На правах рукописи

Козлов Роман Александрович

Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Автореферат диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Колесников Павел Сергеевич

Официальные оппоненты:
Гордиенко Алексей Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры.

Кислицин Алексей Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Алтайский государственный педагогический университет, лаборатория Современная алгебра, старший научный сотрудник.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

Защита состоится 31 марта 2023 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета 24.1.074.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу http://math.nsc.ru

Автореферат разослан ______________ 2023 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, Дудкин Федор Анатольевич

Постановка задачи и цели исследования

Аксиоматическая квантовая теория поля зародилась в 50-х годах прошлого столетия в работах А. Уайтмана [44] и др. Отправной точкой нового и более активного интереса к данной области стала основополагающая работа А. Белавина, А. Полякова, А. Замолодчикова [10], где авторы подробно рассматривают 2-мерную конформную теорию поля, в которой сами элементы - киральные поля - обладают конформной симметрией. Они могут быть представлены формальными степенными рядами (бесконечными в обе стороны), коэффициенты которых являются линейными операторами на пространстве состояний. Ключевую роль в конформной теории поля играет конструкция разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE), введённого К. Уилсоном [45]. Алгебраическое описание данной конструкции приводит к понятию вертексной операторной алгебры. Аксиоматическое определение вертексной операторной алгебры было введено Р. Борчердсом в 1986 г. [13]. Позднее, в работе [25] был дан эквивалентный набор определяющих аксиом, который оказался значительно проще для восприятия и проверки выполнимости.

К настоящему моменту понятие вертексной алгебры разрослось до более широкого класса. Для краткости, так мы и будем к ним обращаться в данной диссертации. В то же время, в классе всех вертексных алгебр объекты, удовлетворяющие изначальному определению, формируют подкласс. Следуя нотации В. Г. Каца, вертексные операторные алгебры часто называют конформными вертексными алгебрами [41].

В работе [28] В. Г. Кац установил, что коэффициенты сингулярной части разложения операторного произведения позволяют описать коммутатор формальных степенных рядов, отвечающих за операторы умножения в вертексной алгебре. Алгебраическое описание структур, возникающих при рассмотрении этих коммутаторов, приводит к понятию конформной алгебры Ли.

Пусть V есть вертексная (супер)алгебра, снабжённая оператором трансляции T и соответствием между состояниями и полями Y. Тогда, согласно аксиоме локальности, существует такая функция N: $V \times V \to \mathbb{Z}_+$, что разложение операторного произведения двух полей $Y(a, z)$ и $Y(b, w)$ для a, $b \in V$ имеет конечную сингулярную часть:

$$Y(a,z)Y(b,w) = \sum_{n=0}^{N(a,b)-1} \frac{Y(c_n, w)}{(z-w)^{n+1}} + \sum_{n\geq 0} Y(c_{-n}, w)(z-w)^n,$$

где c_n — снова некоторый элемент из V. Соответствие

$$(a, b) \to c_n, \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z},$$

задаёт на пространстве V семейство билинейных операций, называемых n-произведениями и обозначаемых $a \ _{(n)} \ b$. Отметим, что коэффициенты сингулярной части полностью определены (супер)коммутатором полей:

$$[Y(a,z), Y(b,w)] = \sum_{n=0}^{N(a,b)-1} Y(c_n, w)\frac{1}{n!}\partial_w^n \delta(z-w),$$

где $\delta(z-w) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} z^s w^{-s-1} = \frac{1}{w}\sum_{s\in\mathbb{Z}}(\frac{z}{w})^s$ есть формальная дельта-функция. Ограничив

n неотрицательными целыми числами и добавив оператор трансляции T, мы превратим пространство V в объект, называемый конформной (супер)алгеброй Ли. Стоит обратить внимание, что всякая конформная алгебра естественным образом несёт структуру модуля над $H = \mathbb{C}[T]$.

Заметим, что в теории конформных алгебр оператор трансляции принято обозначать как ∂, что никак не связывает его с частными производными. В течение данной диссертации мы будем обозначать его именно таким образом.

Другой источник появления конформных алгебр Ли — это теория алгебр Гельфанда — Дорфман (для краткости, ГД-алгебр), введенных в [3] для описания гамильтоновых операторов в формальном вариационном исчислении. Структура ГД-алгебры на векторном пространстве эквивалентна структуре конформной алгебры Ли на свободном H-модуле, порожденном этим пространством [46]. Конформные алгебры Ли, получающиеся таким образом, называются квадратичными. Структура ГД-алгебры может быть получена из дифференциальной алгебры Пуассона [47]. Однако, не любая ГД-алгебра получается таким образом, что приводит нас к естественному вопросу: можно ли произвольную ГД-алгебру вложить в соответствующую ГД-алгебру, полученную из дифференциальной алгебры Пуассона? Как показано в работе [36], ответ на данный вопрос отрицательный. Следовательно, класс алгебр Гельфанда — Дорфман разделяется на специальные (вложимые в дифференциальные алгебры Пуассона) и исключительные (не вложимые).

