РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

БАБУРИН Алексей Евгеньевич

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА И РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

(01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2007

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л.Соболева СО РАН.

Научный руководитель:	д.ф.-м.н., профессор Э. Х. Гимади
Официальные оппоненты:	д.ф.-м.н., профессор В. А. Емеличев
	д.ф.-м.н., профессор А. А. Колоколов
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится "23" мая 2007 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д.003.015.01 в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН (пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан "23" апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию ряда задач комбинаторной оптимизации, представляющих интерес как с точки зрения теории, так и с практической стороны.

Для задач, которые являются NP-трудными, особый интерес представляет построение приближенных алгоритмов с априорными оценками точности.

Для задач, допускающих построение эффективных точных алгоритмов их решения, интерес представляет построение и обоснование точности таких алгоритмов.

Цель работы. Выделение классов задачи коммивояжера на максимум, допускающих построение новых алгоритмов, которые являются более эффективными на данных классах по сравнению с уже известными алгоритмами.

Построение и анализ приближенных полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для нескольких модификаций задачи коммивояжера.

Построение и обоснование точности полиномиальных алгоритмов решения модификации задачи разбиения множества векторов для случаев различных векторных пространств.

Методы исследований. В работе использовались методы дискретного анализа и исследования операций, методы вероятностного анализа приближенных алгоритмов, элементы аналитической геометрии.

Научная новизна. Предложен новый алгоритм решения евклидовой задачи коммивояжера на максимум, улучшающий оценки точности алгоритма А. И. Сердюкова на достаточно широком классе исходных данных.

Рассмотрена NP-трудная в сильном смысле задача отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух (реберно) непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса. Построен новый полиномиальный алгоритм приближенного решения задачи. Обоснованы гарантированные оценки точности и оценки трудоемкости данного алгоритма.

Проведено исследование метрической задачи отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном неориентированном взвешенном графе, в котором выполняется неравенство треугольника. Для случаев, когда на ребрах графа задана одна весовая функция и когда весовых функций две, предложены два новых полиномиальных алгоритма приближенного решения, проведен анализ точности алгоритмов.

Рассмотрена задача поиска связного остовного подграфа с заданными степенями вершин максимального суммарного реберного веса в полном взвешенном неориентированном графе. Для решения задачи представлен полиномиальный приближенный алгоритм. Проведен его анализ и обоснованы гарантированные оценки точности получаемых решений задачи в общем случае, а также в частных случаях метрической и евклидовой задач.

Доказана NP-трудность задачи отыскания d-однородного связного остовного подграфа экстремального суммарного веса в полном неориентированном $n-$вершинном графе. Представлен приближенный полиномиальный алгоритм отыскания такого подграфа, имеющего максимальный вес. Проведен вероятностный анализ алгоритма для решения задачи со случайными входными данными (весами ребер) как в случае равномерного распределения весов ребер, так и в случае распределений минорирующего типа. Для минимизационной версии задачи на случайных входах с распределением мажорирующего типа к условию асимптотической точности модифицированного алгоритма добавляется дополнительное ограничение на величину разброса значений весов ребер графа.

Исследовалась задача максимизации взвешенной суммы заданного конечного множества векторов из нормированного пространства R^k. Приведены и проанализированы точные полиномиальные алгоритмы ее решения в случае, когда в пространстве R^k задана конечная полиэдральная норма, а также норма l_2. Тем самым, обоснована полиномиальная разрешимость задачи для данных норм.

