На правах рукописи

**Бардаков Валерий Георгиевич**

# СВОЙСТВА ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, АВТОМОРФИЗМЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2005

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
**Владимир Михайлович Левчук**

доктор физико-математических наук, профессор
**Евгений Иосифович Тимошенко**

доктор физико-математических наук, профессор
**Альфред Львович Шмелькин**

Ведущая организация:

Челябинский государственный университет

Защита диссертации состоится 14 апреля 2005 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 10 марта 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В работе исследуются: группы, построенные при помощи групповых конструкций (свободные произведения с объединением, HNN–расширения, полупрямые произведения и др.), группы автоморфизмов свободных групп и свободных модулей, фундаментальные группы компактных трехмерных многообразий; рассматриваются некоторые приложения алгебраических методов.

Первоначально группы появились как группы преобразований, вначале конечных множеств, а потом и бесконечных. Затем стали изучать преобразования и других множеств. Изучение преобразований векторных пространств привело к появлению линейных групп. Позднее стали изучать группы автоморфизмов различных алгебраических систем. В последние десятилетия появились и активно изучаются классы гиперболических и автоматных групп, которые можно рассматривать как группы преобразований метрических пространств и группы преобразований слов над некоторым алфавитом [15, 18, 20, 24, 42, 54].

Изучение группы кос и группы сопрягающих автоморфизмов относится к важному направлению в подгрупповом описании группы автоморфизмов свободной группы. Для вербальных подгрупп произвольной группы традиционно вызывают интерес вопросы вычисления ширины вербальных подгрупп и длины элементов относительно тех или иных подмножеств.

Напомним, что *вербальной подгруппой* $V(G)$ группы $G$ относительно множества теоретико–групповых слов $V$ называется подгруппа, порожденная множеством значений слов из $V$ на группе $G$, т. е.

$$V(G) = \langle v(g_1, g_2, \ldots, g_{n(v)}) \mid v \in V, \quad g \in G \rangle$$

(см. [15, с. 143]). *Шириной* $\mathrm{wid}(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества слов $V$ называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения $\leq m$ значений слов из $V^{\pm 1}$.

Термин “ширина” введен Ю. И. Мерзляковым (1967) в работе [23] (см. также [24, § 12]), хотя ширина вербальных подгрупп исследовалась и в более ранних работах. Так Шода (1936) изучал коммутаторную ширину группы $\mathrm{SL}_n(F)$ для алгебраически замкнутого поля $F$. Ширина вербальных подгрупп исследовалась также в работах Г. Хигмана, Б. Нейман и Х. Нейман (1949), Ито (1951), Ф. Холла (1959 ) и многих других авторов.

Наиболее общий результат о ширине вербальных подгрупп принадлежит Ю. И. Мерзлякову [23]: всякая вербальная подгруппа алгебраической группы $G \leq \mathrm{GL}_n(\Omega)$, где $\Omega$ — алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над простым подполем, имеет конечную ширину относительно любого слова $v$. В других работах выбирались конкретные группы $G$, слова $v$ и давались оценки ширины $\mathrm{wid}(G, v)$.

Ряд работ посвящен исследованию ширины коммутанта некоторых классических групп относительно коммутатора $v = x^{-1}y^{-1}xy$. Например, Томпсон [71] доказал, что если $F$ — поле, то $\mathrm{wid}(\mathrm{GL}_n(F), v) = 1$, $\mathrm{wid}(\mathrm{SL}_n(F), v) \leq 2$ при любом $n \geq 2$. Гоу [53] доказал, что ширина $\mathrm{wid}(\mathrm{Sp}_{2n}(F), v)$ коммутанта симплектической группы не превосходит 2 при любом $n \geq 1$.

Ито [58] доказал, что при $n \geq 5$ всякий элемент из коммутанта симметрической группы $S_n$ является коммутатором. Оре [67] обобщил этот результат на группу подстановок счетного множества.

Отметим, что проблема вычисление ширины симметрической и знакопеременной группы, а также линейной группы над конечным полем представляет интерес для криптографии (см. [5]).

Можно показать [73, лемма 1], что ширина $\mathrm{wid}(G, V)$, вообще говоря, зависит от множества $V$, а не только от подгруппы $V(G)$. Поэтому, говоря о наиболее употребительных вербальных подгруппах, мы будем иметь в виду ширину относительно их естественного задания, например, для коммутанта — относительно коммутатора $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, а для $s$–й степени — относительно слова $x^s$.

Многие авторы изучали следующий вопрос: как меняется ширина вербальных подгрупп при различных групповых конструкциях, т. е. если $A$ и $B$ — группы, $G$ — группа, полученная из $A$ и $B$ при помощи некоторой групповой конструкции (свободное произведение с объединением, HNN–расширение, расширение, сплетение и т. д.), то как выражается ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ через $\mathrm{wid}(A, V)$ и $\mathrm{wid}(B, V)$?

В этом направлении Ремтулла [68, 69] доказал, что 1) в нетривиальном свободном произведении $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(A * B)$ относительно слова $v$ бесконечна тогда и только тогда, когда $|A|\geq 3$ и $|B|\geq 2$; 2) коммутант любой конечно порожденной разрешимой группы ступени разрешимости $\leq 3$ имеет конечную ширину. Вопрос М. И. Каргаполова, справедлив ли этот результат для произвольной конечно порожденной разрешимой группы, остается открытым (см. [17, вопрос 4.34]), хотя доказано [28], что ширина всякой вербальной подгруппы полициклической группы конечна.

В работах Х. С. Аламбергенова и В. А. Романькова [1], а также Акхаван-Малаери и Ремтуллы [35] найдена ширина коммутанта свободной нильпотентной группы. Е. Г. Смирнова [31] исследовала ширину вербальных подгрупп относительно слов $x^m$, $m \in \mathbb{N}$, в свободной двуступенно нильпотентной группе $N_{n,2}$ ранга $n$. Она доказала, что $\mathrm{wid}(N_{n,2}, x^{2k}) = 2[n/2] + 1$ при $n \geq 2$, $k \geq 1$ и $\mathrm{wid}(N_{n,2}, x^{2k+1}) = 1$ при всех натуральных $n$ и $k$.

Далее будем считать, что $V$ — конечное, собственное (т. е. вербальная подгруппа $V(F_2)$ нетривиальна и отлична от всей группы $F_2$) множество слов.

Ширина вербальных подгрупп свободных произведений с объединением исследовалась в работах Р. И. Григорчука [7], И. В. Добрыниной [11], В. А. Файзиева [50]. Наиболее общий результат принадлежит В. А. Файзиеву: если $G = A *_U B$ и число двойных смежных классов $A$ по $U$ не меньше 3, а $|B : U| \geq 2$, то ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна. (В этом случае будем говорить, что $G$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.)

Другой подход к вычислению ширины вербальных подгрупп предложил Р. И. Григорчук [7]. Используя связь между второй группой ограниченных когомологий $H^{(2)}_{b,2}(G)$ группы $G$ и шириной коммутаторных вербальных подгрупп группы $G$, он получил частичный ответ на вопрос из препринта [79], а точнее, доказал, что если группа $G = A *_U B$ удовлетворяет условиям из предыдущего абзаца, а $V$ — коммутаторное множество слов, то ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна. Кроме того, Р. И. Григорчук изучал ширину вербальных подгрупп HNN–расширений относительно коммутаторного множества слов.

Обобщением понятия ширины вербальной подгруппы является понятие ширины группы относительно фиксированного множества порождающих. Если $G$ — некоторая группа, порожденная множеством $A$, то всякий элемент $g \in G$ представим в виде

$$g = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_k^{\varepsilon_k}, \quad a_j \in A, \quad \varepsilon_j = \pm 1. \tag{1}$$

Ясно, что такое представление не единственное. *Длиной* (или *A–длиной*)

$l_A(g)$ элемента $g$ относительно множества $A$ называется длина кратчайшего представления (1). *Шириной* группы $G$ относительно множества порождающих $A$ называется

$$\mathrm{wid}(G, A) = \sup_{g \in G} l_A(g),$$

т. е. наибольшая длина элемента $g$, если такой элемент существует и $\mathrm{wid}(G, A) = \infty$ в противном случае.

