На правах рукописи

Богоявленская Ольга Анатольевна

Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на разрешениях конуса над $S^3 \times S^3$

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирском национальном исследовательском государственном университете».

Научные руководители:
д. ф.-м. н., профессор, академик РАН **Тайманов Искандер Асанович**
д. ф.-м. н. **Базайкин Ярослав Владимирович**

Официальные оппоненты:
Панов Тарас Евгеньевич, д. ф.-м. н., доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии, профессор
Родионов Евгений Дмитриевич, д. ф.-м. н., профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», математический факультет, кафедра математического анализа, профессор

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет».

Защита состоится «26» августа 2013 года в 12:30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан « _____ »____________ 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Егоров Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена построению и исследованию метрик со специальной группой голономии G_2.

Группа голономии - это инвариант риманова многообразия, несущий информацию о глобальных свойствах геометрии данного многообразия. Понятие группы голономии было введено Э.Картаном [6, 7, 8] и, кратко, заключается в следующем: фиксировав точку многообразия размерности n и рассмотрев всевозможные петли, начинающиеся и заканчивающиеся в выбранной точке, можно получить группу, состоящую из всех параллельных переносов вдоль таких петель - это и есть группа голономии, по своему определению лежащая в $O(n)$. Первые примеры специальных групп голономии связаны с понятием симметрического пространства, также изучавшегося Э.Картаном. Оказалось, что для симметрического пространства группа голономии совпадает с группой изотропии фиксированной точки, рассмотренной относительно группы трансвекций. В дальнейшем, Борель и Лихнерович [2] показали, что для односвязного многообразия (или для любого многообразия, но при рассмотрении лишь стягиваемых петель) группа голономии является подгруппой Ли в ортогональной группе. Теорема де Рама подчеркнула глобальный характер понятия голономии: оказалось, что если группа голономии (вместе со своим представлением на касательном пространстве в фиксированной точке) раскладывается в прямое произведение (т.е. приводима), то само многообразие распадается в соответствующее прямое произведение римановых многообразий.

Следующий крупный шаг в понимании структуры групп голономии был сделан Берже [1]. В предположении, что риманово односвязное многообразие неприводимо и не является симметрическим, он доказал, что группа голономии принадлежит списку кандидатов, конечному в каждой фиксированной размерности. Доказательство Берже было алгебраическим и не позволяло ответить вопрос, существует ли риманово многообразие с данной группой голономии из списка. Возникла задача реализации групп голономии из списка Берже, которая поэтапно была решена положительно для всех кандидатов.

Диссертация посвящена случаю группы голономии G_2. Вместе с группой $Spin(7)$ для нее не было примеров реализации римановым многообразием вплоть до 1987 года, когда Брайант и Саламон построили первое (некомпактное и даже не полное) риманово многообразие с группой голономии G_2 и $Spin(7)$. В 1989 они же [5] построили первый пример полного пространства с данными группами голономии. Построение компактного пространства оказалось трудной задачей, и было сделано лишь Джойсом [15, 16] в 1996 году. После Джойса Ковалев [18] в 2003 году предложил новую конструкцию, которая привела к построению компактного риманова многообразия с группой голономии G_2. В обоих конструкциях центральную роль играет некоторая хирургия, склеивающая метрики с группой голономии, лежащей в G_2, причем эти метрики определены на некомпактных пространствах.

С другой стороны, интерес к некомпактным пространствам с группой голономии G_2 стимулировался применением их в физике, а именно в M-теории. Риманово многообразие с группой голономии G_2 является автоматически Риччи-плоским, то есть построение метрики с группой голономии G_2 дает решение уравнения Эйнштейна с нулевой космологической постоянной. Это привело к построению дополнительных примеров некомпактных римановых многообразий с группой голономии G_2 с интересными геометрическими и топологическими свойствами. При этом некомпактный случай позволяет либо явно выписать метрику в элементарных функциях, либо детально изучить ее свойства. Большинство некомпактных примеров строятся как деформации конусов над специальными пространствами.

