каждой α-компоненты выбирается элемент i из множества α и производится свитчинг произвольного числа i-компонент этой α-компоненты на множество новых i-компонент той же самой мощности. После этого можно заменить (или не менять) полученную α-компоненту на новую α-компоненту с помощью свитчингов неиспользованных ранее координат из множества α. В результате получается совершенный код, который является отличным от первоначального совершенного кода, или даже неэквивалентным ему. Часто в качестве первоначального кода используют код Хэмминга – его линейная структура позволяет напрямую отслеживать изменения, происходящие в коде вследствие свитчингов.

Следующее утверждение позволяет производить свитчинги i- и ijk-компонент в коде Хэмминга.

Утверждение 1. (С. В. Августинович, Ф. И. Соловьева[7]) *Код Хэмминга H^n представим в виде $H^n = \bigcup\limits_{t=1}^{N_2} R_{ijk}^t$, где R_{ijk}^t – различные непересекающиеся ijk-компоненты, $R_{ijk}^1 = R_{ijk}$.*

В параграфе 1.4 приведены оценки для числа систем троек Штейнера порядка n рангов не больше $n - \log(n+1) + 2$, вложимых в совершенные двоичные коды таких же рангов, а также для числа систем троек Штейнера порядка n ранга $n - \log(n+1) + 2$, не вложимых в совершенные двоичные коды таких же рангов.

В. Д. Тончевым в 1997 г. было получено число $R_1(n)$ различных систем троек Штейнера порядка n ранга не больше $n - \log(n+1) + 1$: $R_1(n) = \left(2^{|STS(\frac{n-1}{2})| - \frac{n-1}{2}} - \frac{2}{n+1}\right) \cdot n!/|Sym(\mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}})|$, где $Sym(\mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}})$ – группа симметрий кода Хэмминга $\mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}}$. С помощью этой работы, используя известную конструкцию Ассмуса-Маттсона[25] для систем троек Штейнера, вложимых в коды Васильева, а также результаты работы С. В. Августиновича, Ф. И. Соловьевой, У. Хедена 2005 г., доказана следующая

Теорема 2. *Любая система троек Штейнера порядка* $n \geq 15$, *ранга* $n - log(n+1) + 1$ *вложима в совершенный код длины* n *такого же ранга, а именно, в код Васильева* V^n_λ.

Пусть $Q(n) = \left(c_2 \cdot 2^{n/2} \cdot 130^{(n^2-10n)/96}\right) \cdot \frac{n(n-1)}{12}(1 - o(1))$, где $c_2 = 2^{-47/96} \cdot 65^{21/96}$, и $S(n) = 2^{|STS(\frac{n-1}{2})|} \cdot n!/2^{\frac{n-1}{2}} \cdot |Sym(\mathcal{H}^{\frac{n-1}{2}})|$. Д. С. Кротовым, В. Н. Потаповым[26] доказано, что любой совершенный двоичный код C длины n ранга не больше $n - \log(n+1) + 2$ может быть получен из некоторого кода Хэмминга последовательными свитчингами i-компонент не более чем по двум координатным позициям i. С помощью данного результата, утверждения 1, описанной в параграфе 1.2 конструкции и правил для свитчингов этой конструкции доказана теорема, представляющая системы троек Штейнера, вложимые в совершенные коды, построенные методом ijk-компонент из двоичного кода Хэмминга:

Теорема 3. *Любая система троек Штейнера порядка* $n = 4m+3$, $m \geq 63$, *из класса* $Sw(STS(n), n - log(n+1) + 2)$, *вложима в некоторый совершенный двоичный код длины* n *такого же ранга. Число* $R_2(n)$ *таких различных систем троек Штейнера удовлетворяет неравенствам* $Q(n) \cdot R(\mathcal{H}, (n-3)/4) - S(n) \leq R_2(n) \leq Q(n) \cdot R(\mathcal{H}, n) - S(n)$, *где* $R(\mathcal{H}, n) = n!/(n(n-1)(n+1-2^2)(n+1-2^3) \cdot \ldots \cdot (n+1)/2)$ *– число различных кодов Хэмминга длины* n.

Отсюда вытекает следующее утверждение о системах троек Штейнера, не вложимых в совершенные коды, построенные методом ijk-компонент из двоичного кода Хэмминга.