Практическая ценность. Результаты работы имеют преимущественно теоретический характер. Разработанные приближенные алгоритмы могут использоваться для решения соответствующих практических задач, а также при чтении лекционных курсов по дискретной оптимизации и исследованию операций.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Российской конференции “Дискретный анализ и исследование операций” (Новосибирск, 2002, 2004), на Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2000), на Международных конференциях по исследованию операций OR2002 (Клагенфурт, 2002), OR2003 (Гейдельберг, 2003), OR2004 (Тилбург, 2004), на Всероссийской конференции “Методы оптимизации и экономические приложения” (Омск, 2003, 2006), на семинаре проф. Брукера университета г. Оснабрюк (Оснабрюк, 2004), на семинаре по дискретной математике Санкт-Петербургского отделения Института математики им. Стеклова (Санкт-Петербург, 2005), на семинаре Объединенного Института Проблем Информатики (Минск, 2007), на научных семинарах Института математики им. Соболева СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 11 работ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 98 страницах, содержит введение, три главы, заключение, список публикаций автора по теме диссертации, благодарности и список литературы, содержащий 63 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор результатов, посвященных рассматриваемым задачам, обосновывается актуальность темы исследования и кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются задачи поиска гамильтоновых циклов экстремального веса.

Для евклидовой задачи коммивояжера на максимум предлагается новый полиномиальный алгоритм A_1 приближенного решения. Обоснована асимптотическая точность алгоритма на подклассе исходной задачи, выделены условия, при которых данный алгоритм имеет лучшие оценки точности по сравнению с известным алгоритмом А. И. Сердюкова.

Также рассмотрена задача отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух (реберно) непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса (2-PSP). Известно, что данная задача NP-трудна в сильном смысле. Построен полиномиальный алгоритм A_2 приближенного решения задачи. Получены оценки трудоемкости алгоритма и гарантированная оценка точности.

Проведено исследование метрической задачи отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном неориентированном взвешенном графе, в котором выполняется неравенство треугольника. Для случаев, когда на ребрах графа задана одна весовая функция и когда весовых функций две, предложены два приближенных полиномиальных алгоритма (A_3 и A_4 соответственно). Для обоих алгоритмов получены гарантированные оценки точности.

В **разделе 1.1** рассматривается евклидова задача коммивояжера на максимум.

В пункте 1.1.1 приводится постановка задачи.

Пусть задан набор точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset R^k$. Определим вес W гамильтонова цикла, порожденного перестановкой $\sigma \in S_n$ и обозначаемого как

$$W(\sigma)=\sum_{i=1}^{n-1}\rho(x_{\sigma_i},x_{\sigma_{i+1}})+\rho(x_{\sigma_n},x_{\sigma_1}),$$

где $\rho(*,*)$ — метрика R^k.
Требуется максимизировать $W(\sigma)$ по всем перестановкам σ из S_n.

В пунктах 1.1.2 и 1.1.3 описывается известный полиномиальный асимптотически точный алгоритм А. И. Сердюкова, выявляются возможности по его модификации с целью улучшения оценок точности. Для решения задачи предлагается и исследуется новый алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$.

При решении задачи коммивояжера на максимум удалось использовать следующее специальное свойство евклидова пространства. Пусть даны два отрезка (ребра) $I_j=(x_j,y_j)$, $I_l=(x_l,y_l)$ в $\mathbf{R^k}$ и $\alpha\le\pi/2$ — угол между ними. Тогда справедливо неравенство:

$$\max\Big\{w(x_j,x_l)+w(y_j,y_l),w(x_j,y_l)+w(y_j,x_l)\Big\}$$
$$\ge\max\Big\{w(I_j),w(I_l),\cos\frac{\alpha}{2}\Big(w(I_j)+w(I_l)\Big)\Big\},$$

где w—расстояние между точками в евклидовом пространстве.

Решающим в обосновании асимптотической точности как алгоритма А. И. Сердюкова, так и нового алгоритма A_1 явился факт существования среди достаточно большого числа отрезков в R^kпары "почти-параллельных" отрезков:

Лемма 1 *Пусть в евклидовом пространстве R^kс фиксированной размерностью k задано произвольное множество из t прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(k,t)$ такой, что $\alpha(k,t)\to 0$ при $t\to\infty$. При этом*

$$\sin^2\frac{\alpha(k,t)}{2}\le\frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}},$$

где константа γ_k зависит лишь от размерности пространства R^k.