Если мы рассмотрим свободную группу $F$ с конечным или счетным множеством порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, то длина произвольного элемента из $F$ относительно множества $X$ находится довольно легко. Проблема вычисления длины относительно других множеств порождающих может оказаться нетривиальной задачей. Так Р. И. Григорчук и П. Ф. Курчанов [8] построили алгоритм, позволяющий вычислять длину $l_Y(g)$ произвольного элемента $g \in F$ относительно множества

$$Y = \{f^{-1} x_i^m f \mid m \in \mathbb{Z}, f \in F, i = 1, 2, \ldots\}.$$

А. Ю. Ольшанский [66] установил связь проблемы вычисления длины в свободной группе с проблемой равенства слов в некоторой группе. Пусть $F_n$ — свободная группа степени $n$ с множеством свободных порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ — некоторое множество слов из $F_n$. Введем множество

$$Z = \{f^{-1} r_i^k f \mid k \in \mathbb{Z}, f \in F_n, i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Очевидно, группа $\langle Z \rangle$ совпадает с нормальным замыканием множества $R$ в группе $F_n$. Если элемент $g$ из $F_n$ не лежит в группе $\langle Z \rangle$, то положим $l_Z(g) = \infty$. А. Ю. Ольшанский доказал, что алгоритм вычисления $Z$–длины в группе $F_n$ существует тогда и только тогда, когда в группе $\mathrm{гр}(x_1, x_2, \ldots, x_n || r_1, r_2, \ldots, r_m)$ разрешима проблема равенства.

Символом $\mathrm{cl}(g)$ будем обозначать коммутаторную длину неединичного элемента $g$ из коммутанта $G'$ группы $G$, т. е. $\mathrm{cl}(g) = l_K(g)$, где $K$ — множество коммутаторов в группе $G$.

Вопрос о вычислении коммутаторной длины в произвольной группе $G$ сформулировал М. Громов [55, p. 145]. В частности, он спрашивал: как связана $\mathrm{cl}(g)$ и $\mathrm{cl}(g^m)$ для натурального $m$ и $g \in G'$.

По–видимому, первый алгоритм вычисления коммутаторной длины в свободной группе был построен Голдстейном и Тернером [52]. Затем Каллер [46] дал другой алгоритм вычисления коммутаторной длины, который может быть использован не только для свободных групп, но и для свободных произведений. Кроме того, он установил, что если $a$ и

$b$ — свободные порождающие свободной группы $F_2$, то для всякого натурального $m$ справедливо равенство $\mathrm{cl}([a,b]^m) = [m/2]+1$. Еще один алгоритм вычисления коммутаторной длины можно извлечь из работы А. Ю. Ольшанского [26]. Все эти алгоритмы, в той или иной степени, используют геометрические соображения: графы в работе [52], диаграммы на ориентируемых поверхностях в работах [46] и [26].

Из других результатов отметим следующие. Шютценберже установил, что если $z \neq e$ и $m > 1$, то $\mathrm{cl}(z^m) > 1$. Отвечая на вопрос Эдмундса и Розенбергера, в работе [45] установлено, что при $m > 3$ для всякого неединичного $z \in F'$ справедливо неравенство $\mathrm{cl}(z^m) > 2$. В этой же работе описаны все элементы, имеющие коммутаторную длину 2, а в работе А. Вдовиной [72] построен алгоритм, позволяющий находить слова заданной коммутаторной длины. Дункан и Хоуе [47] установили неравенство $\mathrm{cl}(z^m) \geq (m+1)/2$. К сожалению, эта оценка не зависит от коммутаторной длины самого элемента $z$.

Некоторые авторы изучали вербальные подгруппы в группе кос. Группа кос $B_n$ была введена Э. Артином в 1925 г. Группа $B_n$ задается множеством порождающих $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ и определяется соотношениями

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad i = 1,2,...,n-2,$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| \geq 2.$$

Группа $B_n$ широко используется в теории узлов, так как проблема классификации узлов сводится (по теореме А. А. Маркова) к ряду алгебраических проблем, связанных с группами $B_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Г. С. Маканина сформулировал следующий вопрос: “Построить косу, принадлежащую коммутанту группы кос и не являющуюся коммутатором” (см. [17, вопрос 6.22]). Ю. С. Семенов [30] указал в $B_3$ элемент, равный произведению двух коммутаторов и не сводящийся к одному коммутатору. Н. Н. Репин [27] показал, что относительно слова $[x,y]$ коммутанты групп $B_3$ и $B_4$ имеют бесконечную ширину, а затем В. Г. Дурнев и В. К. Шалашов [13] установили, что и любая собственная вербальная подгруппа этих групп, определенная конечным множеством слов, имеет бесконечную ширину. Их доказательство основано на том, что группы $B_3$ и $B_4$ допускают гомоморфизм на свободное произведение $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, а всякая собственная вербальная подгруппа свободного произведения $A * B$, $|A| \geq 2$, $|B| \geq 3$, определенная конечным множеством слов, имеет бесконечную ширину. При $n \geq 5$ гомоморфизма группы $B_n$ на такое свободное произведение не существует [12], поэтому необходимы существенно иные соображения.

Группа кос $B_n$ вкладывается в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$. Как установил Э. Артин [40, теорема 1.9], автоморфизм $\beta$ из $\mathrm{Aut}(F_n)$ принадлежит группе кос $B_n$ тогда и только тогда, когда $\beta$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1)\ \ \beta(x_i) = a_i^{-1} x_{\pi(i)} a_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$2)\ \ \beta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $\pi$ — некоторая подстановка из $S_n$, а $a_i \in F_n$.

Автоморфизмы, удовлетворяющие условию 1), называются *сопрягающими автоморфизмами.* Группа сопрягающих автоморфизмов обозначается символом $C_n$. Сопрягающий автоморфизм, действующий тождественно по модулю коммутанта $F_n'$, называется *сопрягающим базис автоморфизмом.* Маккул [63] доказал, что группа сопрягающих базис автоморфизмов $Cb_n$ порождается автоморфизмами $\varepsilon_{ij}$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

$$\varepsilon_{ij} : \begin{cases} x_i \longmapsto x_j^{-1} x_i x_j & \text{при } i \neq j, \\ x_l \longmapsto x_l & \text{при } l \neq i, \end{cases}$$

и нашел систему определяющих соотношений группы $Cb_n$. Так как группа $C_n$ является обобщением группы кос $B_n$, то естественно ожидать, что многие свойства группы кос переносятся и на группу $C_n$.

Вопрос о линейности (т. е. о точной представимости конечномерными матрицами над полем) групп кос сформулировал Бурау в 1936 г. Линейность группы $B_3$ доказал В. Магнус (см. [40, теорема 3.15]). Вопрос о линейности групп $B_n$ при $n \geq 4$ почти 65 лет оставался открытым. Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным. В 1991 г. Муди опроверг эту гипотезу, построив нетривиальный элемент, лежащий в ядре представления Бурау группы $B_n$ при $n \geq 9$. Позднее Лонг и Патон показали, что представление Бурау не является точным уже при $n \geq 6$, а Бигелоу снизил эту границу до 5. Вопрос о точности представления Бурау группы $B_4$ до сих пор остается открытым.

Лоуренс [61] построила новые представления группы кос $B_n$, а в работах Крамера [60] и Бигелоу [38] показано, что одно из этих представлений является точным. Следовательно, группы кос являются линейными. При этом известно, что сама группа $\mathrm{Aut}(F_n)$ не является линейной при $n \geq 3$ (см. [51]).

Группа кос $B_n$ является подгруппой группы $C_n$. Поэтому естественно сформулировать вопрос (см. [17, вопрос 15.9]) о линейности группы $C_n$ при $n \geq 3$ (группа $C_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, а потому линейна).

Хорошо известно (см., например, [15, с. 25]), что всякая матрица из общей линейной группы $\mathrm{GL}_n(F)$ над полем $F$ представима в виде произведения элементарных трансвекций и диагональной матрицы, причем из самого доказательства легко вытекает оценка числа элементарных трансвекций, требующихся для такого разложения. Это число зависит только от $n$ и не зависит от самой матрицы.