Следствие 1. *Системы троек Штейнера порядка* $n = 4m+3$, *полученные свитчингами по правилам* $\mathcal{A}2$ *и (или)* $\mathcal{B}3$ *(в сочетании с правилами* $\mathcal{B}1$, $\mathcal{B}2$ *или* $\mathcal{A}1$ *соответственно), применёнными к Хэмминговой системе троек Штейнера порядка* n, *не вложимы в совершенные коды, построенные методом свитчингов* ijk-

---

[25] *Assmus E. F., Mattson H. F. Jr.* On tactical configurations and error correcting codes // Journal of Combin. Theory. 1967. N 2. P. 243–257. [26] *Кротов Д. С., Потапов В. Н.* О свитчинговой эквивалентности n-арных квазигрупп порядка 4 и совершенных двоичных кодов //Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46. № 3. С. 22–28.

компонент из двоичного кода Хэмминга длины n.

Также найдена нижняя оценка для числа систем троек Штейнера порядка n ранга $n-\log(n+1)+2$, не вложимых в совершенные коды длины n такого же ранга. Пусть $P(n) = \big(((n+1)\cdot 2^{(n-5)/2} + 2n-6)\cdot 310^{(n^2-10n+21)/3\cdot 2^5} - 3n+9\big)\cdot n(n-1)/12$.

Утверждение 2. *Число различных систем троек Штейнера порядка $n \geq 511$ ранга $n-log(n+1)+2$, не вложимых в совершенные коды длины n ранга $n-log(n+1)+2$, можно оценить снизу как $P(n)\cdot R(\mathcal{H},(n-3)/4) - Q(n)\cdot R(\mathcal{H},n)$.*

Заметим, что в связи с результатами В. А. Зиновьева и Д. В. Зиновьева 2012 г., указанные в Утверждении 2 системы троек Штейнера порядка n ранга $n-\log(n+1)+2$ вложимы в совершенные двоичные коды длины n больших рангов.

Во **второй главе** исследуются вопросы, аналогичные рассматриваемым в главе 1, но для систем четверок Штейнера.

В параграфе 2.1 приводятся основные понятия, относящиеся к методу свитчингов в расширенном совершенном коде, такие, как свитчинг множества по двум координатным позициям, il- и $ijkl$-компонента расширенного кода, свитчинг в системе четверок Штейнера. Приведем определения этих понятий.

Свитчингом множества R по i-ой и l-ой координатным позициям называется замена значения i-й и l-й координатных позиций всех векторов множества R. Получившееся в результате такого свитчинга множество будем обозначать через $R+i+l$.

Пусть R и R' – два множества из определения свитчинга в произвольном двоичном коде, данного при описании параграфа 1.1. Множество R называется *il-компонентой* расширенного совершенного двоичного кода $\bar{C}$ длины N, полученного из C расширением по l-ой координатной позиции, если $R' = R+i+l$ для некоторого $i \in \{1,2,\ldots,N\}$. Множество R называется *$ijkl$-компонентой* кода $\bar{C}$, если R является t_1t_2-компонентой для любых $t_1,t_2 \in \{i,j,k,l\}$.

Понятие свитчинга для системы четверок Штейнера определяется аналогично понятию свитчинга для расширенного совершенного двоичного кода. Два множества R и R', состоящие из 4-элементных подмножеств множества $U = \{1,2,\ldots,N\}$, называются *равновесными*, если каждая тройка элементов, встречающаяся в четверках одного множества, может быть найдена также и в четверках другого множества. Говорят, что система четверок Штейнера $SQS'(N) = (SQS(N)\backslash R) \cup R'$ получена *свитчингом* множества блоков R на множество блоков R' в $SQS(N)$, если R и R' – равновесные множества. В. А. Зиновьев и Д. В. Зиновьев также называют такие множества R и R' *компонентами.*

В параграфе 2.2 приведена свитчинговая конструкция систем четверок Штейнера. Данная конструкция позволяет из произвольной системы четверок Штейнера порядка $m \equiv 2, 4 (mod\, 6)$ строить систему четверок Штейнера порядка $N = 4m$, в том числе, из Хэмминговой системы четверок Штейнера порядка m получать Хэммингову систему четверок Штейнера порядка N.