Периодически мы будем обращаться к конформным алгебрам на в чём-то даже более естественном языке псевдоалгебр. Концепция псевдоалгебр была предложена и разработана в труде Б. Бакалова, А. Де Андреа и В. Г. Каца [7] (см. так же книгу А. А. Бейлинсона, В. Г. Дринфельда [9]). Связь заключается в том, что конформная алгебра — это алгебра в подходящей псевдотензорной категории $\mathcal{M}^*(\mathbb{C}[\partial])$, объекты в которой есть модули над алгеброй полиномов $\mathbb{C}[\partial]$ от одной переменной.

Псевдотензорная структура отражает основные свойства полилинейных отображений в категории линейных пространств, такие как возможность взятия композиции, ассоциативность композиции, наличие единицы, симметрическая структура. Данных свойств достаточно для того, чтобы определить базовые понятия универсальной алгебры: что такое алгебра (ассоциативная, коммутативная, Ли и т. д.), гомоморфизм, идеал, представление, модуль, когомологии.

Таким образом, понятие конформной алгебры — это естественное продолжение понятия алгебры над полем характеристики нуль (обычно, комплексные числа $\mathbb{C}$).

Наиболее естественным аналогом конечномерных объектов в классе конформных алгебр являются конформные алгебры конечного типа, т. е. те, что конечнопорождены как модули над H. Одним из наиболее интересных вопросов в теории конформных алгебр Ли является аналог классической теоремы Адо. Оригинальная теоремы была доказана им в 1935 г., позднее доказательство опубликовано в работе [1].

Теорема (Адо, классическая). *Всякая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль имеет точное конечномерное представление.*

Проблема (Адо, конформная). *Имеет ли всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как H-модуль, точное представление на конечнопорождённом свободном H-модуле?*

Для произвольной конформной алгебры Ли конечного типа L поставленный вопрос не имеет смысла. Например, из аксиом конформных объектов следует, что любой элемент кручения $a \in \mathrm{tor}_H(L)$ (т. е. такой $a \in L$, что существует $0 \neq f(\partial) \in H$, для которого верно $f(\partial)a = 0$) лежит в ядре любого представления. В случае положительного ответа на поставленный вопрос всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как H-модуль, может быть представлена элементами алгебры конформных эндоморфизмов Cend_n, которая является конформным аналогом матричной алгебры линейных преобразований конечномерного пространства.

Вопрос существования точного представления не решен даже для класса квадратичных конформных алгебр Ли конечного типа (т.е. получающихся из конечномерных алгебр Гельфанда — Дорфман). В главе 2 данной диссертации будет показано, что для специальных алгебр Гельфанда — Дорфман конформная проблема Адо имеет положительное решение.

Теорема Адо есть ключ к пониманию того, почему по всякой алгебре Ли восстанавливается группа Ли. Формальный подход, реализованный в статье Дж. Мостового, Дж. М. Переса-Искуэрдо, И. П. Шестакова [38] вселяет надежду, что для конформных алгебр возможно установить аналог "фундаментального треугольника"теории Ли. С этой точки зрения, аналогично классическому случаю, понадобится аналог теоремы Адо.

Доказательство оригинальной теоремы Адо базируется на следующем факте, именуемом теоремой Леви:

Теорема (Леви). *Пусть L есть конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R — её разрешимый радикал. Тогда существует полупростая подалгебра L' алгебры L, такая что $L \cong L' \ltimes R$.*

Как установлено В. Г. Кацем и соавторами в работах [8], [21], теорема Леви для конформных алгебр Ли конечного типа в общем случае неверна.

Большинство известных доказательств классической теоремы Адо вовлекают универсальную обёртывающую ассоциативную алгебру и нетривиальные факты, связанные с ней, такие как, в первую очередь, теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ, для краткости). Стандартный подход к построению универсальной обёртывающей ассоциативной алгебры — представить её набором порождающих элементов и определяющих соотношений. Данные наблюдения подсказывают, что логичными отправными шагами к доказательству конформной теоремы Адо является введение понятия универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры, а также её реализация на языке порождающих элементов и определяющих соотношений.

Первый шаг сделан в работе М. Ройтмана [42]. Там дано определение универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры, а также приводятся некоторые исследования в данной области и ставится проблема инъективности вложения. Тонкий момент заключается в том, что для всякой конформной алгебры Ли существует целая серия универсальных обёртывающих ассоциативных конформных алгебр, соответствующих функции ассоциативной локальности на порождающих. Стандартным способом проверки инъективности вложения (конформной) алгебры Ли в универсальную обёртывающую ассоциативную (конформную) алгебру является нахождение нормальной формы элементов. Второй шаг — реализация универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры на языке порождающих элементов и определяющих соотношений — сделан в работе П. С. Колесникова

[34].