Много работ посвящено вычислению ширины линейных групп относительно различных множеств порождающих. Перечислим некоторые из них. Картер и Келлер [43] доказали, что ширина группы $\mathrm{SL}_n(\acute{O})$, где $\acute{O}$ — кольцо целых чисел алгебраического числового поля, относительно множества элементарных трансвекций, конечна. В работе С. И. Адяна и Меннике [34] дано более простое доказательство этого факта для случая, когда $\acute{O}$ — кольцо целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. К. Х. Закирьянов [14] установил конечность ширины симплектической группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\acute{O})$, $n \geq 3$, относительно множества элементарных матриц. Аналогичные результаты для некоторых групп Шевалле над тем же кольцом $\acute{O}$ получил О. Н. Тавгень [32]. С другой стороны, ван дер Каллен [59] доказал, что если $F$ — поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, то группа $\mathrm{SL}_n(F[x])$ при $n \geq 2$ имеет бесконечную ширину относительно множества элементарных трансвекций.

Так как группа матриц $\mathrm{GL}_n(R)$ над кольцом $R$ изоморфна группе автоморфизмов $\mathrm{GL}_n(M)$ свободного $n$–мерного модуля $M = R^n$, то естественно изучать разложения автоморфизмов из $\mathrm{GL}_n(M)$ в произведение простых автоморфизмов, которые в случае коммутативного кольца $R$ исчерпываются трансвекциями и дилатациями. Теорема Дьедонне утверждает, что если $V$ — $n$–мерное векторное пространство над полем $F$, то всякое преобразование $\sigma \in \mathrm{GL}_n(V)$, не являющееся большой дилатацией, представимо в виде произведения $\leq n-1$ трансвекций и одного простого преобразования; если же $\sigma$ является большой дилатацией, то она представима в виде произведения $\leq n$ трансвекций и одного простого преобразования. В работе [76] было получено обобщение теоремы Дьедонне для группы автоморфизмов $\mathrm{GL}_n(M)$ свободного $n$–мерного модуля $M = R^n$ над некоторым кольцом $R$. В качестве следствия установлено, что ширина группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ относительно множества коммутаторов не превосходит 10 при всех $n \geq 3$. (Известно, что при $n = 2$ эта ширина бесконечна). Тем самым улучшена оценка М. Ньюмена [65]: ширина группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ не превосходит $c\ln(n) + 40$, где $c = 2\ln(3/2)$.

Для произвольной группы $G$, содержащей элементы конечного порядка $k$, можно поставить вопрос об описании элементов из $G$ представимых в виде произведения элементов порядка $k$. В частности, если $l$

— некоторое натуральное число, то возникает вопрос об описании элементов из $G$ имеющих длину $\leq l$ относительно множества элементов порядка $k$.

Ряд работ посвящен ответу на этот вопрос в знакопеременной группе $A_n$. Так Моран [64] доказал, что в $A_n$ при $n > 2$ не всякий элемент представим в виде произведения двух инволюций из $A_n$, хотя всякий элемент представим в виде произведения двух элементов порядка 3 (см. [36]). В работе [41] доказано, что всякий элемент из $A_n$ при $n \geq 15$ представим в виде произведения двух элементов порядка 5.

Исходя из этих результатов Бреннер и Эванс [41] сформулировали проблему описания четных подстановок, представимых в виде произведения двух подстановок порядка $k$, $k \geq 4$. В частности, они сформулировали следующие гипотезы:

**Гипотеза 1.** При любых целых $k \geq 4$ и $m \geq 1$ всякий элемент группы $A_{km}$ представим в виде произведения двух подстановок, каждая из которых в разложении на независимые циклы состоит из $m$ циклов длины $k$.

**Гипотеза 2.** Пусть $k$ — простое натуральное число, сравнимое с 1 по модулю 4. Тогда никакая подстановка, имеющая циклический тип $4^1 2^{(3k-5)/2}$ не является произведением двух подстановок порядка $k$ в группе $A_{3k-1}$.

**Гипотеза 3.** Пусть $k$ — простое натуральное число, $k \geq 7$. Тогда никакая подстановка, имеющая циклический тип $3^1 2^{2k-2}$ не является произведением двух подстановок порядка $k$ в группе $A_{4k-1}$.

Справедливость первой гипотезы была доказана при $k = 4$, $m \geq 1$ и $k \geq 5$, $m = 1$. В полном объеме справедливость первой гипотезы установлена в работе диссертанта [74] Справедливость второй гипотезы была установлена при $k = 5$ в работе [41]. Там же было отмечено, что при $k = 7$ справедливость третьей гипотезы была проверена Листом, который использовал таблицу характеров и компьютерные вычисления.

Фундаментальные группы компактных двумерных многообразий хорошо известны [22] и достаточно подробно изучены. В то же время [16, § 5.1] для $n \geq 4$ каждая конечно определенная группа может быть реализована как фундаментальная группа некоторого замкнутого ориентируемого $n$-многообразия. Случай трехмерных многообразий является наиболее сложным, поскольку, как показал Столлингс, не существует алгоритма, позволяющего по конечному генетическому коду группы определить: является ли данная группа фундаментальной группой некоторого трехмерного многообразия.

Проблема распознавания групп трехмерных многообразий представляет интерес как для трехмерной топологии (фундаментальная группа многообразия является одним из его важнейших инвариантов), так и для теории групп, поскольку зная, что группа является фундаментальной группой трехмерного многообразия, мы можем получить информацию о ее строении. В частности, если $G$ – фундаментальная группа трехмерного многообразия постоянной отрицательной кривизны, то она является гиперболической по Громову и тогда в $G$ разрешимы проблема равенства, проблема сопряженности и некоторые другие проблемы.

Кавикиоли, Хегенбарт и Реповш [44] ввели класс групп $G_n(m,k)$, $n \in \mathbb{N}$, $m,k \in \mathbb{Z}$:

$$G_n(m,k) = \text{гр}(x_1, x_2, \dots, x_n \mid\mid x_i x_{i+m} = x_{i+k},\ i = 1, \dots, n),$$

где все индексы берутся по модулю $n$ и принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Отметим, что класс групп $G_n(m,k)$ содержит многие известные и активно изучавшиеся ранее группы. При $m = 1$, $k = 2$ имеем $G_n(1,2) \cong F(2,n)$ – группы Фибоначчи, введенные Конвеем. Как показали Хеллинг, Ким и Меннике [57], если $n \geq 4$ четно, то $F(2,n)$ являются фундаментальными группами трехмерных многообразий. Более того, при $n \geq 8$ эти многообразия являются гиперболическими. С другой стороны, как заметил Маклахлан [62], если $n$ нечетно, то $F(2,n)$ не может быть фундаментальной группой гиперболического трехмерного орбифолда (в частности, многообразия) конечного объема. При $m = 2$, $k = 1$ имеем $G_n(2,1) \cong S(n)$ – группы Сирадски, изучавшиеся в [70], где было показано, что они являются фундаментальными группами трехмерных многообразий.

Кроме того, в работе [44] сформулирован следующий вопрос: являются ли группы $G_n(m,k)$ фундаментальными группами трехмерных многообразий?

Следуя А. И. Мальцеву [21], будем говорить, что подгруппа $H$ группы $G$ *финитно отделима от элемента* $g \in G \setminus H$, если существует гомоморфизм $\varphi$ группы $G$ в некоторую конечную группу, при котором $\varphi(g) \notin \varphi(H)$. Подгруппу, которая отделима от всех не входящих в нее элементов, называют *финитно отделимой.* Рассматривая вместо гомоморфных отображений на конечные группы гомоморфизмы в группы какого-либо другого класса $\mathcal{K}$, придем к определению *отделимости в классе* $\mathcal{K}$. Проблема финитной отделимости подгрупп тесно связана с проблемой вхождения элементов в подгруппу [21].