Целями работы являются:

1. Исследование системы дифференциальных уравнений, эк-

вивалентной существованию параллельной G_2 структуры на разрешениях конуса над $S^3 \times S^3$.

2. Изучение топологических и геометрических свойств римановых многообразий с группой голономии G_2, отвечающих решениям этой системы.

Основные результаты.

1. Полностью исследована система нелинейных дифференциальных уравнений, эквивалентная существованию параллельной G_2-структуры на гладком разрешении конуса над произведением трехмерных сфер $S^3 \times S^3$.

2. Доказано существование однопараметрического семейства метрик с группой голономии G_2, определенных на пространстве, диффеоморфном прямому произведению $S^3 \times \mathbb{R}^4$, это семейство содержит в себе в качестве частных случаев известные ранее примеры метрик с группой голономии G_2.

3. Доказано существование однопараметрического семейства метрик с группой голономии G_2, определенных на пространстве, диффеоморфном прямому произведению $S^3 \times H^4$, где H^4 - это четвертая тензорная степень комплексного линейного тавтологического расслоения H над S^2.

Методы исследований.

В диссертации использовались методы римановой геометрии (в частности метод внешних форм Картана) и качественные методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все результаты являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейшем для построения новых примеров метрик со специальными голономиями и другими геометрическими свойствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

– на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» ИМ СО РАН под руководством академика РАН И.А. Тайманова,

– на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН под руководством академика РАН Ю.Г. Решетняка,
– на международной конференции «Четвертая геометрическая конференция, посвященная столетию А.Д. Александрова», проходившей летом 2012 года в Санкт-Петербурге.

Публикации. Результаты диссертации изложены в работах [27, 28, 29]. Часть результатов получена при сотрудничестве с Я.В. Базайкиным.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 59 страницах и состоит из введения и четырех глав, каждая из которых разбита на пункты. Библиография содержит 26 наименований.

Первая глава является вводной. В ней мы приводим основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Параграф 1.1 касается групп голономии римановых многообразий; в параграфе 1.2 содержится определение G_2 структуры на римановом многообразии. Глава 1 содержит лишь необходимые нам утверждения и не претендует на какую-либо полноту.

Во второй главе мы приводим общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии G_2 по заданному 7-мерному многообразию M. Большинство некомпактных примеров строятся как деформации конусов над специальными пространствами.

Мы рассматриваем стандартную конусную метрику над пространством $S^3 \times S^3$ и деформируем ее при помощи четырех функций, зависящих от переменной, меняющейся вдоль образующей конуса.

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \left(\eta_i + \tilde{\eta}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} B_i(t)^2 \left(\eta_i - \tilde{\eta}_i\right)^2, \qquad (1)$$

где $\eta_i, \tilde{\eta}_i$ — это стандартный корепер из 1-форм, а функции $A_i(t), B_i(t)$ задают деформацию конусной особенности.

Эта четверка функций задает размеры сечения конуса на данном уровне t. Условие принадлежности группе голономии G_2 при этом записывается как нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений на данную четверку функций (**лемма 2.1** главы 2).

$$\begin{array}{l} \frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2}\right) \\ \frac{dA_2}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2}\right) \\ \frac{dB_1}{dt} = \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2} \\ \frac{dB_2}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2}\right) \end{array} \tag{2}$$

Для того, чтобы решение системы (2) было определено на некотором римановом многообразии, необходимо выполнение дополнительных краевых условий в точке t_0, которые обеспечивают разрешение конусной особенности. В диссертации рассмотрены два типа разрешения особенности, мы формулируем их в **лемме 3.1** главы 3 и **лемме 4.1** главы 4 соответственно.

