

На правах рукописи

Душенин Дмитрий Игоревич

**АБЕЛЕВЫ Р-ГРУППЫ И АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ
ОТНОСИТЕЛЬНО ОРАКУЛА**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Гончаров Сергей Савостьянович

Официальные оппоненты:

Хисамиев Назиф Гарифуллинович, доктор физико-математических наук, профессор, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, заведующий кафедрой

Мельников Александр Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, Университет королевы Виктории, г. Веллингтон, Новая Зеландия, научный сотрудник

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится «16» ноября 2013 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «11» октября 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А. И. Стукачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Тематика диссертации. Диссертация посвящена исследованию тьюринговых степеней автоустойчивости абелевых r -групп. Эта задача является одной из многих других, изучаемых в теории конструктивных моделей, которая, в свою очередь, берет начало с работ А.И. Мальцева [15], [16] и М. Рабина [37] середины прошлого века и с тех пор активно развивается, благодаря трудам множества математиков со всего мира. Этому разделу математической логики, а также тесно связанной с ним теории вычислимости, посвящено очень большое количество литературы. Так подробную информацию по основам теории вычислимости можно найти в [20], по основам классической теории моделей – в [12]. В качестве особенно важных и современных источников стоит выделить [6], [30] и [41].

Объектом исследования в диссертации являются конструктивизируемые аддитивные абелевы r -группы и тьюринговы степени их автоустойчивости. Известно, что аддитивная абелева группа представляется в виде прямой суммы редуцированной и полной подгрупп. Любая полная аддитивная абелева r -группа является прямой суммой конечного или бесконечного числа квазициклических групп (или групп типа p^∞). Что касается редуцированных абелевых r -групп, то еще в 1933-м году Ульмом был получен известный результат о том, что редуцированные r -группы одинакового типа τ , все соответствующие факторы которых изоморфны, сами являются изоморфными. Этот результат говорит о том, что любая редуцированная r -группа с точностью до изоморфизма определяется своими факторами. Эти и многие другие известные результаты теории групп можно найти в [13] или [21]. В частности, более подробную информацию по абелевым p -группам можно найти в [32]. Позднее для некоторых видов редуцированных r -групп были предложены иные, более удобные, подходы к доказательству теоремы Ульма. Например, в [39] вводятся понятия r -базисных деревьев, которые ассоциируются с абелевыми r -группами и делают интуитивное понимание их структуры куда более доступным.

Модель называется вычислимой, если ее носитель является вычислимым подмножеством натуральных чисел, а операции и предикаты – равномерно вычислимыми функциями на этом подмножестве. Если модель имеет вычислимую изоморфную копию,

то ее называют конструктивизируемой и говорят, что она имеет конструктивизацию. Модель называется сильно конструктивизируемой, если она имеет вычислимую изоморфную копию, для которой существует алгоритм, позволяющий по любой формуле исчисления предикатов и любому набору элементов определить, выполнена ли формула на этом наборе. В таком случае также говорят, что модель имеет сильную конструктивизацию. Понятие конструктивной алгебры впервые было предложено А.И. Мальцевым в [15]. Понятие же сильно конструктивной модели впервые было введено Ю.Л. Ершовым в [11].

Вопрос о конструктивизируемости и сильной конструктивизируемости заданной модели является одним из самых важных и интересных в теории конструктивных моделей. Так Ю.Л. Ершов в [10] доказал теорему о ядре, с помощью которой можно переносить конструктивизации алгебры на ее замыкания, Н.Г. Хисамиев в [22] получил результат о том, что любая счетная модель ω_1 -категоричной теории сильно конструктивизируема, а С.С. Гончаровым в [1] и М.Г. Перетяжкиным в [19] независимо найдены критерии сильной конструктивизируемости однородных моделей. Что касается классических классов алгебраических структур, то этому вопросу также посвящена целая серия работ. Например, А.И. Мальцевым в [16] были описаны конструктивизируемые абелевы группы без кручения ранга 1. Также М. Рабином в [37] была доказана сильная конструктивизируемость счетного алгебраически замкнутого поля, А.С. Морозовым в [17] получено, что счетные насыщенные булевы алгебры сильно конструктивизируемы, а Дж. Мидом в [36] установлено, что любая счетная простая булева алгебра сильно конструктивизируема.