Наиболее общим и удобным методом нахождения нормальных форм в алгебрах, заданных набором порождающих элементов и определяющих соотношений, является вычисление стандартного базиса (или базиса Грёбнера — Ширшова) определяющих соотношений. Идея восходит к работе М. Ньюмана [39], где он сформулировал и доказал так называемую "бриллиантовую" лемму (от англ. diamond) ставшую толчком для целого направления в алгебре. Это отразилось изначально в работах А. И. Ширшова [6] и А. Бухбергера [17], затем в работах Л. А. Бокутя, напр., [2], и Г. Бергмана [11]. Отметим, что различия в подходах, используемых в данных работах, приводило к различным утверждениям, которые, тем не менее, эквивалентны. Мы в данной диссертации будем пользоваться утверждением в постановке А. И. Ширшова, именуемым леммой о композициях. Для ассоциативных конформных алгебр аналог леммы о композициях был впервые предложен в работе Л. А. Бокутя и соавторов [12].

Поскольку мы работаем в классе ассоциативных конформных алгебр, будет естественно подробнее изучить их структуру, а также обратиться к известным результатам. Структурная теория ассоциативных конформных алгебр с точным представление конечного типа хорошо изучена и мало отличается от таковой для классических конечномерных ассоциативных алгебр: простые объекты изоморфны либо конформным алгебрам петель $\mathrm{Cur}_n = \mathrm{Cur}\, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C}[\partial])$, либо алгебрам конформных эндоморфизмов $\mathrm{Cend}_{n,Q} \cong Q(x)\mathrm{M}_n(\mathbb{C}[\partial, x])$, $\det Q \neq 0$; полупростые объекты есть прямая сумма простых, а также существует максимальный нильпотентный идеал (радикал).

Вопрос отщепления радикала в классическом случае разрешается известной теоремой Веддербёрна, сформулированной и доказанной им в начале 1900-х годов:

Теорема (Основная теорема Веддербёрна). *Всякая конечномерная ассоциативная алгебра A над совершенным полем $\Bbbk$ есть полупрямое произведение полупростой подалгебры S и радикала R: $A \cong S \ltimes R$.*

Изначальное доказательство теоремы заключалось в непосредственной проверке. Однако, в 1945-46 г.г. в работах [26] и [27] Г. Хохшильдом была построена когомологическая теория, явившая более простой подход к доказательству основной теоремы Веддербёрна и других утверждений подобного рода. Идея заключается в доказательстве того, что короткая точная последовательность,

$$0 \to R \to A \to {}^{A}\!/_{R} \to 0,$$

естественных гомоморфизмов расщепляется гомоморфизмом алгебр. Вопрос расщепления, в свою очередь, эквивалентен вопросу тривиальности второй группы когомологий Хохшильда $H^2(A, R)$.

Повторяя логику, диктуемую классическим доказательством теоремы Адо, конформная проблема также существенно зависит от вопроса отщепляемости радикала. Следовательно, возникает естественный интерес к исследованию отщепляемости радикала и в классе ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, как носителе ассоциативной обёртывающей для всякой конформной алгебры Ли.

Это приводит нас к постановке конформного аналога проблемы Веддербёрна:

Проблема (Основная теорема Веддербёрна, конформная). *Описать условия, при которых* *ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа A изоморфно представляется полупрямым произведением своей подалгебры S и нильпотентного радикала R: $A \cong S \ltimes R$.*

Естественным инструментом для решения подобных задач вновь является метод когомологий, адаптация и развитие которого на новом — конформном — уровне приводится в основополагающей работе Б. Бакалова, В. Г. Каца, А. Воронова [8]. В данной диссертации, однако, мы будем чаще обращаться к эквивалентной конструкции, разработанной И. А. Долгунцевой [4].

Хорошо известно (например, из книги А. Картана и С. Эйленберга по гомологической алгебре, гл. 13), что для любой алгебры Ли L и L-модуля V группы когомологий $\mathrm{H}^n(L, V)$ совпадают с группами когомологий Хохшильда $\mathrm{H}^n(U(L), V)$ универсальной ассоциативной обёртывающей алгебры $U(L)$ с коэффициентами в том же пространстве V, но снабжённом индуцированной структурой $U(L)$-модуля. В частности, это верно для наиболее интересной нам второй группы когомологий, отвечающей за структуру сингулярных расширений. К сожалению, в конформном случае многозначность умножения и аксиома локальности вносят достаточно аберраций, чтобы данное соответствие нарушилось в общем случае.

Степень разработанности задачи и цели исследования

Структурная теория конформных алгебр Ли конечного типа была разработана в [22], простые и полупростые алгебры и супералгебры Ли конечного типа были с точностью до изоморфизма описаны в работах [18], [23] и [24]. В работах [8], [15], [16], [19], [20], [21], [37] исследуется теория представлений, классифицируются неприводимые представления над простыми конформными (супер)алгебрами Ли конечного типа, а также над некоторыми другими исключительными представителями.

