

На правах рукописи

Чиркунов Юрий Александрович

**ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук

Новосибирск – 2009

Работа выполнена в Новосибирском государственном техническом университете

Официальные оппоненты: член – корреспондент РАН
доктор физико – математических наук
профессор В. В. Пухначев

доктор физико – математических наук
профессор С. В. Хабиров

доктор физико – математических наук
С. Б. Медведев

Ведущая организация: Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Защита состоится 24 декабря 2009 г. в 15-00 на заседании Диссертационного совета Д 003.015.04 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.–м. н.

В. Л. Мирошниченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Во второй половине XIX в. норвежский математик Софус Ли начал систематически исследовать непрерывные группы преобразований, называемые теперь группами Ли. Теория групп Ли долгое время оставалась в стороне от возможных приложений к дифференциальным уравнениям математической физики. Начиная с середины прошлого столетия исследования, выполненные Л. В. Овсянниковым его учениками и последователями: Н. Х. Ибрагимовым, В. В. Пухначевым, В. М. Тешуковым, С. В. Хабировым, Ю. Н. Павловским, О. В. Капцовым, А. П. Чупахиным, В. М. Меньшиковым, А. В. Аксеновым, В. К. Андреевым, С. В. Мелешко, П. Олвером, Б. Д. Анниным, В. И. Фушичем, В. О Бытевым, Р. Л. Андерсоном, Р. К. Газизовым, Е. В. Мамонтовым и другими, показали, что методы теории групп Ли являются эффективным способом изучения структуры множества решений дифференциальных уравнений. В настоящее время это математическое направление получило название группового анализа дифференциальных уравнений. Основные понятия и алгоритмы современного группового анализа дифференциальных уравнений читатель может найти в известных книгах Л.В. Овсянникова¹, Н.Х. Ибрагимова², П. Олвера³.

В настоящей диссертации приведены результаты, полученные автором в области группового анализа некоторых классов линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений математической физики.

Актуальность темы обусловлена тем, что математические модели многих явлений реального мира формулируются в виде линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Информация о структуре операторов, допускаемых дифференциальным уравнением, и его законах сохранения существенно упрощает как отыскание этих операторов и законов

¹ Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. 1978.

² Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука. 1983.

³ П. Олвер. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир. 1989.

сохранения, так и поиск решений данного уравнения. Групповая классификация и классификация дифференциальных уравнений по законам сохранения позволяют, в частности, выявить значения и формы экспериментально определяемых физических величин и зависимостей наиболее перспективных с точки зрения математического исследования; получить новые физические величины, сохраняющиеся с течением времени.

Целью работы является решение следующих проблем:

- Исследование проблемы линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений, относящейся к индуцированному работой⁴ Л. В. Овсянникова новому направлению исследований в области группового анализа дифференциальных уравнений.

- Изучение структуры касательных преобразований, допускаемых квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, точечных преобразований, допускаемых слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, законов сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка; классификация по законам сохранения первого порядка линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

- Решение задачи групповой классификации систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных.

- Групповой анализ системы уравнений Ламе классической динамической и статической теории упругости. Групповое расслоение этих уравнений относительно бесконечной подгруппы, содержащейся в нормальном делителе их основной группы.

- Групповой анализ квазилинейного дифференциального уравнения третьего порядка, описывающего продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина.

⁴ Л.В. Овсянников. О свойстве x -автономии // Докл. АН. 1993. Т. 330. № 5. С. 559–561.

– Исследование вопроса о взаимосвязи между групповыми свойствами и законами сохранения для систем дифференциальных уравнений; отыскание всех законов сохранения нулевого порядка для уравнений Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости, для уравнений движения газа, для уравнений изэнтропического движения газа (при этом во всех случаях рассматриваются также уравнения, описывающие соответствующие безвихревые движения, как с потенциалом вектора скорости, так и без этого потенциала). Выяснение групповой природы расширения множества законов сохранения для рассматриваемых систем дифференциальных уравнений.

– Исследование методами группового анализа системы уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука – одной из подмоделей газовой динамики, получившей несчастливый номер 13 в основополагающей работе⁵ Л.В. Овсянникова, в которой было начато систематическое изучение подмоделей газовой динамики.

– Групповая классификация систем дифференциальных уравнений двадцати основных подмоделей уравнений газовой динамики (Программа «Подмодели», руководитель: академик Л.В. Овсянников).

Научная новизна и основные результаты, выносимые на защиту:

– Впервые получены необходимые и достаточные условия χ -автономности основной алгебры Ли комплексной системы линейных дифференциальных уравнений, которые для комплексной квазилинейной системы становятся достаточными условиями χ -автономности основной алгебры Ли.

– Впервые получены достаточные условия линейной автономности всех операторов, допускаемых системой линейных дифференциальных уравнений.

– Впервые предложен алгоритм исследования системы линейных дифференциальных уравнений относительно χ -автономности и линейной автономности ее основной алгебры Ли.

⁵ Л.В. Овсянников. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.

– Впервые получены структурные теоремы: о касательных преобразованиях, допускаемых квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, о точечных преобразованиях, допускаемых слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, о законах сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, о законах сохранения первого порядка для линейных дифференциальных уравнений второго порядка; выполнена классификация по законам сохранения первого порядка линейного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

– Впервые выполнена групповая классификация систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных. Тем самым, решена в простейшем случае одна из задач группового анализа, поставленная Л.В. Овсянниковым (1974).

– Впервые выполнен групповой анализ системы уравнений Ламе классической динамической теории упругости. Найдена основная группа Ли преобразований этой системы. Выполнено групповое расслоение уравнений Ламе относительно бесконечной подгруппы, содержащейся в нормальном делителе их основной группы. Разрешающая система (RL) этого расслоения, включает в себя две классические системы математической физики: систему уравнений безвихревой акустики и систему уравнений Максвелла, что позволяет использовать более широкие группы для получения точных решений уравнений Ламе. Получена конформно-инвариантная система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая волны сдвига в трехмерной упругой среде, содержащая наименьшее число дополнительных функций. Комплексификация этой системы позволяет получить новые классы точных решений уравнений Ламе.