В.П. Добрица в [8] и А.Т. Нуртазин в [18] также доказали, что конструктивизируемые абелевы группы обладают конструктивизацией с рекурсивно перечислимым базисом.

Изучению различных алгоритмических свойств групп посвящена серия работ Н.Г. Хисамиева, главные результаты которых собраны в его докторской диссертации. Так в [23] показано, что прямая сумма циклических и квазициклических p -групп обладает сильной X -конструктивизацией тогда и только тогда, когда ее характеристика X -конструктивна (здесь X – некоторый оракул). В этой же работе, а также в [9] (в соавторстве с В.П. Добрицей и А.Т. Нуртазиным) представлены достаточные условия на ульмовы факторы

редуцированной абелевой p -группы для ее конструктивизируемости и сильной конструктивизируемости. Также в [9] доказано, что ульмов тип конструктивной p -группы является конструктивным ординалом. В [24] представлен критерий конструктивизируемости прямых сумм циклических абелевых p -групп, а в [25] и в [26] – аналогичные критерии для прямых сумм циклических и квазициклических абелевых p -групп. Также им доказано, что из конструктивизируемости абелевой группы не следует конструктивизируемость ее редуцированной или полной части. В [28] был впервые сформулирован известнейший критерий конструктивизируемости для редуцированных абелевых p -групп, обладающих элементами бесконечной высоты. Доказательство обобщения этого критерия на нередуцированные p -группы, а также аналогичный критерий сильной конструктивизируемости, можно найти в докторской диссертации Н.Г. Хисамиева. Там же доказан ряд полезных следствий из этих критериев. Также можно выделить критерии существования сильной конструктивизации для p -групп, основанные на определяющих соотношениях и системе порождающих элементов. Найти их можно также в [25]. Там же в качестве примера их применения доказано, что если полная часть сильно конструктивизируемой p -группы имеет конечный ранг, то ее редуцированная часть сильно конструктивизируема.

Что касается конструктивизируемости абелевых групп без кручения, то первым к этому вопросу подошел А.И. Мальцев. В [16] им предложена характеристика групп без кручения ранга 1. А.Г. Курош в [33] и А.И. Мальцев в [14] показали соответствие между классом неизоморфных групп без кручения конечного ранга и некоторым классом матриц с p -адическими числами, а В.П. Добрица в своей работе [7] установил, что группа без кручения конечного ранга обладает конструктивизацией в том и только в том случае, когда соответствующая ей матрица может быть эффективно задана. Далее, Н.Г. Хисамиев в [27] предложил критерий конструктивизируемости абелевых групп без кручения в терминах образующих и определяющих соотношений, а А.Т. Нургазин в [18] доказал, что класс всех групп без кручения не является вычислимым.

Говорят, что конструктивизируемая модель автоустойчива, если любые ее две вычислимые копии вычислимо изоморфны. Также автоустойчивые модели называют вычислимо категоричными. Понятие автоустойчивости впервые было введено А.И. Мальцевым в [15].

Им же в [16] впервые была построена неавтоустойчивая модель. В настоящее время получены критерии автоустойчивости для целого ряда известных классов структур. Так в [4] можно найти доказательство того, что булева алгебра автоустойчива тогда и только тогда, когда она имеет конечное число атомов. Работа [38] содержит в себе следующий результат: линейный порядок вычислимо представим в том и только в том случае, когда в нем имеется конечное число непосредственных следований. Следствиями результатов работы [2] являются признаки неавтоустойчивости некоторых видов векторных пространств и полей: бесконечномерные векторные пространства и алгебраически замкнутые поля бесконечного ранга трансцендентности неавтоустойчивы. В [18] доказывается, что абелева группа без кручения автоустойчива тогда и только тогда, когда ее ранг конечен. Отдельно необходимо упомянуть важнейший результат из [5] о том, что если произвольная конструктивизируемая модель ветвится, то класс ее конструктивизаций эффективно бесконечен. Следствием теоремы о ветвящихся моделях является критерий автоустойчивости для абелевых r -групп: абелева r -группа G автоустойчива тогда и только тогда, когда $G \cong (C(p^\infty))^k \oplus G_1 \oplus (Z(p^l))^\infty$, где $k, l \in \mathbf{N}$ и группа G_1 конечна, либо $G \cong G_1 \oplus G_2$, где группа G_1 – полная, а группа G_2 – конечная. Также этот критерий был независимо доказан в [40]. В работе [3] можно найти еще один признак бесконечной алгоритмической размерности модели.