Опираясь на некоторые предыдущие труды, П. С. Колесникову в статьях [32] и [33] удалось частично решить конформную проблему Адо. Решение оказалось положительным в случае, когда полагалась выполненной конформная теорема Леви, т.е. отщеплялся разрешимый радикал. Как упоминалось ранее, конформные алгебры Ли конечного типа не исчерпываются лишь такими, что показывается, например, в [21].

Теория универсальных объектов, таких как свободная и универсальная обёртывающая алгебры, была представлена в работах [42], [43]. Там же было предложено необходимое условие для того, чтобы конформная алгебра Ли L инъективно вкладывалась в свою универсальную обёртывающую ассоциативную конформную алгебру $\mathcal{U}(L, N)$ для некоторой функции локальности N.

В статье [12] был представлен метод базисов Грёбнера — Ширшова для ассоциативных конформных алгебр. Позднее он был существенно переработан и оптимизирован в работах Л. Ни, Ю. Чена [40] и П. С. Колесникова [34].

Структурная теория ассоциативных конформных алгебр конечного типа была разработана в [22], [48]. Там же была доказана конформная постановка основной теоремы Веддербёрна для алгебр данного класса. Другое доказательство, основанное на методе когомологий, приводится в [5]. В работе [32] показано, что класс ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа строго больше. Структурная теория для алгебр данного класса разработана в [14] и [30]. В отличие от предыдущего случая, как показано в [30], к основной теореме Веддербёрна существуют контрпримеры: ассоциативные конформные алгебры, для которых можно построить нерасщепляемое расширение.

Когомологическая теория для конформных алгебр различных классов построена в [8]. Она была переписана на языке псевдоалгебр в работе [7], однако, основное внимание было уделено псевдоалгебрам Ли (в том числе, конформным алгебрам Ли). Когомологическая теория для ассоциативных конформных алгебр на языке псевдоалгебр более детально изложена в [4].

Основные результаты диссертации

1. Доказано, что квадратичные конформные (супер)алгебры Ли, построенные по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, специальны. Как следствие, решена конформная проблема Адо в классе квадратичных конформных (супер)алгебр, построенных по конечномерным специальным (супер)алгебрам Гельфанда — Дорфман.

2. Вычислен базис Грёбнера — Ширшова (БГШ) для универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$ для произвольной конформной алгебры типа Каца — Муди. Как следствие, получен линейный базис данной конформной алгебры.

3. Полностью решен вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа.

Первый результат опубликован в работе [52], совместной с П. С. Колесниковым и А. С. Панасенко. При этом П. С. Колесникову принадлежит идея использования деформации регулярного представления для построения точного представления. А. С. Панасенко построил структуру алгебры Пуассона на универсальной дифференциальной обёртывающей для алгебры Новикова, продолжающую коммутатор по произведению Новикова. Автору диссертации принадлежит доказательство существования точного представления конечного типа для квадратичной конформной алгебры, построенной по специальной конечномерной (супер)алгебре Гельфанда — Дорфман (теорема 1).

Второй результат опубликован в работе [53], совместной с П. С. Колесниковым. Здесь П. С. Колесникову принадлежат постановка задачи и определение методики решения, а формулировки и доказательства результатов (теоремы 3 и 4) получены автором диссертации.

Третий результат является обобщением фактов, доказанных в личной работе автора [50] (теорема 5) и совместной работе [51] с П. С. Колесниковым (теорема 6). В работе [51] решающий вклад автора диссертации состоит в исследовании случаев, когда вторые группы когомологий конформной алгебры вида $\mathrm{Cend}_{n,Q}$ тривиальны. Как следствие, доказан конформный аналог теоремы Веддербёрна (теорема 7).

Публикации

Основные результаты опубликованы в [49] — [53] в журналах, входящих в перечень ВАК, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Методы исследования

В диссертации используются классические результаты теории конформных алгебр Ли и ассоциативных конформных алгебр, а также когомологической теории для конформных алгебр.

В первом вопросе доказательство опирается на взаимно-однозначное соответствие между классом квадратичных конформных (супер)алгебр Ли и классом ГД-(супер)алгебр, установленное К. Ксу в работе [46]. Широко используется конструкция пуассоновой конформной обёртывающей, предложенная П. С. Колесниковым в [35].

При работе со вторым вопросом активно применяется новый подход к вычислению БГШ для ассоциативных конформных алгебр, разработанный П. С. Колесниковым в [34].

Доказательство третьего пункта опирается на адаптированный метод когомологий Хохшильда, представленный в работе И. А. Долгунцевой [4], а также на предыдущие результаты в данном направлении [5], [30], [31], [32].