С помощью упомянутой выше работы С. В. Августиновича, Ф. И. Соловьевой, 1997 г., доказана следующая лемма о разбиении на компоненты Хэмминговой системы четверок Штейнера:

Лемма 2. *Пусть* $\{i, j, k, l\}$ *– носитель любого вектора веса* 4 *произвольного расширенного двоичного кода Хэмминга длины* N. *Тогда Хэммингова система четверок Штейнера* $SQS(\bar{\mathcal{H}}, N)$ *представима в виде объединения подмножеств* $1 + N(N-4)(N-8)/(3 \cdot 2^9)$ *непересекающихся* $ijkl$*-компонент, каждая из которых, в свою очередь, является объединением подмножеств либо* $N/4 + (N-4)(N-8)/2^5$*, либо* 8 *непересекающихся* il*-компонент.*

Также в параграфе 2.2 указаны свитчинги компонент исходной Хэмминговой системы четверок Штейнера порядка N, позволяющие получать различные системы четверок Штейнера порядка N различного ранга, превосходящего ранг Хэмминговой системы четверок Штейнера. Обозначим класс таких систем четверок Штейнера порядка N ранга r через $Sw(SQS(N), r)$. Доказано, что классы $Sw(SQS(N), r)$ при $N - logN - 1 \le r \le N - logN + 1$ вложимы в расширенные совершенные коды, полученные методом свитчингов $ijkl$-компонент из расширенного кода Хэмминга $\bar{\mathcal{H}}^N$. Найдена нижняя оценка числа таких различных $SQS(N)$:

Теорема 4. *Для числа* $R_2(N)$ *различных систем четверок Штейнера из классов* $Sw(SQS(N), r)$ *при* $N - logN - 1 \le r \le N - logN + 1$*, вложимых в расширенный совершенный код, верно*

$$R_2(N) \ge (3^2 \cdot 2^8 - 8)^{\frac{N^3 - 12N^2 + 32N}{3 \cdot 2^9}} \cdot 2^{\frac{N^2 - 4N}{32}} \cdot \frac{N^3 - 3N^2 + 2N}{8} \cdot R(\bar{\mathcal{H}}, N/4) \cdot \cdot (1 - o(1)),$$

где $R(\bar{\mathcal{H}}, N/4) = (N/4)!/((N/4-1)(N/4-2)(N/4-2^2)\cdot\ldots\cdot(N/4)/2)$ *– число различных* $SQS(\bar{\mathcal{H}}, N/4)$.

Параграф 2.3 посвящен вопросу вложимости построенных в параграфе 2.2 систем четверок Штейнера порядка N ранга не более $N - \log N + 1$ в расширенные совершенные двоичные коды такого же ранга. Приведены нижняя и верхняя оценки числа таких систем четверок Штейнера.

Известен факт[6], что расширенный код Васильева $\bar{V}_N^{\lambda}$ длины N имеет ранг $N - \log N$. В диссертации, с помощью свитчингового подхода, доказано, что всякая система четверок Штейнера $SQS(N)$ ранга $N - \log N$ вложима в некоторый расширенный совершенный двоичный код длины N такого же ранга, и таким кодом является расширенный код Васильева.

Теорема 5. *Любая система четверок Штейнера порядка* N *ранга* $N - logN$ *вложима в некоторый расширенный совершенный код Васильева длины* N *такого же ранга.*

Заметим, что другое доказательство этого факта, использующее каскадный метод, в отличие от рассматриваемого в данной работе свитчингового метода, было ранее опубликовано В.А. Зиновьевым и Д.В. Зиновьевым[27].

Известно[26], что всякий расширенный совершенный двоичный код длины N ранга не больше $N - \log N + 1$ может быть получен из некоторого расширенного кода Хэмминга свитчингами il-компонент не более чем по двум парам координатных позиций.