Из результата М. Холла следует, что любая конечно порожденная подгруппа свободной группы является финитно отделимой. Д. И. Молдаванский сформулировал следующий

**Вопрос** ([17, вопрос 15.60]). Верно ли, что любая конечно порожденная $p'$–изолированная подгруппа свободной группы отделима в классе конечных $p$–групп?

В пользу этой гипотезы говорит результат Е. Д. Логиновой [19, § 3] о том, что во всякой конечно порожденной нильпотентной группе любая $p'$–изолированная подгруппа отделима в классе конечных $p$–групп.

**Цель работы.** Целью диссертации является исследование вербальных подгрупп в некоторых классах групп, в частности, вычисление ширины вербальных подгрупп и вычисление длины элементов относительно различных множеств порождающих; изучение различных обобщений групп кос (группы Артина, группы сопрягающих автоморфизмов, группы кос многообразий); решение ряда известных проблем теории групп, сформулированных такими математиками, как П. де ля Арп, Бреннер, М. Громов, Кавикиоли, Д. И. Молдаванский, Розенбергер и др.; исследование проблемы классификации дифференциальных уравнений; нахождение дифференциальных тождеств; решение обратной задачи для матричного уравнения переноса.

**Научная новизна.** Все основные результаты работы являются новыми.

**Методы исследования.** В работе используются методы комбинаторной теории групп, теории линейных групп, маломерной топологии, методы классической алгебры, теории дифференциальных уравнений и теории обратных задач математической физики.

**Теоретическая и практическая ценность.** Предлагаемая работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп, а также по обратным задачам математической физики. Многие доказанные в диссертации теоремы могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

**Апробация.** Результаты диссертации докладывались на всесоюзных и международных конференциях: в Свердловске (1989), в Красноярске (1993, 2002), в Омске (1995), в Санкт–Петербурге (1997), в Новосибирске (2000, 2004), в Туле (2001, 2003), в Екатеринбурге (2001), в Гаете (Италия, 2003), в Варшаве (2003), в Москве (2003, 2004). Они обсуждались на специализированных семинарах: “Эварист Галуа”, “Теория групп", "Алгебра и логика", "Обратные задачи математической физики" (ИМ СО РАН и НГУ), на семинаре по алгебре в Красноярском университете, на семинаре по теории групп в МГУ.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [73]–[95].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения; шести глав, разбитых на 26 параграфов, содержит 6 рисунков, 6 таблиц и изложена на 206 страницах. Список литературы содержит 160 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации получены следующие основные результаты:

– доказано, что группа не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины, когда она является HNN–расширением со связанными подгруппами отличными от базовой группы, в частности, когда она порождается более чем двумя элементами и определяется одним соотношением;

– доказано, что во всякой неабелевой свободной группе существует конечно порожденная изолированная подгруппа, не являющаяся $p$–отделимой ни для какого простого $p$ (отрицательный ответ на вопрос 15.60 Д. И. Молдаванского из "Коуровской тетради");

– доказано, что существет континуум неизоморфных двупорожденных групп, обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью линейного роста и не являющихся группами полиномиального роста (отрицательный ответ на вопрос 14.27 А. Вайяна из "Коуровской тетради", а также на вопрос П. де ля Арпа);

– найдены условия представимости четных подстановок в виде произведения двух подстановок заданного порядка и, как следствие, подтверждены первые две гипотезы Бреннера–Эванса и опровергнута третья;

– найденные оценки значений функции длины на коммутанте свободной группы относительно множества коммутаторов частично отвечают на вопрос М. Громова и на вопрос Эдмундса и Розенбергера;

– доказано, что $Cb_n$ — группа сопрягающих базис автоморфизмов разлагается в полупрямое произведение некоторых групп и это разложение согласовано с соответствующим разложением группы крашеных кос; из полученного разложения выводится, что в группах $C_n$ и $Cb_n$ при

$n \geq 4$ проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы неразрешима;

– построены точные линейные представления следующих групп: группы кос $B_n(S^2)$ сферы $S^2$, группы классов отображений $M(0,n)$ сферы с $n$ выколотыми точками, группы кос $B_3(P^2)$ проективной плоскости $P^2$, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_2)$ свободной группы ранга 2; также построены линейные представления группы $C_n$, продолжающие представления Бурау и Лоуренс–Крамера группы кос $B_n$;

К другим результатам, имеющим и самостоятельный интерес отнесем следующие:

– построен чисто алгебраический алгоритм, позволяющий по произвольному элементу из коммутанта свободной группы находить его коммутаторную длину;

– введено понятие ширины производной подалгебры. Вычислена ширина производных подалгебр некоторых алгебр;

– для свободной абелевой группы $A$ конечного ранга и ее подгруппы $H$ найден критерий, позволяющий для элемента $a \in A$ проверить: существует ли автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ такой, что $a^{\varphi} \in H$ (ответ на вопрос В. Н. Безверхнего);

– доказано, что группа кос, а также многие группы Артина конечного и бесконечного типов не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины;

– получена классификация дифференциальных уравнений порядка $n$ с двумя независимыми переменными;

– установлена связь между тождеством Аниконова–Амирова и тождеством Пестова.

Перейдем к точным формулировкам.

В **первой главе** диссертации исследуются вербальные подгруппы HNN–расширений, групп с одним определяющим соотношением, а также свободных произведений с объединением.

При изучении ширины вербальных подгрупп будем считать, что $V$ — конечное множество слов, так как для любой вербальной подгруппы $V(G)$ можно подобрать такое бесконечное множество слов $W$, что $V(G) = W(G)$, а ширина $\mathrm{wid}(G,W)$ равна единице. Кроме того, будем считать, что $V$ — *собственное* множество слов, т. е. для свободной группы $F_2$ степени свободы 2 вербальная подгруппа $V(F_2)$ отлична от единичной и самой группы $F_2$. В противном случае назовем $V$ *несобственным* множеством слов. Ширина вербальной подгруппы относительно несобственного множества слов всегда конечна.

В первом параграфе излагается общий метод, восходящий к работе

Ремтуллы [68], позволяющий установить, что в группе $G$ ширина вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна относительно множества слов $V$. Его суть состоит в следующем.

Пусть $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, определенная на группе $G$ и принимающая значения из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Назовем $f$ *квазигомоморфной*, если функция $f(xy) - f(x) - f(y)$ ограничена на $G \times G$.

Квазигомоморфизм, который на любой абелевой подгруппе является гомоморфизмом называется псевдохарактером. В. А. Файзиев дал полное описание псевдохарактеров свободной группы, полупрямых и свободных произведений, а также некоторых других групп и полугрупп (см. [33] и цитированную там литературу).

Функцию $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ будем называть *$V$–слойно ограниченной* на $G$, если для всякого $n = 1, 2, \dots$ найдется такая константа $c(n) \in \mathbb{R}$ , что $|f(g)| \leq c(n)$ для всякого элемента g, представимого в виде произведения $n$ значений слов из $V^{\pm 1}$ на $G$.

В первом параграфе установлена

**Лемма 1.7.** *Пусть $G$ — группа. Если для множества слов $V$, определяющего вербальную подгруппу $V(G)$, найдется $V$–слойно ограниченная функция $f$, не ограниченная на $V(G)$, то* $\mathrm{wid}(G, V) = \infty$.

Доказательство этой леммы достаточно простое. Тем не менее эта лемма часто используется в дальнейшем изложении для доказательства бесконечности ширины вербальных подгрупп в различных классах групп.

Во втором параграфе доказывается

**Теорема 1.1.** *Пусть в* HNN*–расширении*

$$G^* = \text{гр}(G, t \mid\mid t^{-1}At = B,\ \varphi)$$

*связанные подгруппы $A$, $B$ отличны от базовой группы $G$. Тогда всякая вербальная подгруппа $V(G^*)$, определенная конечным собственным множеством слов $V$, имеет бесконечную ширину относительно $V$.*

Если хотя бы одна из связанных подгрупп $A$ или $B$ совпадает с базой $G$, то соответствующие примеры показывают, что эта теорема перестает быть справедливой.