Научная новизна и значимость работы

Работа носит теоретический характер. Все результаты являются новыми. Новизна результата 1 состоит в том, что описан широкий класс конформных (супер)алгебр Ли, заведомо имеющих точное представление конечного типа и установлена исходно не очевидная связь между специальностью ГД-(супер)алгебры и построенной по ней квадратичной конформной (супер)алгебры. Результат 2 является завершением исследований универсальных ассоциативных обертывающих нетривиальных центральных расширений простых конформных алгебр Ли. Кроме того, в ходе решения этой задачи был впервые найден базис свободной коммутативной конформной алгебры с локальностью $N = 3$ на порождающих элементах. Результат 3 завершает серию работ об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа.

Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области теории представлений конформных алгебр, при изучении универсальных объектов, в теории когомологий конформных алгебр, а также некоторых комбинаторных вопросах. Кроме того, результаты могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018), международной школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), второй конференции математических центров России (Москва, 2022), а также обсуждались на семинарах имени А. И. Ширшова по теории колец и «Алгебра и логика» института математики имени С. Л. Соболева и новосибирского государственного университета.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 105 страницах. Главы диссертации подразделены на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения имеют тройную нумерацию, где первая цифра отвечает за главу, вторая — за номер параграфа, третья — за номер утверждения. Список литературы содержит 74 наименования, отдельным списком из восьми пунктов идут работы автора по теме диссертации.

Основное содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка проблем, их описание, аргументируется актуальность и описывается степень проработанности. Сформулированы основные результаты, а также освещены применяемые методы исследования.

В **первой главе** даются основные определения и вспомогательные утверждения по общей теории конформных (супер)алгебр, теории представлений, об универсальных обёртывающих объектах, о когомологической теории и теории базисов Грёбнера — Ширшова. Каждый подраздел сопровождается наглядными примерами и необходимыми ссылками.

Во **второй главе** изучаются универсальные обёртывающие объекты для квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, а также их взаимосвязь с точными представлениями данных (супер)алгебр. В **первом параграфе** приводятся более специфические предварительные сведения, а также ряд вспомогательных утверждений, основным из которых является то, что квадратичная конформная (супер)алгебра Ли, построенная по специальной ГД-(супер)алгебре, инъективно вкладывается в универсальную пуассонову конформную обёртывающую (супер)алгебру. Во **втором параграфе** доказывается результат о том, что конформная проблема Адо имеет положительное разрешение для квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по конечномерным специальным ГД-(супер)алгебрам.

Теорема 1. *Пусть V будет конечномерной специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра $L(V)$ имеет точное представление конечного типа.*

В **третьем-четвёртом параграфах** исследуется вопрос инъективности вложения квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по специальных ГД-(супер)алгебрам. В частности, доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть V будет специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра Ли $L(V)$ инъективно вкладывается в универсальную ассоциативную обёртывающую конформную (супер)алгебру $\mathcal{U}(L(V), N)$ с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$.*

Данная теорема не относится к списку основных результатов по формальным критериям. Однако, она стоит упоминания отдельной строкой, поскольку результат является следствием дальнейших исследований и применения наработок, полученных при решении задачи о поиске точного представления конечного типа.

В **третьей главе** исследуется метод БГШ для ассоциативных конформных алгебр, а также его приложения к некоторым конкретным примерам. В **первом параграфе** приводятся более специфические предварительные сведения, необходимые для вычисления БГШ универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры. Во **втором параграфе** вычисляется БГШ универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$ для конформных алгебр Каца — Муди.

Теорема 3. *Пусть $K(\mathfrak{L})$ есть конформная алгебра Каца — Муди, построенная по алгебре Ли $\mathfrak{L}$ с билинейной симметрической инвариантной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Пусть B_f есть линейный базис $\mathfrak{L}$ с заданным на нём порядком $\leq$. Тогда базис Грёбнера — Ширшова универсальной* *обёртывающей ассоциативной конформной алгебры* $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)$ *состоит из переписывающих правил*

$$
\begin{aligned}
&\partial L_0^a \to L_0^a\partial, \quad \partial L_1^a \to L_1^a\partial - L_0^a,\\
&L_n^a\partial \to \partial L_n^a + nL_{n-1}^a,\ n\ge 2, \quad R_m^a\partial \to \partial R_m^a + mR_{m-1}^a,\ m\ge 0,\\
&R_n^a L_m^b \to L_m^b R_n^a,\ m,\ n\ge 0\\
&L_n^a L_m^b \to L_m^b L_n^a + L_{n+m}^{[a,b]}, \quad n,\ m\ge 0, \quad (n,a) >_{lex} (m,b),\\
&L_n^a b \to 0, \quad R_n^a b \to 0, \quad n\ge N=3,\\
&L_n^a e \to 0, \quad R_n^a e \to 0, \quad \partial e \to 0, \quad n\ge 0,\\
&R_0^a b \to L_0^a b - [a,b], \quad R_1^a b \to L_1^a b - \langle a|b\rangle e, \quad R_2^a b \to L_2^a b,\\
&L_1^a\partial b \to L_1^b\partial a - 3L_0^b a + 3L_0^a b - 2[a,b],\ a>b,\\
&\partial L_2^a b \to L_1^a b + L_1^b a - \langle a|b\rangle e,\\
&L_2^a b \to L_2^b a,\ a>b.
\end{aligned}
$$