Лемма 3.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_1$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:
(1) $A_1(0) = A_2(0) = 0, |A_1'(0)| = |A_2'(0)| = \frac{1}{2}$;
(2) $B_1(0) = B_2(0) \neq 0, B_1'(0) = B_2'(0) = 0$;
(3) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Лемма 4.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:
(1) $B_1(0) = 0, |B_1'(0)| = 2$;
(2) $A_2(0) = B_2(0) \neq 0, A_2'(0) = -B_2'(0)$,
(3) $A_1(0) \neq 0, A_1'(0) = 0$;
(4) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Два различных типа разрешения особенности приводят к двум различным топологическим типам пространств $\mathcal{M}_1 = S^3 \times \mathbb{R}^4$ и $\mathcal{M}_2 = S^3 \times H^4$, на которых определена соответствующая метрика с группой голономии G_2 (здесь H^4 — это четвертая тензорная степень комплексного линейного тавтологического расслоения H над S^2).

Основной целью главы 3 является доказательство **теоремы 3.1**.

Теорема 3.1. *Для каждого параметра* $p < 0$ *существует полная риманова метрика вида* (1) *с группой голономии* G_2 *на* $S^3 \times \mathbb{R}^4$, *такая, что* $p = \frac{12}{B_1^2(0)(A_1'''(0) - A_2'''(0))}$.

При $t \to \infty$ *метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением* $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, *где* $C(S^2 \times S^3)$ *— конус над произведением сфер.*

Изложение доказательства **теоремы 3.1** построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (2) (**леммы 2.3 и 2.4**), они определяют асимптотику соответствующих метрик (**лемма 2.5**). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия **леммы 3.1**, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит однопараметрическое семейство траекторий системы (2) (**лемма 3.3**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области Π и Γ системы (2) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**лемма 2.6**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (**лемма 3.4**).

Основной целью главы 4 является доказательство **теоремы 4.1**.

Теорема 4.1. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик вида* $d\bar{s}^2$ *с группой голономии* G_2 *на* $H^4 \times S^3$, *причем метрики можно па-*

раметризовать набором начальных данных $(A_1(0),\ A_2(0),\ B_1(0),\ B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$*, где* $\lambda, \mu > 0$ *и* $\mu^2 + \lambda^2 = 1$.

При $t \to \infty$ *метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением* $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$*, где* $C(S^2 \times S^3)$ *— конус над произведением сфер. При этом сфера* S^2 *возникает как факторизация диагонально вложенной в* $S^3 \times S^3$ *трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю* $\xi^1 + \tilde{\xi}_1$.

Изложение доказательства **теоремы 4.1** проводится аналогично доказательству **теоремы 3.1** и построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (2) (**леммы 2.3 и 2.4**), они определяют асимптотику соответствующих метрик (**лемма 2.5**). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия **леммы 4.1**, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (2) (**лемма 4.2**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области П и Г системы (2) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**лемма 2.6**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику(**лемма 4.3**).

Список литературы

[1] Berger, M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variètès Riemanniennes/ M. Berger. — Bull. Soc. Math. France. — 1955.— V. 83. — P. 279–330.

[2] Borel, A. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes / A. Borel, A. Lichnerowicz. — C. R. Acad. Sci. Paris. — 1952. — V. 234. — P. 1835–1837.

[3] Brandhuber, A. Gauge theory at large N and new G_2 holonomy metrics / A. Brandhuber, J. Gomis, S. S. Gubser, S. Gukov. — Nucl. Phys. B. — 2001. — V. 611(1–3). — P. 179–204. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0106034v2

[4] Brandhuber, A. G_2 holonomy spaces from invariant three-forms / A. Brandhuber. — Nucl. Phys. B. — 2002. — V. 629(1–3). — P. 393–416. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0112113v2

[5] Bryant, R. L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy / R. L. Bryant, S. Salamon. — Duke Math. J. — 1989. — V. 58(3). — P. 829–850.