Одним из основных этапов алгоритма А. И. Сердюкова является процедура разбиения максимального паросочетания M на множество легких и тяжелых ребер. Далее производится соединение пар ребер из паросочечания, данный процесс производится только над подмножеством тяжелых ребер M. Распространение данного процесса на все ребра паросочетания M сопровождается уменьшением количества "свободных" (еще не задействованных) ребер и по лемме 1 дает все меньшие и меньшие оценки суммарного веса получаемых соединяющих ребер, что в итоге приводит к ухудшению эффективности алгоритма. Оказывается, что при наложении некоторых достаточно слабых ограничений на исходный граф, данный процесс допускает эффективное продолжение на все паросочетание M. Это, в свою очередь, делает ненужными последующие шаги алгоритма А. И. Сердюкова.

Основным результатом в пункте 1.1.3 является следующая теорема, обосновывающая качественные характеристики нового предложенного алгоритма:

Теорема 1 *При выполнении условия*

$$\delta_k(X) = \begin{cases} o(n^{\frac{3}{2}}) & k = 2; \\ o(\frac{n^{\frac{4}{3}}}{\log n}) & k = 3; \\ o(n^{\frac{3k-1}{k^2-1}}) & k > 3, \end{cases}$$

(где $\delta_k(X)$ — отношение диаметра множества X к длине наименьшего отрезка, соединяющего две различные точки этого множетсва) алгоритм A_1 находит асимптотически точное решение задачи отыскания максимального взвешенного гамильтонова обхода заданного множества точек X, состоящего из n точек в евклидовом пространстве R^k. При более сильном ограничении

$$\delta_k(X) \leq \begin{cases} C_2 n^{\frac{5}{6}} & k = 2; \\ C_3 \frac{n^{\frac{5}{6}}}{\log n} & k = 3; \\ C_k n^{\frac{1}{k} + \frac{4}{k^2-1}} & k > 3, \end{cases}$$

(где C_k — константа, зависящая только от размерности пространства R^k) обладает лучшими оценками точности по сравнению с алгоритмом А. И. Сердюкова.

В **разделе 1.2** рассматриваются задачи отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух (реберно) непересекающихся гамильтоновых циклов экстремального веса.

В пункте 1.2.1 приводится общая постановка задач. Дан полный n-вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$. На ребрах графа заданы две функции: $w_1 : E \to R^+$ и $w_2 : E \to R^+$. Требуется найти в графе G

такие два реберно непересекающихся гамильтонова цикла H_1 и H_2, чтобы достигала минимума(или максимума) величина $W_1(H_1) + W_2(H_2)$, где $W_i(H) = \sum_{e \in H} w_i(e),\ i \in \{1, 2\}$.

В пункте 1.2.2 рассматривается случай, когда весовые функции ребер w_1 и w_2 совпадают и требуется максимизировать величину $W_1(H_1) + W_2(H_2)$.

Предлагается полиномиальный алгоритм A_2 приближенного решения поставленной задачи. В основе алгоритма лежит общая идея, впервые реализованная А. И. Сердюковым при построении приближенного алгоритма для нахождения одного гамильтонова цикла максимального веса в полном неориентированном взвешенном графе с теми же оценками временной сложности и точности. Алгоритм Сердюкова в исходном графе находит два подграфа – 2-фактор и паросочетание, суммарный вес которых не менее чем в $3/2$ раза больше веса оптимального решения. Затем ребра этих подграфов перераспределяются между двумя частичными турами, произвольно дополняемыми до гамильтоновых циклов. Максимальный из построенных циклов (по весу входящих в него ребер) дает решение с оценкой точности $3/4$. Нетрудно понять, что прямое применение этой схемы к решению поставленной задачи не приводит к успеху, поскольку построенные таким образом частичные туры могут содержать одинаковые ребра. В настоящей диссертации представлен алгоритм, в котором в качестве исходного подграфа, подвергающегося разбиению на два непересекающихся по ребрам частичных тура, используется либо кубический подграф (при четном n), либо "почти кубический" подграф (при нечетном n) максимального веса. Более того, найденные реберно непересекающиеся частичные туры в дальнейшем удается дополнить до непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов, что далеко не всегда возможно в случае произвольных реберно непересекающихся частичных туров.