Если \mathbf{d} – некоторая тьюрингова степень, то говорят, что конструктивная модель M – \mathbf{d} -автоустойчива, если между ее любыми двумя вычислимыми копиями существует \mathbf{d} -рекурсивный изоморфизм. Впервые это понятие было введено в работе [29]. Вопрос об автоустойчивости моделей относительно нерекурсивных степеней зачастую оказывается значительно сложнее, чем вопрос о классической автоустойчивости. Тем не менее, существует ряд частичных результатов по этой теме. Например, в [35] описаны Δ_2^0 -категоричные линейные порядки и булевы алгебры. Также известно, что для любого $n \geq 1$ существуют Δ_{n+1}^0 -автоустойчивые структуры, которые не являются Δ_n^0 -автоустойчивыми. Примером могут служить деревья конечной высоты из работы [34]. Также в [31] содержится результат о том, что редуцированная абелева r -группа типа $\tau < \omega$ является $0^{(2\tau-1)}$ -автоустойчивой. При этом существует редуцированная абелева r -группа типа τ , которая не является $0^{(2\tau-2)}$ -автоустойчивой.

Несмотря на то, что вопрос о степенях автоустойчивости

редуцированных абелевых p -групп решен для любого конечного типа, оказалось, что при добавлении к редуцированной группе полного прямого слагаемого решение этой проблемы усложняется на порядки. Это является причиной того, что она остается частично открытой.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации.

1. Получена верхняя оценка относительно скачков рекурсивной степени для тьюринговых степеней автоустойчивости нередуцированных абелевых p -групп с максимальной редуцированной подгруппой конечного типа τ (опубликовано в [44]).
2. Доказана точность этой оценки для различных видов нередуцированных абелевых p -групп с максимальной редуцированной подгруппой типа 1, 2 и 3 (опубликовано в [42], [43]).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях в теории конструктивных моделей.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны: доклад на «Международной студенческой конференции 2007» (Новосибирск, Россия), доклад на конференции «Мальцевские чтения 2009» (Новосибирск, Россия), доклад на конференции «Вычислимость и модели-2009» (Усть-Каменогорск, Казахстан). Кроме того, результаты докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Конструктивные модели» и «Алгебра и логика», а также на логическом семинаре Университета Нотр-Дам (Нотр-Дам, США).

Публикации. Основные результаты изложены в работах [42]– [44], опубликованных в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий. Публикация [45] является переводом на английский язык работы [42].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы (45 наименований). Теоремы и леммы пронумерованы независимо, сквозным образом. Объем диссертации — 105 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Введение диссертации содержит подробный обзор исследований, связанных с результатами диссертации, а также обоснование актуальности проводимых исследований.

Первая глава диссертации включает в себя определения и сведения из теории групп и конструктивных моделей, необходимые для дальнейшего изложения.

Вторая глава диссертации полностью посвящена получению верхней оценки для тьюринговых степеней автоустойчивости нередуцированных абелевых p -групп конечного типа τ . Главным ее результатом является следующее:

Теорема 1. *Абелева p -группа типа $\tau < \omega$, имеющая полную подгруппу, является $0^{(2^\tau)}$ -автоустойчивой.*

Эта теорема обобщает известный факт для редуцированных абелевых p -групп из [31]. Результаты главы опубликованы в [44].

Третья глава содержит серию примеров, подтверждающих точность оценки, представленной во второй главе, для различных видов нередуцированных абелевых p -групп с редуцированной частью типа 1. Она содержит следующие теоремы:

Теорема 2. *Абелева p -группа G вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^\omega \oplus (C(p^\infty))^\omega$$

обладает двумя конструктивизациями μ и ν , не $0'$ -автоэквивалентными между собой.