В третьем параграфе изучается ширина вербальных подгрупп групп с одним определяющим соотношением. Используя метод Д. И. Молдаванского [25] (см., также [18, гл. 5]) позволяющий представить группы с одним соотношением в виде HNN-расширения доказана

**Теорема 1.2.** *Пусть $G$ — группа с одним определяющим соотношением, имеющая по меньшей мере три порождающих. Тогда всякая* *вербальная подгруппа $V(G)$, определенная конечным собственным множеством слов $V$ имеет бесконечную ширину относительно $V$.*

Построенные примеры показывают, что распространить эту теорему на группы с двумя порождающими и одним соотношением уже нельзя.

Результаты первой главы опубликованы в работах [79]–[80].

Во **второй главе** диссертации рассматривается свободная группа и изучается коммутаторная длина, разрешимость некоторых уравнений, а также свойство $p$–отделимости конечно порожденных подгрупп.

В § 1 построен алгебраический алгоритм вычисления коммутаторной длины $\mathrm{cl}(z)$ произвольного элемента $z \in F'$, где $F$ — свободная неабелева группа. Реализуется этот алгоритм следующим образом. Элементу $z$ мы сопоставим подстановку $\sigma$ из группы подстановок $\mathrm{S}_n$, где $n = |z|$ — длина элемента $z$. Затем определим действие некоторой группы на множестве подстановок из $\mathrm{S}_n$ и в орбите элемента $\sigma$ найдем подстановку, имеющую наибольшее число независимых циклов. Если это число обозначить через $v$, то искомая коммутаторная длина равна $\mathrm{cl}(z) = (1-v)/2+|z|/4$.

В § 2 исследуется вопрос М. Громова: как связаны $\mathrm{cl}(z)$ и $\mathrm{cl}(z^m)$, где $z \in F'$, $m \in \mathbb{N}$? Кроме того, исследуются вопросы, сформулированные в работе [49]. Замечается, что вместо свободной группы $F$ произвольного ранга можно рассматривать двупорожденную свободную группу $F_2$. Получена нижняя и верхняя оценки коммутаторной длины $\mathrm{cl}(z^m)$, а точнее, доказано, что для всякого $z \in F_2'$, всякого натурального $m$ и всякого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{End}F_2$, такого, что слово $z^\varphi$ циклически приведено, справедливы неравенства

$$\frac{ms(z^\varphi)+6}{12} \leq \mathrm{cl}(z^m) \leq [(2-m)/2] + m\mathrm{cl}(z),$$

где $s(z)$ — некоторое неотрицательное число, определяемое по элементу $z$. Во многих случаях это неравенство дает более точную оценку по сравнению с оценкой Дункана–Хоуе.

В § 3 для алгебры над кольцом вводится определение ширины производной подалгебры, двойственное понятию ширины коммутанта группы. Кроме того, для коммутативно–ассоциативного кольца $K$ с единицей строится некоторая $K$–алгебра $P$ (алгебра пар) и исследуются ее свойства. Эта алгебра обладает делителями нуля, не является разрешимой и не обладает свойством ассоциативности степеней. Тем не менее, она является Ли допустимой, а соответствующая ей алгебра Ли $P_L$ является 3–х ступенно разрешимой. Найдена ширина производной подалгебры алгебры $P$, а также ширина производной подалгебры алгебры Ли $P_L$. Помимо того, что алгебра $P$ кажется достаточно интересной и сама по себе, она используется при выводе оценки для $\mathrm{cl}(z^m)$.

Используя полученные оценки, в § 4 установлено, что в свободной группе $F_{2k}$ со свободными порождающими $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, $k \in \mathbb{N}$, для всякого натурального $m$ справедливо равенство $\mathrm{cl}(([a_1, b_1] \ldots [a_k, b_k])^m) = [(2-m)/2] + mk$. Отметим, что этот результат другими методами был ранее получен Бавардом [37].

В работе [49] сформулириван следующий вопрос: какие значения может принимать функция $\mathrm{cl}(z^m)$, $z \in F'$, при фиксированном натуральном $m$? При $m = 2$ дается ответ на этот вопрос. В диссертации построена такая последовательность элементов $d_k \in F_2'$, $k = 1, 2, \ldots$, что ни один из них не является собственной степенью и $\mathrm{cl}(d_k^2) = k + 1$. Кроме того, в этой же работе (см. [49, вопрос 3]) авторы спрашивают: "Если $[v, w][x, y] = z^2$ в $F$, то что можно сказать о группе $G = \langle v, w, x, y, z \rangle$?" Авторам известно, что ранг $G$ не превосходит 3. В диссертации показано, что ее ранг не превосходит 2.

Гаглион и Спеллман записали в "Коуровскую тетрадь" следующий вопрос (см. [17, вопрос 11.20]): "Пусть $[a, b] = [c, d]$ в свободной группе, где $a$, $b$, $[a, b]$ — базисные коммутаторы. Если $c$ и $d$ — произвольные (собственные) коммутаторы, то верны ли равенства $a = c$ и $b = d$?" Построен пример, дающий отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема М. Холла о финитной отделимости конечно порожденных подгрупп свободной группы перестает быть справедливой, если класс конечных групп заменить классом конечных $p$–групп. Действительно, рассмотрим в бесконечной циклической группе $G = \langle a \rangle$ подгруппу $H = \langle a^q \rangle$, где $q$ — простое число, отличное от $p$. Очевидно, $a \notin H$, но при любом гомоморфизме группы $G$ на $p$–группу образ элемента $a$ попадает в образ подгруппы $H$, т. е. подгруппа $H$ не является $p$–отделимой.

В приведенном примере $H$ не являлась $p'$–изолированной в $G$. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется *$p'$–изолированной* (где $p$ — простое число), если для любого простого числа $q$, отличного от $p$, и для произвольного элемента $g \in G$ из включения $g^q \in H$ следует, что и $g \in H$. Если же в в разобранном выше примере рассматривать только $p'$–изолированные подгруппы, то каждая из них является $p$–отделимой.

Основным результатом пятого параграфа является

**Теорема 2.4.** *Во всякой свободной неабелевой группе существует конечно порожденная изолированная подгруппа, которая не отделима в классе нильпотентных групп.*

Так как всякая конечная $p$–группа является нильпотентной [15, с. 162], а всякая изолированная подгруппа является и $p'$–изолированной для любого простого $p$, то непосредственно из этой теоремы получается отрицательный ответ на вопрос Д. И. Молдаванского.

Результаты второй главы опубликованы в работах [75, 83, 93]

В **третьей главе** диссертации рассматриваются некоторые обобщения группы кос: группы Артина, группы сопрягающих автоморфизмов, группы кос многообразий.

В первом параграфе дается определение группы кос и напоминаются некоторые ее свойства. В работе [73] установлено, что группа кос $B_n$, $n \geq 3$, не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Этот результат является обобщением результатов Ю. С. Семенова, Н. Н. Репина, В. К. Шалашова, В. Г. Дурнева и завершает исследования, начатые в связи с вопросом Г. С. Маканина. Одним из обобщений группы кос являются группы Артина. В работе [78] установлено, что многие группы Артина, также не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины.

Ранее это было известно только для коммутанта группы $I_2(p)$ при нечетном $p$ относительно коммутатора [9]. Сравнительно недавно (2002) В. Н. Безверхний и И. В. Добрынина [3] получили аналогичные результаты для двупорожденных групп Артина.

В § 2 дается описание группы кос, как подгруппы группы автоморфизмов свободной группы и вводится определение группы сопрягающих автоморфизмов $C_n$, которая также является обобщением группы кос.