Для построенного алгоритма доказывается следующая теорема:

Теорема 2 *Алгоритм A_2 за время $O(n^3)$ находит допустимое решение задачи отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса, вес которого составляет не менее $3/4$ от веса оптимального решения.*

В пункте 1.2.3 рассматривается случай, когда весовые функции ребер w_1 и w_2 совпадают. Будем обозначать для удобства эту функцию через w. Также предполагается, что для функции w выполняется *неравенство треугольника*: $w(i, j) \leq w(i, k) + w(j, k)$ для любых трех вершин $i, j, k \in V$, т.е. исходная задача является *метрической.* Требуется минимизировать величину $W_1(H_1) + W_2(H_2)$.

Для данной задачи предлагается приближенный алгоритм A_3, основанный на построении первого цикла с помощью алгоритма Косточки-Сердюкова приближенного решения метрической задачи коммивояжера на минимум. Второй цикл получается определенной перестройкой порядка следования вершин в первом цикле, при этом способ построения второго цикла различается для случаев четного и нечетного числа n вершин в исходном графе.

Для предложенного алгоритма доказывается следующая теорема:

Теорема 3 *В случае одной весовой функции алгоритм A_3 строит приближенное решение метрической задачи отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса за время $O(n^3)$ с гарантированной оценкой точности*

$$\Delta = \begin{cases} 9/4, & \text{\textit{если } } n \text{ \textit{нечетно},} \\ 9/4 + 3/n & \text{\textit{в противном случае} .} \end{cases}$$

В пункте 1.2.4 рассматривается случай, когда весовые функции w_1 и w_2 различны. Также предполагается, что для каждой из них выполняется неравенство треугольника. Требуется минимизировать величину $W_1(H_1)+W_2(H_2)$.

Для данной задачи предлагается приближенный алгоритм A_4, основанный на построении обоих циклов с помощью алгоритма Косточки-Сердюкова приближенного решения метрической задачи коммивояжера на минимум. Для случая, когда построенные таким образом циклы имеют общие ребра, предлагается процедура модификации одного из циклов с целью избавления от общих ребер в нем.

Для предложенного алгоритма доказывается следующая теорема:

Теорема 4 *В случае двух весовых функций алгоритм A_4 находит приближенное решение метрической задачи отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса за время $O(n^3)$ с гарантированной оценкой точности*

$$\Delta \le \begin{cases} (12/5), & \text{\textit{если } } n \text{ \textit{кратно 5},} \\ (12/5)\big(1 + 1/n\big) & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

Во второй главе рассматривается еще одно обобщение задачи коммивояжера, а именно задача поиска связного остовного подграфа с заданными степенями вершин экстремального реберного веса.

В **разделе 2.1** предлагается полиномиальный алгоритм A_5 приближенного решения такой задачи в случае максимизации суммарного веса искомого подграфа с произвольными заданными степенями его вершин.

В пункте 2.1.1 приводится постановка задачи. Задан полный неориентированный граф $G(V,E)$ без петель с n вершинами. На ребрах графа определена весовая функция $w : E \to R^+$, а для вершин графа заданы такие натуральные числа d_i $(i = 1,\dots,n), 1 < d_i < n$, что набор $(d_1,\dots,d_n)$ является графическим разбиением их суммы $\sum_{i=1}^n d_i$. В графе $G(V,E)$ требуется найти связный остовный подграф с максимальным суммарным весом ребер и заданными степенями вершин d_i $(i = 1,\dots,n), 1 < d_i < n$. Данная задача обозначается далее как $CSDP$.

В пункте 2.1.2 описывается новый алгоритм A_5 приближенного решения $CSDP$. Алгоритм основан на нахождении точного решения релаксации исходной задачи (без условия связности решения) с применением алгоритма Габова. Компоненты связности полученного решения претерпевают процедуру “склейки”, в ходе которой степени вершин остаются неизменными, граф приобретает свойство связности, а потеря веса, вызванная изменением состава ребер в ходе выполнения этой процедуры, минимальна.