Теорема 3. *Существует абелева p -группа G вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{s_i} \oplus (Z(p^\infty))^\omega, \text{ где } \forall i \ s_i \leq \omega,$$

обладающая двумя конструктивизациями μ и ν , не $0'$ -автоэквивалентными между собой.

Теорема 4. *Абелева p -группа G вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^\omega \oplus (C(p^\infty))^q, \text{ где } 1 \leq q \leq \omega,$$

обладает двумя конструктивизациями μ и ν , не $0'$ -автоэквивалентными между собой.

Теорема 5. Существует абелева p -группа G вида

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{s_i} \oplus (C(p^\infty))^q, \text{ где } 1 \leq q \leq \omega \text{ и } \forall i \ s_i \leq \omega,$$

обладающая двумя конструктивизациями μ и ν , не $0'$ -автоэквивалентными между собой.

Основные результаты главы опубликованы в [42] и [45].

Четвертая глава содержит примеры, подтверждающие точность оценки, представленной во второй главе, для различных видов нередуцированных абелевых p -групп с редуцированной частью типа 2 и 3. Она содержит следующие теоремы:

Теорема 6. Пусть абелева p -группа G представляется в виде $G = G_r \oplus (C(p^\infty))$, где G_r – редуцированная p -группа типа 2 по ульмовской классификации с ульмовскими факторами \bar{G}^0 и \bar{G}^1 , изоморфными группе $\bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^\omega$. Тогда G не является $0'''$ -автоустойчивой.

Теорема 7. Пусть абелева p -группа G представляется в виде $G = G_r \oplus (C(p^\infty))^\omega$, где G_r – редуцированная p -группа типа 2 по ульмовской классификации с ульмовскими факторами \bar{G}^0 и \bar{G}^1 , изоморфными группе $\bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^\omega$. Тогда G не является $0'''$ -автоустойчивой.

Теорема 8. Пусть абелева p -группа G представляется в виде $G = G_r \oplus (C(p^\infty))^\omega$, где G_r – редуцированная p -группа типа 3 по ульмовской классификации с ульмовскими факторами \bar{G}^0 , \bar{G}^1 и \bar{G}^2 , изоморфными группе $\bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^\omega$. Тогда G не является $0^{(5)}$ -автоустойчивой.

Основные результаты главы опубликованы в [43].

В заключение автор выражает огромную благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю Сергею Савостьяновичу Гончарову, за постановку интересной задачи, всестороннюю поддержку и терпение в течение всей работы.

Литература

- [1] *Гончаров С. С.* Сильная конструктивизируемость однородных моделей // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. №4. С. 363–388.
- [2] *Гончаров С. С.* Автоустойчивость моделей и абелевых групп // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. №1. С. 23–44.
- [3] *Гончаров С. С.* Предельно эквивалентные конструктивизации // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1980. Т. 2. С. 4–12.
- [4] *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга (НИИ МИОО НГУ). 1996.
- [5] *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. №1. С. 45–58.
- [6] *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга. 1999.
- [7] *Добрница В. П.* О конструктивизациях абелевых групп // Сибирск. матем. журн. 1981. Т. 22. №3. С. 208–213.
- [8] *Добрница В. П.* Некоторые конструктивизации абелевых групп // Сибирск. матем. журн. 1983. Т. 24. №2. С. 18–25.
- [9] *Добрница В. П., Нуртазин А. Т., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных периодических абелевых группах // Сибирск. математ. журн. 1978. Т. 19. №6. С. 1260–1265.
- [10] *Ершов Ю. Л.* Существование конструктивизаций // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. №5. С. 1041–1044.
- [11] *Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели // Избранные вопросы алгебры и логики. 1973. Новосибирск: Наука. С. 111–130.
- [12] *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир. 1977.
- [13] *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука. 1967.
- [14] *Мальцев А. И.* Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. 1938. Т. 4. №1. С. 45–67.