В § 3 исследуется строение группы сопрягающих автоморфизмов $C_n$. Известно, что она содержит группу сопрягающих базис автоморфизмов $Cb_n$, которая является нормальной подгруппой индекса $n!$ и $C_n = Cb_n \leftthreetimes S_n$ (см. [29]). Поэтому все сводится к изучению группы $Cb_n$. Основным результатом третьего параграфа является

**Теорема 3.4.** *Группа сопрягающих базис автоморфизмов* $Cb_n$, $n \geq 2$, *разлагается в полупрямое произведение*

$$Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes (D_{n-2} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (D_2 \leftthreetimes D_1)) \ldots),$$

*где подгруппа* $D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *порождается элементами* $\varepsilon_{i+1,1}$, $\varepsilon_{i+1,2}$, $\ldots$, $\varepsilon_{i+1,i}$, $\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}$. *При этом элементы* $\varepsilon_{i+1,1}$, $\varepsilon_{i+1,2}$, $\ldots, \varepsilon_{i+1,i}$ *порождают свободную группу ранга* $i$, *а элементы* $\varepsilon_{1,i+1}$, $\varepsilon_{2,i+1}$, $\ldots, \varepsilon_{i,i+1}$ *порождают свободную абелеву группу ранга* $i$. *Это разложение согласовано с соответствующим разложением группы крашеных кос* $P_n$, *т. е. имеют место включения* $U_{i+1} \leq D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Построенное разложение не единственно. В § 5 будет построено другое разложение группы $Cb_n$. Используя найденные разложения, установлены некоторые свойства групп $C_n$ и $Cb_n$. В частности, доказано

**Предложение 3.5.** *Всякая вербальная подгруппа группы сопрягающих базис автоморфизмов $Cb_n$, $n \geq 2$, определенная конечным собственным множеством слов $V$, имеет бесконечную ширину.*

**Предложение 3.7.** *В группах $C_n$ и $Cb_n$ при $n \geq 4$ неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы.*

В § 6 строятся линейные представления группы $C_n$. Построено продолжение представления Бурау на группу $C_n$, а также показано, что точное линейное представление Лоуренс–Крамера группы $B_3$ продолжается на группу $C_3$, а при $n \geq 4$ построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления. Построенное представление не является точным при $n \geq 5$.

Группу кос $B_n$ можно рассматривать как частный случай общей констукции группы кос $B_n(M)$ на $n$ нитях многообразия $M$.

В § 7 доказано, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы является линейной при всех $n \geq 2$. Группа классов отображений $M(0, n)$ сферы с $n$ выколотыми точками является гомоморфным образом группы $B_n(S^2)$. Установлено, что группа $M(0, n)$ является линейной для всякого $n \geq 2$. Для групп кос $B_n(P^2)$ проективной плоскости мы установим линейность при $n = 3$ (при $n = 1, 2$ она конечна). Отметим, что линейность групп $B_n(S^2)$ и $M(0, n)$ независимо была установлена Бигелоу и Будней [39].

Как уже отмечалось выше, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$. В работе [48] установлено, что группа $\mathrm{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос $B_4$. Используя представление Лоуренс–Крамера, в § 8 будет построено в явном виде точное линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [73, 78, 86, 92, 94, 95].

В **четвертой главе** рассматривается группа подстановок и группа автоморфизмов свободного модуля и для них даются ответы на вопросы Бреннера–Эванса и на вопрос В. Н. Безверхнего.

В работе [74] доказано, что для любых целых чисел $k \geq 4$, $m \geq 1$ всякая подстановка из знакопеременной группы $A_{km}$ представима в виде произведения двух подстановок, каждая из которых разлагается на $m$ независимых циклов длины $k$. Эта теорема подтверждает первую гипотезу Бреннера–Эванса. Из нее, в частности, следует, что всякий элемент из $A_{km}$, $k \geq 4$, $m \geq 1$, является произведением двух элементов порядка $k$. Далее, естественно изучать представления подстановок из $A_n$ в виде произведения двух подстановок порядка $k$, где $n$ не делится на $k$.

В первом параграфе для всякого натурального $k \geq 4$ строится множество натуральных чисел $Q_k$ такое, что при всех $n \in Q_k$ в группе $A_n$ найдутся подстановки, не представимые в виде произведения двух подстановок, каждая из которых в разложении на независимые циклы содержит только циклы длины $k$ и 1. В частности, мы покажем, что при $k = 4$ множество $Q_4$ бесконечно. Кроме того, в качестве следствия установлена справедливость второй гипотезы для всех указанных значений $k$.

Доказано, что третья гипотеза неверна уже при $k = 11$, но тем не менее, если $k$ — простое и сравнимо с 1 по модулю 3, то третья гипотеза справедлива.

В ноябре 1997 г. на Мальцевских чтениях В. Н. Безверхний сформулировал следующий

**Вопрос.** Пусть $G = \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа конечного ранга $n$, $n \in \mathbb{N}$, $H$ — ее собственная подгруппа, а $w \in G \setminus H$. Существует ли автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$ такой, что $\varphi(w) \in H$?

В § 2 дается ответ на вопрос В. Н. Безверхнего. Чтобы сформулировать основной результат, напомним (см., например, [4, § 86]), что если $R$ — коммутативное евклидово кольцо с единицей, $M$ — свободный левый $R$–модуль ранга $n$, $n \in \mathbb{N}$, а $H$ — его нетривиальный подмодуль, то $H$ является свободным $R$–модулем ранга $k$, $1 \leq k \leq n$, и существует такой базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в $M$ и такой базис $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в $H$, что

$$v_i = m_i u_i, \quad m_{i+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m_i)$$

для некоторых элементов $m_i$ из $R$. Такие базисы называются *согласованными.* Обозначим $m(H) = m_1$. Заметим, что значение $m(H)$ определяется с точностью до умножения на обратимый элемент из $R$ и, в этом смысле, является инвариантом подмодуля $H$.

Основным результатом § 2 является

**Теорема 4.3** *Пусть $R$ — коммутативное евклидово кольцо с единицей, $M$ — свободный левый $R$–модуль ранга $n$, $n \in \mathbb{N}$, $H$ — его нетривиальный подмодуль, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — согласованные базисы в $M$ и $H$ соответственно. Для элемента $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in M$, $\lambda_i \in R$, найдется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\ M$, что $\varphi(w) \in H$ тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель* н.о.д.$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *делится на $m(H)$.*

Так как свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n$ ранга $n$ является свободным левым модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, то из этой теоремы получается требуемый критерий.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [74, 81, 85].

В **пятой главе** изучаются группы Кавикиоли–Хегенбарта–Реповша, а также свойство регулярной исчерпываемости групп и его связь с функцией роста в группе.

В §§ 1–2 устанавливаются некоторые факты о строении групп $G_n(m,k)$. Получены признаки цикличности этих групп, разложимости их в свободное произведение, а также попарной изоморфности. Доказывается признак асферичности групп этого класса.

В § 3 дается частичный ответ на вопрос из [44], а именно, показано, что достаточно большой подкласс групп $G_n(m,k)$ с нечетным числом порождающих $n$ не может быть реализован как фундаментальные группы гиперболических трехмерных орбифолдов (в частности, многообразий) конечного объема. Установлена

**Теорема 5.4.** (совместно с А. Ю. Весниным). *Пусть $n$ – нечетно, $k-m$ – четно и* н.о.д.$(m-2k,n)=1$. *Тогда группа $G_n(m,k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда (в частности, 3-многообразия) конечного объема.*

В § 4 приведены порядки групп $G_n(m,k)$ и их абелизаторы для малых значений параметров, полученные в результате компьютерных вычислений с помощью программы *GAP*.

В теории двумерных римановых многообразий хорошо известно понятие "регулярно исчерпываемого многообразия". В § 5 аналогичное понятие вводится для групп.

Пусть группа $G=\langle A\rangle$, где $A=\{a_1^{\pm1},\ldots,a_m^{\pm1}\}$ — конечное множество порождающих. Последовательность конечных подмножеств $L_k$, $k=1,2,\ldots$, из $G$ назовем *регулярно исчерпывающей*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $L_k\subset L_{k+1}$ для всех $k\geq 1$,

2) $G=\bigcup\limits_{k\geq 1} L_k$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\partial L_k|}{|L_k|}=0$, где $\partial L_k=\{g\in G\setminus L_k\mid$ существует $a\in A$ такой, что $ga\in L_k\}$ — граница множества $L_k$.