Пункт 2.1.3 посвящен анализу построенного алгоритма. Основным результатом этого анализа является следующая теорема:

Теорема 5 *Алгоритм A_5 находит приближенное решение $CSDP$ за время $O(mn^2)$ с оценкой точности*

$$\Delta \geq 1 - \frac{2}{d(d+1)},$$

где $d = \min\{d_i | i = 1,\dots,n\}$, $m = \sum_{i=1}^n d_i$. При решении метрической $CSDP$ оценка точности алгоритма составляет

$$\Delta \geq 1 - \frac{1}{d(d+1)}.$$

При решении евклидовой $CSDP$ оценка точности алгоритма составляет

$$\Delta \geq 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{d(d+1)}.$$

В **разделе 2.2** рассматривается задача поиска d–регулярного связного остовного подграфа экстремального реберного веса.

В пункте 2.2.1 приводится постановка задачи. Задан $G(V, E)$ — полный неориентированный граф без петель с n вершинами. Определена функция $w : E \to R^+$ и натуральное число $d,\ 1 < d < n$. Требуется найти в графе G связный остовный d-однородный подграф $\widetilde{G}$ максимального суммарного веса.

В пункте 2.2.2 обосновывается NP–трудность поставленной задачи для произвольного d.

В пункте 2.2.3 предлагается новый полиномиальный алгоритм A_6 приближенного решения данной задачи. Алгоритм основан на декомпозиции исходной задачи и применении известных эвристик к решению ряда полученных задач коммивояжера и назначения. Данный алгоритм имеет временную сложность $O(n^2 + nd \ln n)$.

В пункте 2.2.4 проведен общий вероятностный анализ построенного алгоритма A_6. Для исследования качества приближенного алгоритма используется идея построения алгоритмов с оценками (ε, δ), предложенная Э. Х. Гимади, Н. И. Глебовым и В. А. Перепелицей.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс оптимизационных задач. Посредством $F^*(S)$ обозначим оптимальное значение целевой функции для задачи $S \in \mathcal{K}$. Будем считать, что рассматривается задача на минимум и $F^*(S) > 0$ для всех $S \in \mathcal{K}$.

Пусть заданы класс задач $\mathcal{K}$ и некоторое семейство $\mathcal{P}$ вероятностных мер, определенных на $\mathcal{K}$. Будем говорить, что алгоритм $\mathcal{A}$ *имеет оценки* (ε, δ) относительно $\mathcal{P}$, если

$$P\left\{F_{\mathcal{A}}(S) > (1+\varepsilon)F^*(S)\right\} \le \delta$$

для всех $P \in \mathcal{P}$.

Будем далее говорить о классах $\mathcal{K}_n$ задач *размерности* n, семействах $\mathcal{P}_n$, оценках $(\varepsilon_n, \delta_n)$ и их свойствах в зависимости от параметра n.

Алгоритм $\mathcal{A}$ называется *асимптотически точным* на классе задач $\mathcal{K}$, если существуют такие последовательности $(\varepsilon_n, \delta_n)$, что для любого n алгоритм $\mathcal{A}$ удовлетворяет оценкам $(\varepsilon_n, \delta_n)$ на подмножестве $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ и при этом $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Параметры ε_n и δ_n могут трактоваться как оценки *относительной погрешности* и *вероятности несрабатывания* алгоритма соответственно.

Аналогичным образом определяется понятие асимптотической точности при решении задачи на максимум.

В пункте 2.2.5 анализ алгоритма A_6 проводится для класса $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ задач отыскания максимального (относительно суммарного веса ребер) d-регулярного остовного связного подграфа в полном неориентированном графе с элементами матрицы расстояний, являющимися независимыми случайными величинами, распределенными равномерно на отрезке $[0,1]$.

Доказывается следующее утверждение:

Лемма 2 *Алгоритм A_6 решения задач из класса $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ за время $O(n^2+nd\ln n)$ находит приближенное решение со следующими оценками относительной погрешности*

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \frac{\ln(\frac{n}{d-1})}{(\frac{n}{d-1})}(1+\frac{q}{n})$$

и вероятности несрабатывания

$$\widetilde{\delta}_n = \left(\frac{d-1}{n}\right)^{\frac{\chi(d)}{2d}},$$

где $0<q<d-1$, $\chi(d)=\frac{1}{4}(d-2)\Bigg(d-3-\rho(d-1)\Bigg)$.