– Впервые выполнен групповой анализ системы n -мерных ($n \geq 2$) уравнений Ламе классической статической теории упругости. Найдена

основная группа Ли преобразований этих уравнений. Выполнено групповое расслоение относительно бесконечной подгруппы из нормального делителя их основной группы. Получено общее решение автоморфной системы, которое является n -мерным аналогом формулы Колосова-Мухелишвили. Разрешающая система в имеющих физический смысл двумерном и трехмерном случаях оказывается конформно-инвариантной, в то время как сами уравнения Ламе допускают лишь группу подобий евклидова пространства. В двумерном случае разрешающая система совпадает с системой Коши-Римана, что и позволяет успешно применять методы теории функций комплексной переменной в плоских задачах статической теории упругости. Структура разрешающей системы в трехмерном случае позволяет естественным образом ввести комплексные переменные. Полученная комплексная система дает возможность получать новые классы точных решений разрешающей системы, а, следовательно, и уравнений Ламе.

– Впервые выполнена групповая классификация квазилинейного дифференциального уравнения третьего порядка, описывающего продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина, относительно произвольного элемента: напряжения и коэффициента вязкости. Указаны краевые задачи, для которых полученные решения могут служить в качестве тестовых решений.

– Предложен новый метод, названный методом A -операторов, получения всех законов сохранения для системы дифференциальных уравнений. Эффективность метода A -операторов показана на примерах уравнений гидродинамики и газовой динамики, для которых найдены новые законы сохранения. Установлено, с какими дополнительными свойствами симметрии рассматриваемых уравнений связаны эти законы сохранения.

– Впервые исследована методами группового анализа одна из подмоделей газовой динамики, а именно: система уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука. Специальный выбор массовых лагранжевых переменных позволяет привести n -мерную ($n \geq 2$) систему уравнений газовой динамики

с нулевой скоростью звука к эквивалентной ей редуцированной системе, содержащей $(n - 1)$ пространственных переменных, которая, в частности, при $n = 2$ с помощью комплексных зависимых и независимых переменных записывается в виде одномерного комплексного уравнения теплопроводности.

– Впервые проведена групповая классификация систем дифференциальных уравнений двадцати основных подмоделей уравнений газовой динамики (Программа «Подмодели», руководитель: академик Л.В. Овсянников). Найдены все случаи расширения основной группы каждой из этих систем по сравнению с соответствующим нормализатором.

Теоретическая и практическая ценность работы состоит в том, что ее результаты носят общий характер и могут быть использованы при аналитическом и численном исследовании различных задач математической физики, связанных с решением дифференциальных уравнений. В частности, значимость работы состоит в следующем:

– Предложенный алгоритм исследования системы линейных дифференциальных уравнений относительно x -автономности и линейной автономности ее основной алгебры Ли значительно упрощает отыскание основной алгебры Ли рассматриваемой системы.

– Структурные теоремы: о касательных преобразованиях, допускаемых квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка; о точечных преобразованиях, допускаемых слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка; о законах сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка; о законах сохранения первого порядка для линейных дифференциальных уравнений второго порядка – дают возможность получения информации о свойствах указанных объектов для рассматриваемых уравнений без непосредственных вычислений.

– Выполненная групповая классификация систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных является решением одной из задач группового

анализа, поставленной Л.В. Овсянниковым.

– Выполненное групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости привело к эквивалентной им системе (RL) линейных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей наименьшее число дополнительных функций и включающей в себя две классические системы математической физики: систему уравнений безвихревой акустики и систему уравнений Максвелла, что позволяет использовать более широкие группы для получения точных решений уравнений Ламе. Найденный в плоском случае общий вид находящихся в инволюции систем, полученных добавлением к уравнениям системы (RL) одной или двух дифференциальных связей, уменьшает число параметрических производных, тем самым сужает произвол в решении этой системы, что упрощает отыскание ее точных решений. Полученная конформно-инвариантная система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая волны сдвига в трехмерной упругой среде, содержащая наименьшее число дополнительных функций позволяет получать новые классы точных решений уравнений Ламе.

– Выполненное групповое расслоение n -мерных $(n \geq 2)$ уравнений Ламе классической статической теории упругости позволило перейти от уравнений Ламе к равносильному им объединению двух систем первого порядка: автоморфной и разрешающей. Полученное общее решение автоморфной системы является n -мерным аналогом формулы Колосова-Мусхелишвили. Разрешающая система в имеющих физический смысл двумерном и трехмерном случаях оказывается конформно-инвариантной, в то время как сами уравнения Ламе допускают лишь группу подобий евклидова пространства. Комплексификация разрешающей системы дает возможность получать новые классы точных решений уравнений Ламе.

– Полученные точные решения квазилинейного дифференциального уравнения третьего порядка, описывающего продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина могут служить в качестве тестовых

решений при численном решении соответствующих краевых задач.

– Предложенный новый метод, названный методом A -операторов, позволяет получить все законы сохранения для системы дифференциальных уравнений из одного ее закона сохранения нулевого порядка, имеющего ранг, равный числу независимых переменных системы.

– Результаты классификации уравнений газовой динамики по законам сохранения могут быть использованы, например, при решении краевых задач для этих уравнений с помощью консервативных разностных схем.

– Результаты группового анализа системы уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука могут быть использованы, например, при моделировании движения очень холодного газа или для описания движения газа перед фронтом очень сильной ударной волны.

– Выполненная групповая классификация систем дифференциальных уравнений двадцати основных подмоделей уравнений газовой динамики позволила выделить подмодели с более широкой, чем соответствующий нормализатор, основной группой. В частности, получена групповая интерпретация известного преобразования М. Мунка и Р. Прима, которое позволяет преобразовать любое непрерывное стационарное решение с уравнением состояния $p = h(\rho S)$ либо в изэнтропическое, либо в изодинамическое решения.

Методы исследования: в работе были использованы методы группового анализа дифференциальных уравнений, аналитические методы теории дифференциальных уравнений.

Достоверность полученных результатов определяется применением строгих математических методов, математическими доказательствами полученных формул, совпадением их для частных случаев с известными формулами, а также физической интерпретацией полученных закономерностей.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных форумах:

– Школа-семинар “Математические методы в механике”, посвященная 70-летию академика Л. В. Овсянникова. (Новосибирск. Россия. 1989).