[6] Cartan, E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée / E. Cartan. I & II // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. — 1923. — V. 40. — P. 325–412. 1924. — V. 41. — P. 1–25 ou Oeuvres complètes, tome III, P. 659–746 et P. 799-824.

[7] Cartan, E. La géométrie des espaces de Riemann / E. Cartan. — Mémorial des Sciences Mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. — 1925. — V. 5.

[8] Cartan, E. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés / E. Cartan. // Acta Math. — 1926. — V. 48. — P. 1–42 ou Oeuvres complètes. Tome III. — V. 2. — P. 997–1038.

[9] Chong, Z. W. General metrics of G_2 holonomy and contraction limits / Z. W. Chong, M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope, P. Wagner. // Nucl. Phys. B. — 2002. — V. 638(3). — P. 459–482. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0204064v1

[10] Cvetic, M. Cohomogeneity one manifolds of $Spin(7)$ and G_2 holonomy / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope.

// Phys. Rev. D (3). — 2002. — V. 65(10). — 106004, 29 pp. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0108245v2

[11] Cvetic, M. Orientifolds and slumps in G_2 and $Spin(7)$ metrics / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Ann. Phys. — 2004. — V. 310(2). — P. 265–301. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0111096v2

[12] Cvetic, M. A G_2 unification of the deformed and resolved conifolds / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Phys. Lett. B. — 2002. — V. 534(1-4). — P. 172–180. — http://arxiv.org/abs/hep-th/0112138v3

[13] Gibbons, G. W. Einstein Metrics on S^3, $\mathbb{R}^3$, and $\mathbb{R}^4$ bundles / G. W. Gibbons, D. N. Page, C. N. Pope // Commun. Math. Phys. — 1990. — V. 127(3). — P. 529–553.

[14] Gray, A. Weak holonomy groups / A. Gray // Math Z. V. — 123(1971). — P. 290—300.

[15] Joyce, D. D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2 / D. D. Joyce. I and II // J. Differentional Geometry. — 1996. — V. 43(2). — P. 291–375.

[16] Joyce, D. D. Compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ / D. D. Joyce // Inv. Math. — 1996. — V. 123. — P. 507–552.

[17] Joyce, D. D. Compact manifolds with special holonomy / D. D. Joyce. — Oxford, 2000.

[18] Kovalev, A. Twisted connected sums and special Riemannian holonomy / A. Kovalev // J. Reine Angew. Math. — 2003. — V. 565. — P. 125–160.

[19] de Rham, G. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann / G. de Rham // Comm. Math. Helv. — 1952. — V. 26. — P. 328–344.

[20] Wilking, B. On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups / B. Wilking // J. Diff. Geom. — 1999. — V. 52(2). — P. 223–257.

[21] Базайкин, Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ / Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48(1). — С. 11–32.

[22] Базайкин, Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия / Я. В. Базайкин // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 263. — С. 6–17.

[23] Базайкин, Я. В. $Spin(7)$-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Матем. сб. — 2011. — Т. 202(4). — С. 3–30.

[24] Бессе, А. Многообразия Эйнштейна. / А. Бессе. — М.: Мир, 1990.

[25] Каждан, Д. Л. Функции-кривизны для открытых двумерных многообразий / Д. Л. Каждан, Ф. У. Уорнер // Сб. Исследования по метрической теории поверхностей. — М.: Мир, 1980. — С. 60–80.

[26] Малькович, Е. Г. О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(4)$ / Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52(1). — С. 95–99.

Список работ автора по теме диссертации

[27] Богоявленская, О. А. Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ /

Я. В. Базайкин, О. А. Богоявленская // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93(5). — С. 645-657.

[28] Богоявленская, О. А. Об одном новом семействе полных римановых метрик с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$ / О. А. Богоявленская // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54(3). — С. 551-562.

[29] Богоявленская, О. А. Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ / О. А. Богоявленская // Материалы международной конференции "Fourth geometry meeting dedicated to the centenary of A.D.Alexandrov". — СПб.: ВВМ, 2012. — С. 39.