Группу, обладающую регулярно исчерпывающей последовательностью, назовем *регулярно исчерпываемой.* Класс регулярно исчерпываемых групп обозначим символом RG. Если последовательность $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ кроме того удовлетворяет условию:

4) существуют константы $c\geq 0$ и $d\geq 1$ такие, что $|L_k|\leq ck^d$ для всех $k\geq 1$,

то будем называть ее *регулярно исчерпывающей последовательностью* *полиномиального роста.* Класс групп обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью полиномиального роста обозначим символом RPG. В частности, класс групп, обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью линейного роста обозначим символом RLG.

Класс групп полиномиального роста обозначается PG. Если функция роста группы $G$ не эквивалентна никакой показательной функции, то $G$ называется *группой субэкспоненциального роста.* Класс групп субэкспоненциального роста обозначается SG. Если функция роста группы $G$ не эквивалентна никакой показательной функции и не эквивалентна никакой степенной функции, то $G$ называется *группой промежуточного роста.*

Основным результатом пятого параграфа является

**Теорема 5.5.** *Справедливо включение*: SG $\subseteq$ RLG, *т. е. во всякой группе субэкспоненциального роста существует регулярно исчерпывающая последовательность линейного роста.*

В качестве следствия этой теоремы получается отрицательный ответ на вопрос 14.27 из "Коуровской тетради" [17]. В наших обозначениях этот вопрос можно сформулировать следующим образом: "Справедливо ли включение RPG$\subseteq$PG?" Кроме того, П. де ля Арп [56] спрашивал: "Справедливо ли включение RLG$\subseteq$PG?" Используя результаты Р. И. Григорчука [6], построившего примеры групп промежуточного роста, установлено такое

**Следствие.** *Существует континуум неизоморфных двупорожденных групп, обладающих регулярно исчерпывающей последовательностью линейного роста и не являющихся группами полиномиального роста.*

Это следствие дает отрицательный ответ на вопрос 14.27 и на вопрос П. де ля Арпа.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [89, 84, 91]. Результаты, касающиеся групп Кавикиоли–Хегенбарта–Реповша получены совместно с А. Ю. Весниным.

В **шестой главе** алгебраические методы применяются для исследования дифференциальных уравнений и обратных задач математической физики.

В § 1 дается классификация дифференциальных уравнений произвольного порядка с двумя независимыми переменными. Указываются замены независимых переменных, приводящие уравнения к более простому виду. В случае уравнений второго порядка отсюда получается хорошо известная классификация уравнений математической физики.

Уравнения третьего порядка классифицированы в работе Т. Д. Джураева и Я. Попёлека [10].

При исследовании обратных задач для кинетических уравнений и задач интегральной геометрии важную роль играют дифференциальные тождества (см. [2, 77, 87]). В частности, они широко используются для доказательства единственности и устойчивости решения обратных задач.

В § 2 устанавливается некоторое дифференциальное тождество, являющееся обобщением известного тождества Аниконова–Амирова и из него выводится тождество Пестова, которое широко используется в задачах интегральной геометрии.

В § 3 рассматривается матричное кинетическое уравнение и, используя “метод лишних уравнений”, разработанный Ю. Е. Аниконовым, решается обратная задача одновременного восстановления помимо решения двух матриц, входящих в правую часть уравнения.

Результаты шестой главы опубликованы в работах [77, 82, 87, 88, 90].

# Список литературы


[1] Аламбергенов Х. С., Романьков В. А. О произведениях коммутаторов в группах, Деп. в ВИНИТИ, 1985, № 4566–В85.

[2] Аниконов Ю. Е., Пестов Л. Н., Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, изд-во НГУ, 1990.

[3] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими, Чебышевский сборник, Тула, 3, № 1 (2002), 11–16.

[4] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра, М.: Наука, 1979.

[5] Глухов М. М, Зубов А. Ю. О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих, Матем. вопросы киберн., № 8 (1999), 5–32.

[6] Григорчук Р. И. Степени роста конечно–порожденных групп и теория инвариантных средних, Изв. АН СССР, Сер. математическая, 48, № 5 (1984), 939–985.

[7] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций, Матем. заметки, 59, № 4 (1996), 546–550.

[8] Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф. О ширине элементов в свободных группах, Укр. матем. журн., 43, № 7–8 (1991), 911–918.

[9] Гринблат В. А. О коммутаторных уравнениях в группах Артина конечного типа, Международн. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп, Новосибирск, 1989, 37.

[10] Джураев Т. Д., Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка, Дифференц. уравнения, 27, № 10 (1991), 1734–1745.

[11] Добрынина И. В. О ширине свободных произведений с объединением, Матем. заметки, 68, № 3 (2000), 353–359.

[12] Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос $B_3$ и $B_4$, Деп. в ВИНИТИ, 1987, № 4040-В87.

[13] Дурнев В. Г., Шалашов В. К. О ширине коммутанта групп кос $B_3$ и $B_4$, 19–я Всесоюзн. алгебр. конф. Львов, 1987, 89.

[14] Закирьянов К. Х. Конечность ширины симплектической группы над кольцами алгебраических чисел относительно элементарных матриц, Алгебра и логика, 24, № 6 (1985), 667–673.

[15] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп, 4–е изд., М., Наука, 1996.

[16] Коллинз Д, Цишанг Х. Комбинаторная теория групп и фундаментальные группы, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, Т. 58: Алгебра-7, М., ВИНИТИ, 1990, 5–190.

[17] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 15-е изд., Новосибирск, Ин–т матем. СО РАН, 2002.

[18] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп, М.: Мир, 1980.

[19] Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами, Сиб. матем. журн., 40, № 2 (1999), 395–407.

[20] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп, М., Наука, 1974.

[21] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы, Учен. зап. Ивановск. пед. ин–та, 18, № 5 (1958), 49–60 (или "Избранные труды", т. 1, Классическая алгебра, 1976, 450–462).

[22] Масси У, Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение, М., Мир, 1977.

[23] Мерзляков Ю. И. Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп, Алгебра и логика, 6, № 1 (1967), 83–94.

[24] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы, 2–е изд., М., Наука, 1987.

[25] Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением, Сиб. матем. журн., 6, № 6 (1967), 1370–1384.

[26] Ольшанский А. Ю. Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей, Сиб. матем. журн., 30, № 6 (1989), 150–171.

[27] Репин Н. Н. О коммутаторных уравнениях в группах $B_3$ и $B_4$. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986, 114–117.

[28] Романьков В. А. О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп, Алгебра и логика, 21, № 1 (1982), 60–72.

[29] Савушкина А. Г. О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы, Матем. заметки, 60, № 1 (1996), 92–108.

[30] Семенов Ю. С. О коммутаторах в группах кос. 10–й Всесоюзн. симп. по теории групп. Минск, 1986, 207.

[31] Смирнова Е. Г. Ширина степени свободной нильпотентной группы ступени два, Сиб. матем. журн., 41, № 1 (2000), 206–213.

[32] Тавгень О. Н. Ограниченная порождаемость групп Шевалле над кольцами $S$–целых алгебраических чисел, Известия АН СССР, Серия математическая, 54, № 1 (1990), 97–122.

[33] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных группах, Известия АН, Серия математическая, 58, № 1 (1994), 121–143.

[34] Adian S. I. and Mennicke J. On bounded generation of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, Inter. J. Algebra and Comput., 2, № 4 (1992), 357–365.

[35] Akhavan-Malayeri M. and Rhemtulla A. Commutator length of Abelian-by-nilpotent groups, Glasg. Math. J., 40, № 1 (1998), 117-121.

[36] Baginski C. On sets of elements of the same order in the alternating group $A_n$, Publ. Math., 34, № 3–4 (1987), 313–315.

[37] Bavard, C. Longueur stable des commutateurs, Enseign. Math., II. Ser. 37, № 1/2 (1991), 109-150.

[38] Bigelow S. Braid groups are linear, J. Amer. Math. Soc., 14, № 2 (2001), 471-486.

[39] Bigelow S. and Budney R. D. The mapping class group of a genus two surface is linear, Algebr. Geom. Topol. 1, (2001), 699-708.

[40] Birman J. S. Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo: Univ. press, 1974.

[41] Brenner J. L. and Evans R. J. Even permutations as a product of two elements of order five, J. Comb. Theory, A45, № 2 (1987), 196–206.