– “Sixth National Congress of Theoretical and Applied Mechanics” (Varna, Bulgarian Academy of Sciences. National Committee of Theoretical and Applied Mechanics. Bulgaria. 1989).

– Международный семинар “Современный групповой анализ” (International Workshop “Modern Group Analysis”). (Уфа. Россия. 1991).

– IV Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова. (Абрау – Дюрсо. Россия. 2008).

– Международная конференция “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, посвященная 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. (Новосибирск. Россия. 2009).

– Всероссийская конференция “Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение”, приуроченная к 90-летию академика Л. В. Овсянникова. (Новосибирск. Россия. 2009).

– Международная научная конференция “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики”, посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. (Москва. МГУ им. Ломоносова, ИПМ РАН, ИММ РАН. Россия. 2009).

– International Conference “Modern Group Analysis (MOGRAN-13)”. (Ufa, Russia. 2009).

– Всероссийская конференция “Математика в приложениях”, приуроченная к 80-летию академика С.К.Годунова. (Новосибирск. Россия. 2009).

На различных стадиях выполнения работа обсуждалась на семинарах, руководимых ведущими учеными:

– Семинары под руководством академика Л. В. Овсянникова в Новосибирском государственном университете и в Институте гидродинамики

им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск).

– Семинар “Математика в приложениях” под руководством академика С. К. Годунова в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН. (Новосибирск).

– Семинар под руководством член – корреспондента РАН В. В. Пухначева в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск).

Публикация результатов. По теме диссертации опубликовано 37 работ, в том числе 1 монография и 9 статей в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ ведущих рецензируемых научных журналов. Из совместных публикаций (3 статьи и 2 тезисов докладов на конференциях) в диссертацию включены результаты, полученные непосредственно автором. Список основных публикаций по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы из 272 наименований. Объем диссертации составляет 388 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении указаны цель исследования, его научная новизна, основные результаты, выносимые на защиту, теоретическая и практическая ценность работы, приведен обзор работ по теме диссертации, дана общая характеристика работы, приведено ее краткое содержание.

В Главе 1 основным объектом исследования является система

$$\mathbf{u}_t = A^i \mathbf{u}_{x^i}, \quad (1.1)$$

где $t \in C$; $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in C^n$ ($n \geq 1$); $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^m)^T \in C^m$

($m \geq 2$); $A^i = \|a_k^{ji}\|$ ($i = 1, \dots, n$) – постоянные квадратные матрицы m -ого порядка, элементы которых a_k^{ji} ($j, k = 1, 2, \dots, m$; j – номер строки) –

заданные комплексные числа. По повторяющемуся индексу, как и всюду в дальнейшем (если не оговорено противное) – суммирование.

Оператор, допускаемый системой (1.1), ищется в виде:

$$\xi^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_t + \xi^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{x^i} + \eta^k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{u^k} \quad (1.2)$$

и обладает, как правило, следующими свойствами: 1) $\xi_u^0 = \mathbf{0}$, $\xi_u = \mathbf{0}$; (x -автономность оператора); 2) $\eta_{uu} = 0$.

Основная алгебра Ли системы (1.1) будет называться x -автономной если все ее операторы x -автономны. Понятие x -автономности оператора, допускаемого системой дифференциальных уравнений было введено академиком Л.В. Овсянниковым в работе⁴. В заключительной части этой работы сказано, что «проблема x -автономии индуцирует развитие нового плодотворного направления исследований в области группового анализа дифференциальных уравнений». Настоящая глава относится к этому новому направлению исследований.

Определение 1.1. Оператор (1.2) будет называться линейно-автономным, если его координаты таковы, что $\xi_u^0 = \mathbf{0}$, $\xi_u = \mathbf{0}$, $\eta_{uu} = 0$.

Основная алгебра Ли системы (1.1) будет называться линейно-автономной если все ее операторы линейно-автономны.

В данной главе решается задача классификации системы (1.1) по отношению к свойству линейной автономности ее основной алгебры Ли.

В параграфе 1 получены определяющие уравнения и преобразования эквивалентности.

В параграфе 2 рассматривается вопрос об x -автономности основной алгебры Ли системы (1.1). Получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1.3. Основная алгебра Ли системы (1.1) при $n = 1$, $m > 2$ x -автономна тогда и только тогда, когда матрица A этой системы не удовлетворяет квадратному уравнению.

Т е о р е м а 1.5. Пусть матрицы $A^1, A^2, \dots, A^n$ ($n > 1$) системы (1.1)

удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:

1. Для некоторого $z \in C^n$ степень минимального многочлена характеристической матрицы $A(z) = A^i z_i$ больше двух.

2. Хотя бы один из корней $\lambda(z)$ характеристического уравнения

$$\det(A(z) - \lambda(z)E) = 0$$

не является при всех $z \in C^n$ значением линейной формы на пространстве C^n .

3. Матрицы $A^1, A^2, \dots, A^n$ не имеют общего собственного вектора (левого или правого). Например, система матриц $A^1, A^2, \dots, A^n$ неприводима.

Тогда основная алгебра Ли системы (1.1) ($n > 1$) x -автономна.

Возможность приведения матриц $A^1, A^2, \dots, A^n$ системы (1.1) ($n > 1$), основная алгебра Ли которой не x -автономна, с помощью преобразований эквивалентности к каноническому виду:

$$(A^1)^2 = \varepsilon E, A^i A^1 + A^1 A^i = 0, A^i A^j + A^j A^i = 0 \quad (i, j = 2, 3, \dots, n),$$

где $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$; позволяет получить в зависимости от величины ε два критерия x -автономности основной алгебры Ли системы (1.1) с характеристической матрицей, удовлетворяющей квадратному уравнению, корни которого при всех $z \in C^n$ являются значениями линейных форм на пространстве C^n . А именно:

Т е о р е м а 1.12. Пусть матрицы $A^1, A^2, \dots, A^n$ ($n \geq 2$) системы (1.1) таковы, что характеристическая матрица $A(z) = A^i z_i$ при всех $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n$ удовлетворяет квадратному уравнению $(A(z) - \lambda(z)E)^2 = 0$, корень которого $\lambda(z) = a^i z_i$, ($a^1, a^2, \dots, a^n \in C$) при каждом $z \in C^n$ является значением некоторой линейной формы на пространстве C^n . Пусть N – столбец, элементами которого являются

матрицы $F(A^1 - a^1 E), F(A^2 - a^2 E), \dots, F(A^n - a^n E)$, где F – столбец с элементами $A^1 - a^1 E, A^2 - a^2 E, \dots, A^n - a^n E$.