и результатов их композиций ($a,\ b,\ c\in B_f$)*:*

$$
\begin{aligned}
&L_1^a\partial^s b \to L_1^b\partial^s a - (s+2)L_0^b\partial^{s-1}a + (s+2)L_0^a\partial^{s-1}b - 2\partial^{s-1}[a,b], \quad s\ge 2, \quad a>b,\\
&L_2^a L_2^b c \to 0, \quad a\le b\le c,\\
&L_1^a L_2^b c \to L_1^b L_2^c a, \quad b\le c<a,\\
&L_1^a L_2^b c \to L_1^b L_2^a c, \quad b<a\le c\\
&L_1^a L_1^b c \to L_1^a L_1^c b + L_0^b L_2^a c - L_0^c L_2^a b + L_2^a[c,b] + L_2^b[c,a] + L_2^c[a,b], \quad a\le c<b,\\
&L_1^a L_1^b c \to L_1^c L_1^a b + L_0^b L_2^c a - L_0^c L_2^a b + L_2^a[c,b] + L_2^c[a,b], \quad c<a\le b,\\
&L_0^a L_1^b c \to L_0^b L_1^a c + L_0^c L_1^b a + L_0^a L_1^c b - L_0^b L_1^c a - L_0^c L_1^a b\\
&\qquad + L_1^{[a,b]}c + L_1^{[b,c]}a + L_1^{[c,a]}b - L_1^a[b,c] - L_1^b[c,a] - L_1^c[a,b] + \langle a|[b,c]\rangle e, \quad c<b<a.
\end{aligned}
$$

Как следствие, в **третьем параграфе** мы получаем, что для конформных алгебр Каца — Муди оказывается верным конформный аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Теорема 4. *Для любой алгебры Ли* $\mathfrak{L}$ *с линейным базисом* B *и любой билинейной симметрической формы* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *на* $\mathfrak{L}$ *имеет место следующий изоморфизм ассоциативных конформных алгебр:*

$$\operatorname{gr}\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3) \cong \operatorname{As}\operatorname{Com}\operatorname{Conf}(B,3)\oplus \Bbbk e.$$

В **четвёртой главе** исследуется вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа. Как известно, этот вопрос полностью определяется строением второй группы когомологий Хохшильда. В **первых двух параграфах** рассматривается исключительная простая ассоциативная конформная алгебра $\mathrm{Cend}_{1,x}$, для которой вопрос о тривиальности второй группы когомологий Хохшильда является самостоятельным результатом.

Теорема 5. *Пусть* M *будет произвольным бимодулем над ассоциативной конформной алгеброй* $\mathrm{Cend}_{1,x}$*. Тогда* $\mathrm{H}^2(\mathrm{Cend}_{1,x},M)=0$.

Как следствие, получаем, что $\mathrm{Cend}_{1,x}$ отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром.

В **третьем и четвёртом параграфах** данный результат, вообще говоря, принципиально иными рассуждениями, достраивается до общего случая.

Теорема 6. *Пусть M будет произвольным бимодулем над ассоциативной конформной алгеброй $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$, $n > 1$. Тогда $\mathrm{H}^2(A, M) = 0$.*

В **пятом параграфе** будет приведен ряд контрпримеров, которые, в совокупности с результатами И. А. Долгунцевой [4], [5], позволят доказать общую классификационную теорему.

Теорема 7. *Полупростая ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа A отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром тогда и только тогда, когда $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где каждый идеал A_i изоморфен Cur_n, Cend_n, и не более чем одной копии $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$.*

Заключение

В данной работе рассматривались задачи, связанные с конформными аналогами теорем Адо и Веддербёрна:

Проблема. (Адо, конформная) *Имеет ли всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как H-модуль, точное представление на конечнопорождённом свободном H-модуле?*

Проблема. (Основная теорема Веддербёрна, конформная) *Описать условия, при которых ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа A изоморфно представляется полупрямым произведением своей полупростой подалгебры S и нильпотентного радикала R: $A \cong S \ltimes R$.*

Во второй и третьей главе были предложены и исследованы методы для решения первой из поставленных проблем. В ряде случаев проблему удалось решить положительно, что продвигает нас к получению общего результата. Кроме того, в третьей главе исследовались методы отыскания базиса Грёбнера — Ширшова для конформных алгебр, что может быть полезным в дальнейших исследованиях само по себе.