Пусть $P(N) = (3^2 \cdot 2^8 - 8)^{\frac{N^3 - 12N^2 + 32N}{3 \cdot 2^9}} \cdot 2^{\frac{N^2 - 4N}{32}} \cdot \frac{N(N-1)(N-2)}{8}(1 - o(1))$, а $S(N) = 2^{|SQS(\frac{N}{2})| - \frac{N}{2}} \cdot N!/|Sym(\bar{\mathcal{H}}, \frac{N}{2})|$. Справедлив следующий основной результат данной главы:

Теорема 6. *Класс* $Sw(SQS(N), N - logN + 1)$, $N \geq 64$, *совпадает с классом систем четверок Штейнера порядка* N, *вложимых в расширенные совершенные двоичные коды такого же ранга, построенные методом* $ijkl$*-компонент из расширенного кода Хэмминга длины* N. *Число* $R_2(N)$ *таких различных систем четверок Штейнера удовлетворяет неравенствам*

$$P(N) \cdot R(\bar{\mathcal{H}}, N/4) - S(N) \leq R_2(N) \leq P(N) \cdot R(\bar{\mathcal{H}}, N) - S(N).$$

[27] *Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.* О кодах Васильева длины $n = 2^m$ и удвоение систем Штейнера $S(n, 4, 3)$ заданного ранга // Пробл. передачи информ. 2006. Т. 42. Вып. 1. С. 13–33.

В параграфе 2.4 приведены системы четверок Штейнера порядка N ранга $N-\log N+1$, не вложимые в расширенные совершенные двоичные коды ранга $N-\log N+1$, и доказана следующая

Теорема 7. *Для числа $R^{'}(N)$ различных систем четверок Штейнера порядка $N \geq 128$ ранга $N-logN+1$, не вложимых в расширенные совершенные двоичные коды, построенные методом $ijkl$-компонент из расширенного двоичного кода Хэмминга, верно*

$$R^{'}(N) \geq (591N^2+9456N)^{\frac{N}{64}-1} \cdot (N^3-12N^2+32N) \cdot \tfrac{197}{16} \cdot R(\bar{\mathcal{H}}, \tfrac{N}{4})(1-o(1)).$$

В **третьей главе** исследуется вопрос метрической жесткости двух классов q-ичных эквидистантных кодов, одного класса двоичных эквидистантных кодов, а также кодов, отвечающих одному классу аффинно разрешимых схем.

В параграфе 3.1 приведены основные понятия, касающиеся метрической жесткости кодов.

Группой автоморфизмов $Aut(C)$ кода C называется совокупность автоморфизмов пространства $\mathbb{F}_q^n$, переводящих код в себя: $Aut(C) = \{(\pi; \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in Aut(\mathbb{F}_q^n) : (\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)(C) = C\}$.

Эквидистантным кодом с расстоянием d называется код, в котором расстояние между любыми двумя кодовыми словами совпадает и равно d.

Исходя из приведенных определений метрически жестких кодов на стр. 7 и 8, несложно понять, что понятие метрической жесткости является обобщающим в том смысле, что всякий метрически жесткий код является также метрически жестким в слабом смысле и метрически жестким в узком смысле. Следовательно, всякий метрически нежесткий в узком смысле код является метрически нежестким. Кроме того, всякий метрически нежесткий в слабом смысле код также является метрически нежестким. Поэтому в случаях, когда определение порядков групп автоморфизмов и изометрий кодов становится затруднительным, метрическую нежесткость кодов целесообразно доказывать посредством нахождения неэквивалентных кодов с данными параметрами.

Нетрудно увидеть отличие определений метрической жесткости и метрической жесткости в слабом смысле на примере кода Хэмминга длины 7. Код Хэмминга длины 7 метрически жесткий в слабом смысле, поскольку он единствен с точностью до эквивалентности. С другой стороны, код Хэмминга является метрически нежестким в силу того, что мощность множества его изометрий, фиксирующих нулевое слово, больше мощности группы симметрий этого кода. Отличие определений метрической жесткости и метрической жесткости в узком смысле покажем на следующем примере. Рассмотрим двоичный код $C = \{0000, 1100, 1010, 1001\}$. Легко проверить, что всякая изометрия кода C, переводящая этот код в себя, продолжаема до изометрии всего пространства $\mathbb{F}^4$. Следовательно, данный код является метрически жестким в узком смысле. С другой стороны, он метрически нежесткий в слабом смысле, поскольку существует код, например, код $D = \{0000, 1100, 1010, 0110\}$, изометричный коду C, но не эквивалентный ему.

В параграфе 3.2 доказана метрическая нежесткость некоторых классов кодов.