Основная алгебра Ли системы (1) x -автономна тогда и только тогда, когда $\text{ранг}(N) \geq 2$.

Т е о р е м а 1. 13. Пусть матрицы $A^1, A^2, \dots, A^n$ ($n \geq 2$) системы (1.1) таковы, что характеристическая матрица $A(z) = A^i z_i$ при всех $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n$ удовлетворяет квадратному уравнению $(A(z) - \lambda_1(z)E)(A(z) - \lambda_2(z)E) = 0$ ($\lambda_1(z) \neq \lambda_2(z)$), различные корни которого $\lambda_1(z) = a^i z_i, \lambda_2(z) = b^i z_i$ ($a^1, a^2, \dots, a^n; b^1, b^2, \dots, b^n \in C$), при каждом $z \in C^n$ являются значениями некоторых линейных форм на пространстве C^n . Не ограничивая общности, можно считать, что $a^1 \neq b^1$ (этого всегда можно добиться перенумерацией независимых переменных). Пусть $A'^i = A^i - \frac{1}{a^1 - b^1}[(a^i - b^i)A^1 + (a^1 b^i - a^i b^1)E]$ ($i = 2, 3, \dots, n$); T – столбец из матриц $A'^2, A'^3, \dots, A'^n$; M – столбец из матриц $TA'^2, TA'^3, \dots, TA'^n$; $P = \frac{1}{a^1 - b^1}(A^1 - b^1 E), Q = E - P$.

Основная алгебра Ли системы (1.1) x -автономна, если выполнено хотя бы одно из условий: 1) $\text{ранг}(M) \geq 2$; 2) $\text{ранг}(TP) \geq 2$ и $\text{ранг}(TQ) \geq 2$.

Если $M = 0$, то основная алгебра Ли системы (1) x -автономна тогда и только тогда, когда матрицы T, P, Q, S не удовлетворяют ни одному из условий: 1) $\text{ранг}(TP) = 1$; 2) $\text{ранг}(TQ) = 1$; 3) $TP = 0$ и $\text{ранг}(S) < \text{ранг}(P)$; 4) $TQ = 0$ и $\text{ранг}(S) < \text{ранг}(Q)$.

Если $\text{ранг}(M) = 1$, то основная алгебра Ли системы (1) x -автономна тогда и только тогда, когда матрицы T, P, Q не удовлетворяют условию

5) { если $MP \neq 0$, то $\text{ранг}(TP) = 1$ } и { если $MQ \neq 0$, то $\text{ранг}(TQ) = 1$ }.

Для выделения нетривиальных систем (1.1) с не x -автономной основной алгеброй Ли вводится понятие исключительной (тривиальной) системы, а именно:

О п р е д е л е н и е 1.5. Система (1.1), эквивалентная системе

$$u_t^k = u_{x^k}^1 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.52)$$

будет называться **исключительной системой**.

Основная алгебра Ли системы (1.52) не x -автономна.

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть Σ – некоторое множество квадратных матриц m -ого порядка над полем комплексных чисел. Столбец $r \neq 0$ и строка $l \neq 0$ называются **(r, l) - парой** данного множества, если для каждой матрицы $A \in \Sigma$ справедливы соотношения: $Ar = \lambda(A)r$, $lA = \lambda(A)l$, где $\lambda(A) \in C$ – собственное значение матрицы A .

Имеет место следующее необходимое условие не x -автономности основной алгебры Ли системы (1.1) при $n > 1$.

Т е о р е м а 1.15. Если система (1.1) ($n > 1$) не является исключительной и допускает не x -автономный оператор (1.2), то множество матриц $A^1, \dots, A^n$ этой системы обладает **(r, l) - парой**. Множество матриц исключительной системы **(r, l) - парой** не обладает.

Для системы квазилинейных уравнений

$$u_t = A^i(t, x, u)u_{x^i} + b(t, x, u), \quad (1.62)$$

в которой $t \in C$; $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in C^n$; $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)^T \in C^m$; $n \geq 1, m \geq 2$; $A^i = A^i(t, x, u) = \|a_k^{ji}(t, x, u)\|$ – квадратные матрицы m -ого порядка; $b = b(t, x, u)$ – m -мерный столбец; $a_k^{ji}(t, x, u), b(t, x, u)$ – заданные комплекснозначные функции, в случае, если матрицы $A^i(t, x, u)$

системы (1.62) в точке «общего положения» удовлетворяют равномерно по $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ условиям, которые накладываются в теоремах 1.1 – 1.16 на постоянные матрицы A^i системы (1.1), то для квазилинейной системы (1.62) будут справедливы теоремы, доказанные для системы (1.1), однако при этом критерии превращаются в достаточные условия x -автономности основной алгебры Ли системы (1.62). Достаточные условия x -автономности основной алгебры Ли для вещественной системы (1.62) приведены в работе⁴.

В параграфе 3 рассматривается вопрос о линейной зависимости координаты η оператора (1.2) от функций. Система (1.1) допускает оператор (1.2), для которого $\eta_{uu} \neq 0$, в следующих случаях: 1) при $n = 1$; 2) при $n > 1$, если ее основная алгебра Ли не x -автономна.

Если основная алгебра Ли системы (1.1) x -автономна, то существование допускаемого этой системой оператора (1.2) с $\eta_{uu} \neq 0$ сводится к вопросу о существовании нелинейного отображения $\theta : C^m \rightarrow C^m$, матрица Якоби которого коммутирует с матрицами данной системы. Такое отображение существует тогда и только тогда, когда найдется матрица ранга 1, перестановочная с каждой матрицей этой системы.

Критерий нелинейной зависимости координаты η от $\mathbf{u}$ для системы (1.1) с x -автономной основной алгеброй Ли дается теоремой 1.22.