[42] Bridson M. R. and Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature, Grundl. Math. Wiss., 319, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1999.

[43] Carter D. and Keller C. Bounded elementary generation of $\mathrm{SL}_n(\acute{O})$, Amer. J. Math., 103, № 3 (1983), 673–687.

[44] Cavicchioli A., Hegenbarth F. and Repovš D. On manifold spines and cyclic presentations of groups, Knot Theory, Banach Center Publications, Warsaw, 42, (1998), 49–56.

[45] Comerford J. A., Comerford L. P., Jr. and Edmunds C. C. Powers as product of commutators, Communications in algebra, 19, № 2 (1991), 675–684.

[46] Culler M. Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, 20, № 2 (1981), 133–145.

[47] Duncan A. J. and Howie J. The genus problem for one–relator products of locally indicable groups, Math. Z., 208, № 2 (1991), 225–237.

[48] Dyer J. L., Formanek E. and Grossman E. K. On the linearity of automorphism groups of free groups, Arch. Math., 38, № 5 (1982), 404–409.

[49] Edmunds C. C. and Rosenberger R. Powers of genus two in free groups, Canad. Math. Bull., 33, № 3 (1990), 342–344.

[50] Faǐziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups, J. Austral. Math. Soc., 71, (2001), 105–115.

[51] Formanek E. and Procesi C. The automorphism groups of a free group is not linear, J. Algebra, 149, № 2 (1992), 494–499.

[52] Goldstein R. Z. and Turner E. C. Applications of topological graph theory to group theory, Math. Z., 165, № 1 (1979), 1–10.

[53] Gow R. Commutators in the symplectic groups, Arch. Math., 50, № 3 (1988), 204–209.

[54] Gromov M. Hyperblic groups, in: Essays in Group Theory, Ed. S.M. Gersten, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer, New-York, 1987, 75–263.

[55] Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups, London Nath. Soc. Lecture Note Series, 182, Cambridge University Press, 1993.

[56] de la Harpe P. Topics in geometric group theory, Chicago Univ. Press, 2000.

[57] Helling H., Kim A. C. and Mennicke J. L. A geometric study of Fibonacci groups, Journal of Lie Theory, 8, (1998), 1–23.

[58] Ito N. A. A theorem of alternating group $A_n (n \geq 5)$, Math. Japon., 2, № 2 (1951), 59–60.

[59] van der Kallen W. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length, Lect. Notes, 366, 1982, 357–361.

[60] Krammer D. Braid groups are linear, Annals of Math., 155, № 1 (2002), 131-156.

[61] Lawrence R. J. Homological representation of the Hecke Algebra, Commun. Math. Phys., 135, № 1 (1990), 141-191.

[62] Maclachlan C. Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds, London Math. Soc. Lecture Notes Series, 204, 1995, 233–238.

[63] McCool J. On basis–conjugating automorphisms of free groups, Can. J. Math., 38, № 6 (1986), 1525–1529.

[64] Moran G. Reflection classes whose cubes cover the alternating group, J. Comb. Theory, A21, № 1 (1976), 1–19.

[65] Newman M. Unimodular commutators, Proc. Amer. Math. Soc., 101, № 4 (1987), 605–609.

[66] Ol'shanskii, On calculation of width in free groups, London Math. Soc. Lecture Note Series, 204, Cambridge University Press, 1995, 255–258.

[67] Ore S. Some remarks on commutators, Proc. Amer. Math. Soc., 2, (1951), 307–314.

[68] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Cambridge Phil. Soc., 64, № 3 (1969), 573–584.

[69] Rhemtulla A. H. Commutators of certain finitely generated solvable groups, Canad. J. Math., 21, № 5 (1969), 1160–1164.

[70] Sieradski A. Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups, Invent. Math., 84, (1986), 121–139.

[71] Thompson R. C. Commutators in the special linear and general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 101, № 1 (1961), 16–33.

[72] Vdovina A. A. Constructing of orientable Wicks forms and estimation of their number, Communications in algebra, 23, № 9 (1995), 3205–3222.

Работы автора по теме диссертации

[73] Бардаков В. Г. К теории групп кос, Матем. сб., 183, № 6 (1992), 3–42.

[74] Бардаков В. Г. Разложение чётных подстановок на два множителя заданного циклового строения, Дискр. матем., 5, № 1 (1993), 70–90.

[75] Бардаков В. Г. О разрешимости одного уравнения в свободной группе, Третья международная конференция по алгебре памяти М. И. Каргаполова: Тезисы докладов, Красноярский государственный университет, Красноярск, 1993, 33-34.

[76] Бардаков В. Г. О разложении автоморфизмов свободных модулей на простые множители, Известия РАН, Серия математическая, 59, № 2 (1995), 109–128.

[77] Bardakov V. G. Uniqueness theorem for the solution of the inverse problem for a generalized kinetic equation, J. Inv. Ill–Posed Problems, 3, № 5 (1995), 383–391.

[78] Бардаков В. Г. Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, Групповые и метрические свойства отображений: Сборник работ, посвящённых памяти Ю. И. Мерзлякова, НГУ, Новосибирск, 1995, 8–18.

[79] Бардаков В. Г. Ширина вербальных подгрупп некоторых HNN-расширений, Препринт Института математики СО РАН, Новосибирск, 1995, 25 с.

[80] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций, Алгебра и логика, 36, № 5 (1997), 494–517.

[81] Бардаков В. Г. Четные подстановки, не представимые в виде произведения двух подстановок заданного порядка, Матем. заметки, 62, № 2 (1997), 169–177.

[82] Бардаков В. Г. О классификации по старшей части дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, Дифференциальные уравнения, 36, № 2 (2000), 187–197.

[83] Бардаков В. Г. Вычисление коммутаторной длины в свободных группах, Алгебра и логика, 39, № 4 (2000), 379—424.

[84] Бардаков В. Г. Построение регулярно исчерпывающей последовательности в группах субэкспоненциального роста, Алгебра и логика, 40, № 1 (2001), 22–29.

[85] Бардаков В. Г. Об автоморфном вхождении в подгруппы свободной группы, Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп, Межвузовский сборник научн. трудов, Тула, 2001, 4–8.

[86] Бардаков В. Г. О точной представимости групп кос сферы матрицами над полем, Междун. конференция “Алгебра и ее приложения”, Красноярск, КрасГУ, 2002, 11–13.

[87] Bardakov V. G. Inverse problem for systems of kinetic equations, J. Inverse and Ill–Posed Problems, 10, № 5 (2002), 465—485.

[88] Бардаков В. Г. Решение обратной задачи для матричного уравнения переноса, Сиб. журн. индустриальной математики, 5, № 3 (2002), 35–52.

[89] Бардаков В. Г., Веснин А. Ю. Об обобщении групп Фибоначчи, Алгебра и логика, 42, № 2 (2003), 131—160.

[90] Бардаков В. Г. О связи тождества Аниконова–Амирова с тождеством Пестова, Сибирский журнал индустриальной математики, 6, № 2 (2003), 15—25.

[91] Bardakov V. G. One property of groups of subexponential growth, International Conference on Group Theory, Gaeta, Italy, June 1–6, 2003, 13—14.

[92] Бардаков В. Г. Строение группы сопрягающих автоморфизмов, Алгебра и логика, 42, № 5 (2003), 515—541.

[93] Бардаков В. Г. К вопросу Д. И. Молдаванского о $p$–отделимости подгрупп свободной группы, Сиб. матем. журн., 45, № 3 (2004), 505—509.

[94] Bardakov V. G. Linear representations of the braid groups of some manifolds, Acta Applicandae Mathematicae, 84, № 2-3 (2004).

[95] Бардаков В. Г. Линейные представления группы сопрягающих автоморфизмов и групп кос некоторых многообразий. Сиб. матем. журн., 46, № 1 (2005), 17–31.

Бардаков Валерий Георгиевич

**Свойства вербальных подгрупп,
автоморфизмы и линейные представления
некоторых групп преобразований**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

———————————————————————————

Подписано в печать 28.02.05. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 150 экз. Заказ № 30.

———————————————————————————

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6