Теорема 8. *Эквидистантный код с параметрами $(q, (q-1)^2, q-1)_q$, где $q \geq 5$, q и $q-1$ – степени простых чисел, является метрически нежестким.*

Теорема 9. *Оптимальный q-ичный эквидистантный код с параметрами $(\frac{q^2\mu-1}{q-1}, q^2\mu, q\mu)_q$, где $q \geq 3$, $\mu \geq 1$, является метрически нежестким.*

Теорема 10. *Эквидистантные коды с параметрами $(n, [\frac{2n}{d}], d)$, при $\sqrt{16+4n}-4 < d \leq n/2$, $d \equiv 0 \ (mod\, 2)$, являются метрически нежесткими.*

Также доказана метрическая нежесткость кодов, соответствующих одному классу аффинно-разрешимых схем:

Теорема 11. *Код, отвечающий аффинно разрешимой схеме с параметрами $(n, qs, s, q\mu, \lambda)$, где $n = q^2\mu$, $q \geq 3$, $s \geq n \cdot c_q^\mu$, $c_q^\mu = log_2 n / log_2(q! \cdot n)$, является метрически нежестким.*

Результаты первой главы были получены совместно с Ф.И. Соловьевой и Е.С Филимоновой и опубликованы в работах [3], [7], [8]. Результаты второй главы, за исключением результатов параграфа 2.4, получены совместно с Ф.И. Соловьевой. Результаты второй главы опубликованы в [2], [4], [6], [7], [10].

Автор выражает искреннюю глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Ф. И. Соловьевой, под руководством которой была выполнена эта диссертация, за постоянное внимание и помощь в работе, а также С. В. Августиновичу и про-

фессору В. А. Зиновьеву за полезные обсуждения и замечания.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Ковалевская Д. И.* О метрической жесткости некоторых классов кодов // Пробл. передачи информ. 2011. Т. 47. Вып. 1. С. 19—32.

2. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И.* О системах четверок Штейнера малого ранга, вложимых в расширенные совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т.19. № 5. С. 47—62.

3. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И., Филимонова Е. С.* О системах троек Штейнера малого ранга, вложимых в совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т.20. № 3. С. 3—25.

4. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И.* Системы четверок Штейнера малых рангов и расширенные совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т.20. № 4. С. 46—64.

5. *Kovalevskaya D. I.* On metrical rigidity of some classes of codes // Proc. of 12th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Novosibirsk, Russia. Sept. 5–11, 2010). Novosibirsk: Sobolev Inst. of Math. 2010. P. 189—194.

6. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И.* О системах четверок Штейнера малого ранга, вложимых в расширенные совершенные коды // Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики (Академгородок, Новосибирск, Россия. 11–14 октября 2011). http://conf.nsc.ru/files/conferences/Lyap-100/abstracts/744 71/74521/ KovalSol_Theses.pdf.

7. *Kovalevskaya D. I., Filimonova E. S., Solov'eva F. I.* Steiner triple (quadruple) systems of small ranks embedded into perfect (extended perfect) binary codes // Proc. of 13th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria. June 15–21, 2012). Bulgaria: Institute of Mathematics and Informatics BAS. 2012. P. 203—208.

8. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И., Филимонова Е. С.* Систе-

мы троек Штейнера малого ранга и совершенные двоичные коды // Информационные технологии и системы (Петрозаводск, Россия. 19–25 августа, 2012). http://www.itas2012.iitp.ru/pdf/1569601371.pdf.

9. *Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И.* О системах четверок Штейнера малых рангов и расширенных совершенных двоичных кодах // Мальцевские чтения (Академгородок, Новосибирск, Россия. 12–16 ноября, 2012). http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/12/malmeet2012.pdf.

10. *Ковалевская Д. И.* Системы Штейнера малых рангов и совершенные двоичные коды // Материалы школы-семинара "Дискретные модели и методы принятия решений"(Академгородок, Новосибирск, Россия. 21–23 июня, 2013). Новосибирск: издательство Института математики. 2013. С. 263–264.

Ковалевская Дарья Игоревна

О вложимости систем Штейнера в совершенные коды

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 24.10.13. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,395. Уч.-изд. л. 1,24. Тираж 100 экз. Заказ N 58.

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
пр. Ак. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090