Т е о р е м а 1.22. *Если основная алгебра Ли системы (1.1) ($n > 1$) x -автономна, то система (1.1) допускает оператор (1.2) с $\eta_{uu} \neq 0$ тогда и только тогда, когда множество матриц $\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$ этой системы обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$ -парой.*

С л е д с т в и е 1. *Если система (1.1), основная алгебра Ли которой x -автономна, допускает оператор (1.2) с $\eta_{uu} \neq 0$, то на пространстве C^n существует линейная форма $\lambda(\mathbf{z})$, значение которой в каждой точке $\mathbf{z} \in C^n$*

является корнем характеристического уравнения $\det(A^i z_i - \lambda(z)E) = 0$.

С л е д с т в и е 2. Если ни при каких $z \in R^n \setminus \{0\}$ ($n > 1$) у характеристического уравнения $\det(A^i z_i - \lambda(z)E) = 0$ системы (1.1), основная алгебра Ли которой x -автономна, нет вещественных корней, то вторая координата всех операторов (1.2), допускаемых этой системой, удовлетворяет условию: $\eta_{uu} = 0$.

Достаточные условия линейной автономности всех операторов (1.2), допускаемых системой (1.1), приводятся в теореме 1.23.

Т е о р е м а 1. 23. Все операторы (1.2), допускаемые системой (1.1) при $n > 1$, являются линейно-автономными в каждом из следующих случаев:

1. Система (1.1) не является исключительной и не существует матрицы ранга 1, перестановочной с каждой матрицей системы.

2. Матрицы $A^1, A^2, \dots, A^n$ не имеют общего левого или общего правого собственного вектора. Например, множество матриц $\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$ неприводимо.

3. На пространстве C^n не существует линейной формы $\lambda(z)$, значение которой при всех $z \in C^n$ является корнем характеристического уравнения $\det(A^i z_i - \lambda(z)E) = 0$ системы (1.1) .

4. Характеристическое уравнение системы (1.1) ни при каких $z \in R^n \setminus \{0\}$ не имеет вещественных корней.

Получен алгоритм исследования системы (1.1) относительно линейной автономности ее основной алгебры Ли.

В главе 2 рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение

$$a^{ij} u_{ij} + b = 0 \quad (a^{ij} = a^{ji}), \quad (2.1)$$

где $u_{ij} = \partial_i \partial_j u$; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $n \geq 2$); матрица $A = \|a^{ij}\|$ и

величина b – заданные функции переменных $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$,
 $u, u_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n) \ (u_i = \partial_i u)$.

В параграфе 1 получено достаточное условие отсутствия касательных преобразований.

Т е о р е м а 2.1. *Если общий ранг $(A) \geq 3$, то все касательные преобразования, допускаемые уравнением (2.1), являются продолженными точечными преобразованиями.*

В параграфе 2 для уравнения (2.1), в котором $A = A(\mathbf{x}, u)$, то есть для уравнения

$$a^{ij}(\mathbf{x}, u)u_{ij} + b(\mathbf{x}, u, u_1) = 0. \quad (2.9)$$

получено достаточное условие линейной автономности всех допускаемых операторов вида:

$$\xi^i(\mathbf{x}, u)\partial_i + \eta(\mathbf{x}, u)\partial_u. \quad (2.10)$$

Т е о р е м а 2.2. *Если общий ранг $(A) \geq 2$, то основная алгебра Ли слабонелинейного уравнения (2.9) x - автономна. Если при этом $b_{u_i u_j} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, то все операторы (2.10), допускаемые уравнением (2.9), являются линейно-автономными.*

В параграфе 3 получена следующая теорема о структуре законов сохранения для уравнения (2.9).

Т е о р е м а 2.3. *Если общий ранг $(A) \geq 3$, то компоненты $B^1, B^2, \dots, B^n$ каждого закона сохранения первого порядка для слабонелинейного уравнения (2.9) являются многочленами не выше второй степени относительно $u_1, u_2, \dots, u_n$.*

В параграфе 4 получена теорема 2.4 о структуре законов сохранения первого порядка для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В параграфе 5 выполнена классификация относительно коэффициентов

a, b, c по законам сохранения первого порядка линейного дифференциального уравнения

$$u_{12} + au_1 + bu_2 + cu = 0, \quad (2.28)$$

где a, b, c – заданные функции переменных x^1, x^2 . Пусть $h = a_1 + ab - c$, $k = b_2 + ab - c$ – инварианты Лапласа этого уравнения.

Т е о р е м а 2.5. *Если $h \cdot k \neq 0$, то уравнение (2.28) имеет не более трех неочевидных законов сохранения первого порядка и их компоненты квадратичны относительно u, u_1, u_2 .*

Инвариантная характеристика (в терминах инвариантов Овсянникова) нетривиальных случаев расширения множества законов сохранения первого порядка для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными дается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.6. *Нетривиальное максимальное расширение множества законов сохранения первого порядка для уравнения (2.28) при $h \neq 0$ происходит тогда и только тогда, когда его инварианты Овсянникова*

$I^1 = \frac{k}{h}$, $I^2 = \frac{1}{h}(\ln h)_{12}$, $I^3 = \frac{1}{k}(\ln k)_{12}$ *удовлетворяют альтернативным*

соотношениям: 1) $I^2 + I^1 = 2$, $I^3 + \frac{1}{I^1} = 2$ ($I^1 \neq 0$; 1);

2) $I^1 = 1$, $I^2 = \gamma = const$; 3) $I^1 = 0$, $I^2 = 2$.

В главе 3 решена задача групповой классификации систем

$$A(x, y)U_x + B(x, y)U_y + C(x, y)U = 0,$$

где $U = (u, v) \in R^2$; $(x, y) \in R^2$; A, B, C – заданные вещественные квадратные матрицы второго порядка.

В параграфе 1 дана постановка задачи. Произвольным элементом системы, по отношению к которому проводится классификация, является набор матриц $\{A, B, C\}$. В нетривиальных случаях системы подходящим преобразованием эквивалентности приводятся

или к гиперболической системе

$$u_x = av, \quad v_y = bu, \quad (3.2)$$

или к параболической системе

$$u_x = av, \quad v_x = u_y + bu, \quad (3.3)$$

или к эллиптической системе

$$u_x = v_y + av, \quad v_x = -u_y + bu, \quad (3.4)$$

с коэффициентами $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$.