Из леммы 2 непосредственно следует

Теорема 6 *Алгоритм A_6 для решения задач из класса $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ является асимптотически точным при $d=o(n)$.*

В пункте 2.2.6 полученный результат обобщен на случай так называемых распределений минорирующего типа.

Рассмотрим класс $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$ матриц расстояний, элементы которых распределены независимо на отрезке $[0,1]$ с функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(x)\le x$ при $0\le x\le 1$. Тогда распределение $F(x)$ совпадает с распределением величины $f(\xi)$, где $\xi\in I[0,1]$, f– монотонно возрастающая функция, при этом $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(x)\ge x$ при $0\le x\le 1$.

Теорема 7 *Алгоритм A_6 решения исходной задачи является асимптотически точным на классе $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$ при $d=o(n)$.*

В пункте 2.2.7 получены следующие обобщения упомянутых ранее результатов:

Утверждение 1 *Если $d = o(n)$, то для произвольных $0 \le a_n \le b_n$ алгоритм A_6 является асимптотически точным на классе задач $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(a_n, b_n)$ при тех же оценках точности, вероятности несрабатывания и временной сложности, что и для класса $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0, 1)$.*

Алгоритм A_6 легко модифицировать в приближенный алгоритм A' для решения задачи на минимум на классе $\widetilde{\mathcal{K}}_{min}(a_n, b_n)$.

$\widetilde{\mathcal{K}}_{min}(a_n, b_n)$ — класс матриц расстояний, элементы которых распределены независимо на отрезке $[a_n, b_n]$ с функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(x) \ge \frac{x-a_n}{b_n-a_n}$ при $a_n \le x \le b_n$.

Отличие алгоритма A'_6 от алгоритма A_6 заключается в том, что на шагах 1 и 2 выбор очередного ребра (элемента матрицы) осуществляется исходя из минимизационных соображений. Результатом вероятностного анализа в этом случае является следующее утверждение.

Утверждение 2 *Если $d = o(n)$, то для произвольных $0 < a_n \le b_n$ алгоритм A'_6 асимптотически точен на классе задач $\widetilde{\mathcal{K}}_{min}(a_n, b_n)$ с оценкой относительной погрешности*

$$\varepsilon_n = \frac{b_n}{a_n} \frac{\ln(\frac{n}{d-1})}{(\frac{n}{d-1})} \left(1 + \frac{q}{n}\right)$$

и с теми же оценками вероятности несрабатывания и временной сложности, что и для класса $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(a_n, b_n)$, при дополнительном требовании на разброс элементов матрицы расстояний между вершинами (отношение границ b_n и a_n):

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{(\frac{n}{d-1})}{\ln(\frac{n}{d-1})}\right).$$

В третьей главе рассматривается модификация задачи разбиения множества.

В **разделе 3.1** приводится постановка задачи. Пусть в векторном пространстве R^k с нормой $\|.\|_*$, которое будем обозначать через $(R^k, \|.\|_*)$, задано конечное семейство ненулевых векторов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Определим функцию $S_V(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$. Для заданного семейства входных векторов V требуется найти вектор $x \in \{-1, 1\}^n$, максимизирующий функцию $\|S_V(x)\|_*$.

Обозначим через $\langle a, b\rangle$ скалярное произведение векторов a и b из $\mathbf{R}^k$. Рассмотрим выпуклый полиэдр $B = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \langle \lambda_i, x\rangle \le 1,\ 1 \le i \le m\}$ с

m гранями $F_i,\ 1 \le i \le m$, такими, что $F_i \subset \{x \in \mathbf{R}^k \mid \langle \lambda_i, x \rangle = 1\}$, где $\lambda_i \in \mathbf{R}^k$.

Полиэдральной нормой вектора $x \in R^k$ называется величина

$$c(x) = \max\Big\{0, \langle \lambda_1, x \rangle, \ldots, \langle \lambda_m, x \rangle\Big\}.$$

В дальнейшем под полиэдральным пространством размерности k будем понимать пару $(\mathbf{R}^k, c)$.