- [15] *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры // УМН. 1961. Т. 16. №3. С. 3–60.
- [16] *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. №5. С. 1009–1012.
- [17] *Морозов А. С.* Сильная конструктивизируемость счетных насыщенных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. №2. С. 193–203.
- [18] *Нуртазин А. Т.* Вычислимые классы и алгебраический критерий автоустойчивости: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Институт математики и механики, Алма-Ата, 1974.
- [19] *Перетяткин М. Г.* Критерий сильной конструктивизируемости однородных моделей // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. №4. С. 430–454.
- [20] *Роджерс С.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир. 1972.
- [21] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. 1977.
- [22] *Хисамиев Н. Г.* Сильно конструктивные модели разрешимой теории // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1974. №3. С. 83–84.
- [23] *Хисамиев Н. Г.* О сильно конструктивных периодических абелевых группах // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1978. №1. С. 58–62.
- [24] *Хисамиев Н. Г.* Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p -групп // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1981. №1. С. 51–55.
- [25] *Хисамиев Н. Г.* Сильно конструктивные абелевы p -группы // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. №2. С. 198–217.
- [26] *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных абелевых p -группах // Тез. докл. 19 всесоюз. конф. по алгебре. Лювов. 1987. С. 299.
- [27] *Хисамиев Н. Г.* Критерий конструктивизируемости абелевых групп без кручения // Тез. докл. 9 всесоюзн. конф. по мат. логике. Ленинград. 1988. С. 168.

- [28] *Хусамиев Н. Г.* Конструктивные редуцированные абелевы p -группы // Тез. докл. международн. конф. по алгебре, посвящ. памяти А.И. Мальцева. Новосибирск. 1989. С. 141.
- [29] *Ash C. J.* Stability of recursive structures in arithmetical degrees // Ann. Pure Appl. Logic. 1986. V. 32. №2. P. 113–135.
- [30] *Ash C. J., Knight J. F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier. 2000.
- [31] *Barker E. J.* Back and forth relations for reduced Abelian p -Groups // Ann. Pure Appl. Logic. 1995. V. 75. №3. P. 223–249.
- [32] *Kaplansky, I.* Infinite Abelian Groups. University of Michigan Press. 1954.
- [33] *Kurosh A. G.* Primitive torsionfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. Math. 1937. V. 38. №1. P. 175–203.
- [34] *Lempp S, McCoy Ch., Miller R., Solomon R.* Computable categoricity of trees of finite height // J. Symbolic Logic. 2005. V. 70. №1. P. 151–215.
- [35] *McCoy Ch.* Δ_2^0 -Categoricity in Boolean algebras and linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. V. 119. №1–3. P. 85–120.
- [36] *Mead J.* Recursive prime models for boolean algebras // Coll. Math. 1979. V. 41. №1. P. 25–33.
- [37] *Rabin M. O.* Computable algebra, general theory and theory of computable fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. №2. P. 341–360.
- [38] *Remmel J. B.* Recursively categorical linear orderings // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83. P. 387–391.
- [39] *Rogers L. A.* Ulm’s theorem for partially ordered structures related to simply presented Abelian p -groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 227. P. 333–343.
- [40] *Smith R. L.* Two theorems on autostability in p -groups // In: Logic Year 1979–80. LNM. 1981. V. 859. P. 302–311.

- [41] *Soare R. I.* Computability Theory and Applications: The Art of Classical Computability, Computability in Europe Series. Springer-Verlag. 2012.

Работы автора по теме диссертации

Оригинальные статьи

- [42] Душенин Д. И. Относительная автоустойчивость прямых сум абелевых p -групп // Вестник НГУ. Серия.: матем., механика, информ. 2010. Т. 10. №1. С. 29–39.
- [43] Душенин Д. И. Абелевы p -группы и автоустойчивость относительно оракула // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. №4, С. 403–411.
- [44] Душенин Д. И. Арифметические изоморфизмы абелевых p -групп // Вестник НГУ. Серия.: матем., механика, информ. 2013. Т. 13. №1. С. 47–56.

Переводы оригинальных статей на английский язык

- [45] *Dushenin D. I.*, Relative autostability of direct sums of Abelian p -groups // Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 186. №3. P. 416–425.

Душенин Дмитрий Игоревич

АБЕЛЕВЫ Р-ГРУППЫ И АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ
ОТНОСИТЕЛЬНО ОРАКУЛА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 8.10.13. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 168.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр.Лаврентьева, 6