В четвёртой главе был доказан ряд утверждений, которые полностью разрешают вторую из поставленных проблем. Для доказательства использовались как анализ внутренней структуры, так и переход к когомологической теории. Так, был применён конформный аналог когомологий Хохшильда, которые, аналогично классическому случаю, могут использоваться для описания расширений.

Все представленные результаты новые, апробировались на конференциях и опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Список литературы

[1] *Адо И. Д.* О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок // Изв. Каз. Ф. М. О. — 1935. — Т. 7, вып. 3. — С. 1—43.

[2] *Бокуть Л. А.*, Вложения в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. — 1976. — вып. 15. — С. 117—142.

[3] *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, вып. 4. — С. 13—30.

[4] *Долгунцева И. А.* Когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, вып. 6. — С. 688—706.

[5] *Долгунцева И. А.* Тривиальность второй группы когомологий конформных алгебр Cend_n и Cur_n // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, вып. 1. — С. 74—89.

[6] *Ширшов А. И.* О базах свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1. — С. 14—19.

[7] *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. — 2001. — Vol. 162. — P. 1—140.

[8] *Bakalov B., Kac V. G., Voronov A.* Cohomology of conformal algebras // Comm. Math. Phys. — 1999. — Vol. 200. — P. 561—589.

[9] *Beilinson A. A., Drinfeld V. G.* Chiral algebras // Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. — AMS, Providence, USA. — 2004. — Vol. 51.

[10] *Belavin A. A., Polyakov A. V., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. — 1984. — Vol. 241. — P. 333—380.

[11] *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — Vol. 29. — P. 178—218.

[12] *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F.* Composition-diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 272. — P. 739—774.

[13] *Borcherds R. E.* Vertex algebras, Kac–Moody algebras, and the monster // Proc. Natl. Acad. Sci., USA. — 1986. — Vol. 83. — P. 3068—3071.

[14] *Boyallian C., Kac V. G., Liberati J.-I.* On the classification of subalgebras of Cend_N and gc_N // J. Algebra. — 2003. — Vol. 260. — P. 32—63.

[15] *Boyallian C., Kac V. G., Liberati J.-I.* Classification of finite irreducible modules over the Lie conformal superalgebra CK_6 // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 317. — P. 503—546.

[16] *Boyallian C., Liberati J.-I.* Classification of irreducible representations over finite simple Lie conformal superalgebras // Groups, Algebras and Applications. Proceedings of XVIII Latin American Algebra Colloquium (São Pedro, Brazil, August 3–8, 2009). Contemporary Mathematics. — AMS, Providence, USA. — 2011. — Vol. 537. — P. 85—121.

[17] *Buchberger B.* An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal // PhD thesis (German). University of Insbruck, Austria. — 1965.

[18] *Cheng S.-J., Kac V. G.* Conformal modules // Asian J. Math. — 1997. — Vol. 1. — P. 181—193.

[19] *Cheng S.-J., Kac V. G.* A new $N = 6$ superconformal algebra // Commun. Math. Phys. — 1997. — Vol. 186. — P. 219—231.

[20] *Cheng S.-J., Kac V. G., Wakimoto M.* Extensions of conformal modules // Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics. Proceedings of the 38-th Taniguchi Symposium (Kyoto, Japan, December 9–13, 1996). Progress in Mathematics. — Birkhauser, Boston. — 1998. — Vol. 160. — P. 79—129.

[21] *Cheng S.-J., Kac V. G., Wakimoto M.* Extensions of Neveu-Schwarz conformal modules // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — P. 2271—2294.

[22] *D'Andrea A, Kac V. G.* Structure theory of finite conformal algebras // Sel. Math. New Ser. — 1998. — Vol. 4. — P. 377—418.

[23] *Fattori D., Kac V. G.* Classification of finite simple Lie conformal superalgebras // J. Algebra. — 2002. — Vol. 258. — P. 23—59.

[24] *Fattori D., Kac V. G., Retakh A.* Structure theory of finite Lie conformal superalgebras // Proceedings of the conference Lie Theory and its Applications in Physics V. — World Scientific Publication, River Edge, New Jersey, USA. — 2004. — P. 27—63.

[25] *Frenkel E., Kac V. G., Radul A., Wang W.* $W_{1+\infty}$ and $W(\mathrm{gl}_N)$ with central charge // N. Comm. Math. Phys. — 1995. — Vol. 170. — P. 337—357.

[26] *Hochschild G.* On the cohomology groups of an associative algebra // Ann. Math. — 1945. — Vol. 46. — P. 58—67.

[27] *Hochschild G.* On the cohomology theory for associative algebras // Ann. Math. — 1946. — Vol. 47. — P. 568—579.

[28] *Kac V. G.* Vertex algebras for beginners (Second ed.) // University Lecture Series. — AMS, Providence, USA. — 1998. — Vol. 10.