В **разделе 3.2** описывается полиномиальный алгоритм, находящий точное решение задачи разбиения множества векторов в полиэдральном пространстве (R^k, c) с конечной нормой.

Алгоритм основан на решении задачи для полиэдральной нормы, задаваемой только одним вектором λ_i. Далее среди полученных решений выбирается оптимальное относительно нормы $c(x)$. Предложенный алгоритм имеет временную сложность $O(nkm)$, где m — число граней полиэдра.

В **разделе 3.3** описывается полиномиальный алгоритм, находящий точное решение задачи разбиения множества векторов в евклидовом пространстве для произвольной размерности пространства.

Ортогональной гиперплоскостью для ненулевого вектора $v \in R^k$ называется гиперплоскость, заданная уравнением $\langle v, x \rangle = 0$. Она является $(k-1)$-мерным подпространством, состоящим из векторов, ортогональных вектору v. Семейством *областей принадлежности решения* (ОПР) для данных ненулевых векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ назовем семейство максимальных по включению связных подмножеств пространства R^k, не пересекающихся с ортогональными гиперплоскостями векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Заметим, что области принадлежности решения являются конусами в пространстве R^k.

Набор векторов пространства R^k, содержащий ровно по одному вектору из каждой области семейства ОПР, назовем *семейством представителей* ОПР для векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Предлагаемый алгоритм строит для исходных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ семейство W представителей ОПР. Для каждого вектора $w \in W$ строится решение x_w задачи такое, что

$$x_{wi} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle w, v_i \rangle \ge 0, \\ -1 & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Из набора построенных решений задачи выбирается оптимальное.

В разделе показано, что такой алгоритм является точным и имеет временную сложность $O(k^2 n^k)$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // *Дискретный анализ и исследование операций.* Серия 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.

2. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Алгоритмы с константными оценками точности для отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов экстремального веса // Материалы Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск. 2003. С. 9-12.

3. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об асимптотической точности одного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // *Дискретный анализ и исследование операций.* Серия 1. 2002. Т. 9, № 4. С. 23–32.

4. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Алгоритмы с оценками для некоторых обобщений задачи коммивояжера // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т. 1. Математическое программирование. Иркутск: Изд-во ИСЭ СО РАН. 2005. С. 421–428.

5. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об одном обобщении задачи коммивояжера на максимум // *Дискретный анализ и исследование операций.* Серия 2. 2006. Т. 13, № 3. С. 3–12.

6. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближенные алгоритмы для отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // *Дискретный анализ и исследование операций.* Серия 2. 2004. Т. 12, № 1. С. 11–25.

7. **Бабурин А. Е., Пяткин А. В.** О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // *Дискретный анализ и исследование операций.* Серия 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 3–10.

8. **Baburin A. E.** On one polynomially solvable problem of vector summation // Proceedings of the 2-nd International Workshop "Discrete Optimization Methods in Production and Logistics" DOM'2004, Omsk. 2004. P. 145–148.

9. **Baburin A. E., Gimadi E. Kh.** A problem of finding a spanning connected subgraph of maximum weight // Proceedings of the 2-nd International Workshop "Discrete Optimization Methods in Production and Logistics", Omsk. 2004. P. 149–154.

10. **Baburin A. E., Gimadi E. Kh.** Approximation algorithms for finding a maximum-weight spanning connected subgraph with given vertex degrees // Operations Research Proceedings 2004, Selected Papers. International Conference OR 2004, Tilburg. Berlin: Springer-Verlag. 2005. P. 343–351.

11. **Baburin A. E., Gimadi E. Kh., Korkishko N. M.** Algorithms with Performance Guarantees for a Metric Problem of Finding Two Edge-Disjoint Hamiltonian Circuits of Minimum Total Weight // Operations Research Proceedings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag. 2004. P. 316–323.

Бабурин Алексей Евгеньевич

Алгоритмы с оценками для некоторых модификаций задач коммивояжера и разбиения множества

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 17.04.07. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 56.

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6.