В параграфах 2. 3. 4 соответственно выполнена групповая классификация каждой из систем (3.2) – (3.4). Результаты приведены в теоремах 3.1– 3.4.

В параграфе 5 выполнена групповая классификация линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Результат сформулирован в теореме 3.5.

Глава 4 посвящена групповому анализу системы уравнений Ламе классической динамической теории упругости, которые в подходящей системе координат записываются следующим образом:

$$u_{tt} = \alpha_0 \nabla \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u, \quad (4.1)$$

где $u = u(t, x) \in R^n$ – вектор перемещений; t – время; $x \in R^n$ ($n = 2; 3$); $\alpha_0 > 2$ – постоянная, характеризующая упругие свойства среды.

В параграфе 1 найдена основная группа Ли преобразований этой системы. Выполнено групповое расслоение уравнений Ламе относительно некоторой бесконечной подгруппы, содержащейся в нормальном делителе основной группы.

В параграфе 2 рассматривается система

$$u_t = \alpha_0 \nabla \theta - \operatorname{rot} \omega, \quad \theta_t = \operatorname{div} u, \quad \omega_t = \operatorname{rot} u, \quad \operatorname{div} \omega = 0, \quad (RL)$$

полученная из разрешающей системы после переобозначения функций. Показано, что она эквивалентна уравнениям Ламе и занимает особое место среди систем первого порядка, эквивалентных этим уравнениям, а именно: она содержит наименьшее число дополнительных функций и является

единственной (с точностью до линейного невырожденного преобразования дополнительных функций) такой системой, эквивалентной уравнениям Ламе. Эта система включает в себя две классические системы математической физики: систему уравнений безвихревой акустики и систему уравнений Максвелла.

В параграфе 3 установлено, что система (RL) допускает ту же самую основную группу Ли преобразований, что и уравнения Ламе, только действующую в другом пространстве. Система уравнений безвихревой акустики и система уравнений Максвелла позволяют в виду структуры системы (RL) использовать более широкие группы для получения точных решений уравнений Ламе.

В параграфе 4 выполнена классификация частично инвариантных решений системы (RL) и уравнений Ламе. Для этого построена оптимальная система подгрупп их основной группы, найдены универсальные инварианты каждой подгруппы из построенной оптимальной системы. Тем самым, указаны возможные виды всех их частично инвариантных решений.

В параграфе 5 исследована структура инвариантных решений системы (RL) . Представление каждого решения системы (RL) в виде суммы решений уравнений безвихревой акустики и уравнений Максвелла указанное в теореме 4.3 следующим образом конкретизируется для инвариантных решений:

Т е о р е м а 4.4. Любое инвариантное динамическое H -решение системы (RL) есть сумма инвариантных H -решений уравнений безвихревой акустики и уравнений Максвелла.

В параграфе 6 представление любого решения уравнений Ламе в виде суммы потенциального и соленоидального решений этих уравнений следующим образом конкретизируется для инвариантных решений:

Пусть H_1 и H_2 – подгруппы, порождаемые соответственно операторами $\alpha X_0 + X_3$, $R - P$, Z_3 и $\alpha X_0 + X_1$, X_3 , R ($\alpha \neq 0$), где

$$X_0 = \partial_t, \quad X_3 = \partial_{x_3}, \quad Z_3 = x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}, \quad R = t \partial_t + \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$$

$$P = \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{u}}, \quad X_1 = \partial_{x_1}.$$

Т е о р е м а 4.5. *Любое инвариантное динамическое H -решение уравнений Ламе, за исключением H -решений на подгруппах, подобных H_1 и H_2 , можно представить в виде суммы инвариантного потенциального и инвариантного соленоидального H -решений этих уравнений.*

Найдены: инвариантное H_1 -решение уравнений Ламе, описывающее цилиндрическую автомодельную волну, и инвариантное H_2 -решение уравнений Ламе описывающее плоскую автомодельную волну.

В параграфе 7 для системы (RL) найдены: простые волны, и в плоском случае – некоторое частично инвариантное решение дефекта 2 и ранга 1. Оказалось, что и для этих частично инвариантных решений система уравнений безвихревой акустики и система уравнений Максвелла имеют особое значение.

В параграфе 8 для плоского случая найден общий вид находящихся в инволюции систем, полученных добавлением к уравнениям системы (RL) одной и двух дифференциальных связей.

В параграфе 9 получена линейная однородная симметрическая t -гиперболическая (по Фридрихсу) система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая волны сдвига в трехмерной упругой среде. Эта система содержит наименьшее число дополнительных функций и является конформно-инвариантной. Ее структура позволяет ввести комплексные зависимые и независимые переменные, что оказывается удобным для получения точных решений. Приведены примеры частично инвариантных решений.

В главе 5 методами группового анализа исследуется система уравнений Ламе классической статической теории упругости, описывающая состояние

равновесия однородной изотропной упругой среды:

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Вектор перемещений $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ ($n \geq 2$) есть функция точки $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, а $\lambda > 0$, $\mu > 0$ – постоянные Ламе.

В параграфе 1 найдена основная группа Ли преобразований системы n -мерных ($n \geq 2$) уравнений Ламе классической статической теории упругости. Выполнено групповое расслоение этих уравнений относительно бесконечной подгруппы, содержащейся в нормальном делителе их основной группы.

В параграфе 2 получено общее решение автоморфной системы, которое является n -мерным аналогом формулы Колосова – Мусхелишвили.

В параграфе 3 найдена основная группа Ли преобразований разрешающей системы выполненного группового расслоения. Оказалось, что в имеющих физический смысл двумерном и трехмерном случаях эта система является конформно-инвариантной, в то время как сами уравнения Ламе допускают лишь группу подобий евклидова пространства.

В параграфе 4 для трехмерного случая найден общий вид преобразований аналогичных преобразованию Кельвина для решений разрешающей системы. Эти преобразования являются следствием ее конформной инвариантности.