[29] *Kang S.-J., Lee K.-H.* Gröbner—Shirshov bases for representation theory // J. Korean Math. Soc. — 2000. — Vol. 37. — P. 55—72.

[30] *Kolesnikov P. S.* Associative conformal algebras with finite faithful representation // Adv. Math. — 2006. — Vol. 20. — P. 602—637.

[31] *Kolesnikov P. S.* On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras // J. Algebra Appl. — 2007. — Vol. 6. — P. 119—134.

[32] *Kolesnikov P. S.* On finite representations of conformal algebras // J. Algebra. — 2011. — Vol. 331. — P. 169—193.

[33] *Kolesnikov P. S.* The Ado theorem for finite Lie conformal algebras with Levi decomposition // J. Algebra Appl. — 2016. — Vol. 15. — 1650130.

[34] *Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases for associative conformal algebras with arbitrary locality function // Proceedings of the 3rd International Congress in Algebra and Combinatorics. — World Scientific. — 2020. — P. 255—267.

[35] *Kolesnikov P. S.* Universal enveloping Poisson conformal algebras // Int. J. of Alg. and Comp. — 2020. — Vol. 30, no. 5. — P. 1015—1034.

[36] *Kolesnikov P. S., Sartayev B., Orazgaliev A.* Gelfand–Dorfman algebras, derived identities, and the Manin product of operads // J. Algebra. — 2019. — Vol. 539. — P. 260—284.

[37] *Martinez C., Zelmanov E.* Irreducible representations of the exceptional Cheng–Kac superalgebra // Trans. Am. Math. Soc. — 2014. — Vol. 366. — P. 5853—5876.

[38] *Mostovoy J., Perez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* Hopf algebras in non-associative Lie theory // Bull. Math. Sci. — 2014. — Vol. 4. — P. 129–173.

[39] *Newman M. H. A.* On theories with a combinatorial definition of 'equivalence' // Ann. Math. — 1942. — Vol. 43. — P. 223—243.

[40] *Ni L., Chen Y.-Q.* A new Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra App. — 2017. — Vol. 16, no. 5. — P. — 1750094.

[41] *Primc M.* Vertex algebras generated by Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra — 1999. — Vol. 135, no. 3. — P. 253–293.

[42] *Roitman M.* On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217. — P. 496—527.

[43] *Roitman M.* Universal enveloping conformal algebras // Sel. Math. / New Ser. — 2000. — Vol. 6. — P. 319—345.

[44] *Wightman A. S.* Quantum field theory in terms of vacuum expectation values // — Phys. Rev. — 1956. Vol. 101. — P. 860—866.

[45] *Wilson K.* OPE and anomalous dimensions in the Thirring model // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 2. — P. 1473—1477.

[46] *Xu X.* Quadratic conformal superalgebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 231. — P. 1—38.

[47] *Xu X.* Gel'fand–Dorfman bialgebras // Southeast Asian Bull. Math. — 2003. — Vol. 27. — P. 561—574.

[48] *Zelmanov, E.* On the structure of conformal algebras // Proceedings of the International Conference on Combinatorial and Computational Algebra (May 24–29, 1999, Hong Kong, China). — Contemporary Mathematics, AMS, Providence, USA. — 2000. — Vol. 264. — P. 139–153.

Работы автора по теме диссертации

[49] *Колесников П. С., Козлов Р. А.* Теорема Молина–Веддербёрна для ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, вып. 5. — С. 639—641.

[50] *Козлов Р. А.* Когомологии Хохшильда ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{1,x}$ // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, вып. 1. — С. 52—68.

[51] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras with a finite faithful representation // Commun. Math. Phys. — 2019. — Vol. 369, no. 1. — P. 351—370.

[52] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A., Panasenko A. S.* Quadratic Lie conformal superalgebras related to Novikov superalgebras // J. Noncommut. Geom. — 2021. — Vol. 15, no. 4. — P. 1485—1500.

[53] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* Standard bases for the universal associative conformal envelopes of Kac–Moody conformal algebras // Algebr. Represent. Theor. — 2022. — Vol. 25. — P. 847—867.

[54] *Козлов Р. А.* Квадратичные конформные (супер)алгебры Ли, связанные с (супер)алгебрами Новикова // Материалы международной школы-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". — МГУ, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва. — 2020. — С. 38—39.

[55] *Козлов Р. А.* Универсальные ассоциативные обёртывающие с ограничением на локальность 3 для квадратичных конформных алгебр, построенных по специальным алгебрам Гельфанда — Дорфман// Материалы второй конференции математических центров России. — МГУ, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва. — 2022. — С. 12.

[56] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras // Proceedings of the international conference "Mal'tsev meeting 2018". — Sobolev Institute of Mathematics, Syberian Branch of the RAS, Novosibirsk. — 2018. — C. 176.