В параграфе 5 для трехмерного случая с помощью комплексных зависимых и независимых переменных разрешающая система записывается в виде комплексной системы, для которой найдена основная группа Ли преобразований, получены существенно различные инвариантные решения рангов 0, 1, 2. При этом оказалось, что для получения точных решений уравнений Ламе классической статической теории упругости можно использовать группы, допускаемые известными уравнениями математической физики: уравнением теплопроводности, телеграфным уравнением, уравнением Трикоми, обобщенным уравнением Дарбу. С помощью указанной

комплексной системы получены двойные волны специального вида для разрешающей системы.

В параграфе 6 найдены нередуцируемые двойные волны сдвига для разрешающей системы.

В Главе 6 методами группового анализа исследуется квазилинейное дифференциальное уравнение третьего порядка, описывающего продольные колебания одномерного вязкоупругого стержня с единообразным поперечным сечением в модели Кельвина:

$$u_{tt} = \varphi(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt}, \quad (6.1)$$

где t – время; x – координата, характеризующая положение поперечного сечения стержня; $u = u(t, x)$ – продольное перемещение сечения стержня за время t ; λ – коэффициент вязкости; $\varphi(u_x) = \sigma'(u_x)$; $\sigma(u_x)$ – напряжение.

В параграфе 1 выполнена групповая классификация уравнения (6.1) относительно напряжения и коэффициента вязкости. Основные итоги классификации приведены в таблице (λ, σ) .

В параграфе 2 найдены все существенно различные инвариантные решения рассматриваемого уравнения в случае нелинейной деформации стержня, состоящего из настоящего вязкоупругого материала. Указан физический смысл полученных решений. Эти решения могут служить в качестве тестовых решений при численном решении соответствующих краевых задач для уравнения (6.1).

В главе 7 рассматривается вопрос о взаимосвязи между групповыми свойствами и законами сохранения для систем дифференциальных уравнений.

В параграфе 1 доказана теорема 7.1 о порождающем законе сохранения для системы дифференциальных уравнений, на основании которой предложен алгоритм, названный методом A -операторов, позволяющий получить все законы сохранения для системы дифференциальных уравнений из одного ее закона сохранения нулевого порядка, имеющего ранг, равный числу независимых переменных системы. Эффективность этого алгоритма показана в

последующих параграфах на примерах уравнений гидродинамики и газовой динамики.

В параграфе 2 методом A -операторов получены все законы сохранения нулевого порядка для уравнений Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости при $n \geq 2$, для уравнений безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости при $n \geq 3$ и при $n = 2$; получены все законы сохранения специального вида для уравнений потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости при $n \geq 2$. Для уравнений Эйлера установлена связь A -операторов с операторами основной группы Ли преобразований, допускаемой этими уравнениями. Для уравнений Эйлера при $n = 2$ найдены все естественные нелокальные переменные и соответствующие нелокальные симметрии.

В параграфе 3 методом A -операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений одномерного движения газа, в частности, получено уравнение состояния: $c^2 = \frac{\theta(p)}{\rho^2}$, где $\theta(p)$ – любая заданная функция (такой газ будет называться обобщенным газом Чаплыгина; при $\theta(p) = \text{const}$ – это известный газ Чаплыгина), для которого эта система имеет бесконечное множество законов сохранения. Оказалось, что только для обобщенного газа Чаплыгина рассматриваемая система имеет обобщенные симметрии первого порядка, которые зависят при этом от произвольных функций. Методом A -операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений движения газа при $n \geq 2$, системы уравнений безвихревого движения газа и классификация по законам сохранения специального вида системы уравнений потенциального движения газа при $n = 1$ и при $n \geq 2$. При этом проявилась особая роль обобщенного газа Чаплыгина – именно в этом случае происходит нетривиальное расширение множества законов сохранения для рассматриваемых систем уравнений газовой динамики. С помощью

частичных симметрий, включающих в себя, в частности, все операторы, допускаемые системой уравнений газовой динамики при всевозможных уравнениях состояния, выявлена групповая природа обобщенного газа Чаплыгина в многомерном случае.

В параграфе 4 методами группового анализа исследована одна из подмоделей газовой динамики, а именно: система уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука. Эта подмодель получила несчастливый номер 13 в основополагающей работе⁵ Л.В. Овсянникова, в которой было начато систематическое изучение подмоделей газовой динамики. Методом A -операторов найдены все законы сохранения нулевого порядка для системы n -мерных ($n \geq 1$) уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука, Выполнено групповое расслоение этой системы относительно бесконечной подгруппы, являющейся нормальным делителем ее основной группы Ли преобразований; найдена основная группы разрешающей системы. С помощью перехода к массовым лагранжевым переменным найдены нелокальные симметрии первого порядка для исходной системы. Специальный выбор массовых лагранжевых переменных позволяет привести n -мерную ($n \geq 2$) систему уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука к эквивалентной ей редуцированной системе, содержащей $(n-1)$ пространственных переменных, которая, в частности, при $n = 2$ с помощью комплексных зависимых и независимых переменных записывается в виде одномерного комплексного уравнения теплопроводности.

В параграфе 5 методом A -операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений одномерного изэнтропического движения газа. Проведена групповая классификация данной системы. Сравнение результатов этих классификаций показало, что расширение множества нетривиальных законов сохранения происходит только в одном из пяти случаев расширения ее основной группы. Методом A -операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого

порядка системы уравнений изэнтропического движения газа при $n \geq 2$; показано, что условие изэнтропичности не приводит к появлению новых законов сохранения и новых симметрий по сравнению с обычной системой уравнений движения газа. Методом A -операторов выполнена классификация по законам сохранения нулевого порядка системы уравнений безвихревого изэнтропического движения газа и системы уравнений потенциального изэнтропического движения газа. Оказалось, что для последней системы в случае газа Чаплыгина будет наибольшее число нетривиальных законов сохранения, при этом n скалярных законов сохранения будут нелокальными. Для выявления групповой природы случаев расширения множества нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы уравнений потенциального изэнтропического движения газа решены три задачи групповой классификации.

В параграфе 6 приведены результаты групповой классификации систем дифференциальных уравнений двадцати основных подмоделей уравнений газовой динамики, полученные автором в рамках программы «Подмодели» (руководитель: академик Л.В. Овсянников). Оказалось, что для некоторых подмоделей алгебра Ли их основной группы шире, чем факторалгебра соответствующего нормализатора. В частности, такое расширение происходит для подмодели установившихся движений газа с уравнением состояния $p = h(\rho S)$; расширяющий оператор в этом случае имеет вид $Z_\phi = \Phi(S, B)(\mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{u}} - 2\rho \partial \rho)$, где $\Phi(S, B)$ – произвольная функция энтропии S и функции Бернулли $B = |\mathbf{u}|^2 + 2i(p, \rho)$ ($i(p, \rho)$ – удельная энтальпия). Преобразования псевдогруппы Ли, порождаемой оператором Z_ϕ , позволяют, как было показано в работе⁶ М. Мунка и Р. Прима преобразовать непрерывное стационарное решение с уравнением состояния $p = h(\rho S)$

⁶ Munk M., Prim R. On the multiplicity of steady gas flows having the same streamline pattern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947. – V. 33. – P. 137–141.

либо в изэнтропическое ($S = const$), либо в изодинамическое ($B = const$).

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Автор является учеником академика Л.В. Овсянникова, общение с которым определило круг научных интересов автора и способствовало улучшению полученных результатов, за что автор выражает Льву Васильевичу искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Чиркунов Ю.А. Метод A -операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 2. С. 53-60.
2. Чиркунов Ю.А. О групповых свойствах и законах сохранения для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 3. С. 64–70.
3. Чиркунов Ю.А. Системы линейных дифференциальных уравнений, симметричные относительно преобразований, нелинейных по функции // СМЖ. 2009. Т. 50. № 3. С. 680–686.
4. Чиркунов Ю.А. Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН. 2009. Т. 426. № 5. С. 605–607.
5. Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Известия АН. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 47–54.
6. Чиркунов Ю.А. Законы сохранения и групповые свойства уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 587–593.
7. Чиркунов Ю.А. Групповая классификация систем линейных

дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 155–159.

8. *Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А.* Групповое расслоение уравнений Ламе // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 471–477.
9. *Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А.* Групповые свойства уравнений классической теории упругости // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 6. С. 1353–1356.
10. *Чиркунов Ю.А.* Об одной конформно-инвариантной системе первого порядка, равносильной волновому уравнению // СМЖ. Депонирована в ВИНТИ за № 1604-B91 от 15.04. 1991 г. 15 с.
11. *Чиркунов Ю.А.* Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосибирский государственный университет экономики и управления. 2007. 362 с.
12. *Чиркунов Ю.А.* Групповое свойство уравнений Ламе // Динамика сплошной среды. 1973. Вып. 14. Новосибирск. С. 138–140.
13. *Чиркунов Ю.А.* Групповой анализ уравнений Ламе // Динамика сплошной среды. 1975. Вып. 23. Новосибирск. С. 219–225.
14. *Чиркунов Ю.А.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка, допускающих группу максимальной размерности // Динамика сплошной среды. 1976. Вып. 24. Новосибирск. С. 124–137.
15. *Чиркунов Ю.А.* О групповых свойствах уравнения Дарбу // Динамика сплошной среды. 1976. Вып. 27. Новосибирск. С. 101–115.
16. *Чиркунов Ю.А.* О построении методами группового анализа обобщенных формул Пуассона // Динамика сплошной среды. 1979. Вып. 39. Новосибирск. С. 135–151.
17. *Чиркунов Ю.А.* Установившиеся колебания в неоднородном полупространстве при наличии гиперплоскости вырождения // Динамика сплошной среды. 1983. Вып. 63. Новосибирск. С. 94–106.

18. Чиркунов Ю.А. Нелинейные вязкоупругие одномерные модели Кельвина // Динамика сплошной среды. 1984. Вып. 64. Новосибирск. С. 121–131.
19. Чиркунов Ю.А. Групповая классификация одного класса систем квазилинейных уравнений // Динамика сплошной среды. 1984. Вып. 67. Новосибирск. С. 135–144.
20. Чиркунов Ю.А. Инвариантные продольные колебания вязко-упругого стержня // Динамика сплошной среды. 1985. Вып. 71. Новосибирск. С. 144–155.
21. Чиркунов Ю.А. Об условиях единственности решения уравнения колебаний в неоднородной среде с максимальной симметрией // Динамика сплошной среды. 1986. Вып. 75. Новосибирск. С. 151–159.
22. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Конформная инвариантность в эластостатике // Динамика сплошной среды. 1987. Вып. 82. Новосибирск. С. 110–120.
23. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Групповые свойства уравнений теории упругости // В кн.: Математические методы в механике. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. 1989. С. 38.
24. Чиркунов Ю.А. Групповой анализ уравнений теории упругости // В кн.: Sixth National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstracts. – Varna: Bulgarian academy of sciences. National committee of theoretical and applied mechanics. 1989. P. II.99.
25. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Законы сохранения для уравнений гидродинамики и газовой динамики // Международный семинар «Современный групповой анализ». Уфа. 1991. С. 28–29.
26. Чиркунов Ю.А. Законы сохранения для уравнений безвихревого движения газа // Актуальные проблемы прикл. математики и механики. Тезисы докладов IV Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А. Ф. Сидорова. Абрау – Дюрсо. ИММ УрО РАН (Екатеринбург), ЮГИНФО ЮФУ (Ростов–на–Дону). 2008. С. 72.
27. Чиркунов Ю.А. О проблеме линейной автономности операторов,

допускаемых системой линейных дифференциальных уравнений // Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН. 2008. С. 231.

28. *Чиркунов Ю.А.* О свойствах симметрий и законов сохранения для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л. В. Овсянникова. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН. 2009. С. 155.
29. *Чиркунов Ю.А.* Линейная автономность основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 90-летию академика Л. В. Овсянникова. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН. 2009. С. 154.
30. *Чиркунов Ю.А.* Симметрии и законы сохранения для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПМ РАН, ИММ РАН. 2009. С. 277–278.
31. *Чиркунов Ю.А.* Законы сохранения для уравнений газовой динамики // Всероссийская конференция «Математика в приложениях», приуроченная к 80-летию академика С. К. Годунова. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. 2009. С. 269–270.
32. *Chirkunov Yu.A.* On the structure of point transformations, admitted by system of linear differential equations // International Conference “Modern Group Analysis (MOGRAN-13)”. Ufa, Russia. 2009. P. 36.