На правах рукописи

ЦИОВКИНА Людмила Юрьевна

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2022

Работа выполнена в отделе алгебры и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН
МАХНЕВ Александр Алексеевич

Официальные оппоненты:

КРОТОВ Денис Станиславович, доктор физ.-мат. наук, профессор РАН,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник лаборатории алгебраической комбинаторики

ПОНОМАРЕНКО Илья Николаевич, доктор физ.-мат. наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем

СОЗУТОВ Анатолий Ильич, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», Институт математики и фундаментальной информатики, профессор кафедры алгебры и математической логики

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Защита состоится 19 мая 2022 г. в __:__ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан __________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент СТУКАЧЕВ Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Изучение групп посредством исследования ассоциированных с ними графов, таких как граф Кэли или граф смежных классов, играет важную роль в теории групп. В связи с этим заметное место в теории групп занимает задача описания строения группы в зависимости от свойств симметрии ассоциированных с ней графов. Эти свойства могут иметь различную природу (например, групповую или комбинаторную), а с помощью их конкретного набора можно определить класс групп со схожим строением или даже охарактеризовать группу с точностью до изоморфизма. В свою очередь, аппарат теории групп может быть эффективно применен для описания групп автоморфизмов графов с симметриями заданного вида, а также для классификации самих этих графов. Особый интерес представляет собой исследование групп автоморфизмов графов с такими свойствами симметрии, как дистанционная транзитивность и, более общо, дистанционная регулярность.

Пусть G — это группа подстановок на конечном множестве Ω, Γ — это связный граф (под «графом» здесь и далее подразумевается простой неориентированный граф) на Ω и ∂ — его естественная метрика. Если группа G действует *дистанционно-транзитивно* на Γ, то есть $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и для любых двух упорядоченных пар (x, y) и (x', y') его вершин с $\partial(x, y) = \partial(x', y')$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $(x^g, y^g) = (x', y')$, то граф Γ называется *дистанционно-транзитивным*. Изучение групп подстановок, действующих дистанционно-транзитивно на некотором графе, восходит к работе Д. Г. Хигмана [39], в которой они были введены как «группы максимального диаметра». Мощным импульсом для их исследования стало открытие и построение в середине 20 в. около половины спорадических простых групп как групп ранга 3, а также знаменитая работа Ж. Титса [60], в которой он ввел обобщенные многоугольники с целью геометрической интерпретации некоторых полупростых алгебраических групп, включая группы Шевалле и группы лиева типа. Впоследствии Н. Биггс [17] выделил определенный набор комбинаторных свойств, «эффективно» аппроксимирующий дистанционную транзитивность графа, введя понятие дистанционной регулярности графа. Связный граф называется *дистанционно регулярным* (сокращенно «д.р.г.»), если для произвольной пары его вершин x и y с $\partial(x, y) = k$ число $p^k_{i,j}$ (*число пересечений*) вершин z таких, что $\partial(x, z) = i$ и $\partial(z, y) = j$, зависит только от i, j и k, и не зависит от выбора вершин x и y. Биггс показал, что алгебра смежности (алгебра Боуза-Мейснера) дистанционно регулярного графа порождается его матрицей смежности и обладает некоторыми свойствами полиномиальности, при этом его числа пересечений $p^k_{i,j}$ суть не что иное, как структурные константы этой алгебры (в т.н. стандартном базисе), и могут быть выражены с помощью его *массива пересечений*, то есть последовательности параметров $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, где d — диаметр графа, $b_i = p^i_{i+1,1}$ и $c_i = p^i_{i-1,1}$. Практически в то же время в работе Ф. Дельсарта [30] была установлена эквивалентность дистанционно регулярных графов и P-полиномиальных схем отношений, а также введены двойственные к ним, Q-полиномиальные схемы отношений. Важность исследования групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов подчеркивается тем фактом, что каждая конечная неабелева простая группа, за возможным исключением спорадических групп и групп лиевого типа малого ранга, является группой автоморфизмов Q-полиномиального дистанционно регулярного графа (т.е. (P и Q)-полиномиальной схемы). Более того, классификация таких графов рассматривалась Э. Баннаи и Т. Ито [1] как основа для альтернативного подхода к классификации конечных простых групп при помощи схем отношений («теория групп без групп»). Эти результаты стимулировали дальнейшие исследования дистанционно-транзитивных графов и их групп автоморфизмов, а также изучение таких вопросов, как характеризация дистанционно регулярных графов по массиву пересечений (см. обзоры в [1, 19, 64, 14] и [24]).

Если группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве его *дуг*, то есть на множестве упорядоченных пар его смежных вершин, то группа G является *транзитивной на дугах* или *флаг-транзитивной*, а сам граф Γ называется *реберно симметричным.* Очевидно, что дистанционно-транзитивный граф является реберно симметричным дистанционно регулярным графом. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает пример графа Клейна (с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$), полная группа автоморфизмов которого является флаг-транзитивной, но не дистанционно-транзитивной.

В настоящее время классификация дистанционно-транзитивных групп и графов близка к завершению и внимание исследователей переходит на более широкие классы объектов (см. [63, 9, 44] и [64]). Наряду с тем, одной из основных нерешенных задач, важных как для теории конечных групп, так и для теории дистанционно-транзитивных графов и их обобщений, является *задача описания флаг-транзитивных групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов.* На решение этой задачи и направлена настоящая диссертационная работа.

Ввиду результатов Г. Сабидусси [56] и Ч. Симса [55] каждый связный реберно симметричный граф имеет две теоретико-групповые характеризации, согласно которым он может быть построен как граф смежных классов или как орбитальный граф любой его флаг-транзитивной группы автоморфизмов.

Приведем первую из этих конструкций. Пусть даны неинвариантная подгруппа H группы G и элемент $g \in G - H$. Обозначим через $\Gamma(G, H, HgH)$ *граф смежных классов группы G по подгруппе H* (*относительно элемента g*), то есть граф, вершинами которого является множество $R(G, H) = \{Hx \mid x \in G\}$ правых смежных классов G по H, а ребрами — пары $\{Hx, Hy\}$ такие, что $xy^{-1} \in HgH$. Так, если G действует точно на $R(G, H)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то $\Gamma(G, H, HgH)$ — связный граф и G действует точно и транзитивно как на вершинах, так и на дугах графа $\Gamma(G, H, HgH)$. С другой стороны, если G — флаг-транзитивная группа автоморфизмов связного неодновершинного графа Γ, H — стабилизатор его вершины a в G, а g — элемент, переставляющий между собой смежные вершины a и a^g, то $g^2 \in H$, $G = \langle H, g\rangle$ и граф Γ *реализуем посредством тройки* (G, H, g), то есть $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$.

Вторая конструкция — это, по существу, представление реберно симметричного графа без изолированных вершин в виде графа симметричного базисного отношения шуровой схемы отношений (или схемы орбиталов) некоторой транзитивной группы подстановок.

Таким образом, задача описания реберно симметричных дистанционно регулярных графов подразумевает определение троек-представителей (G, H, g), реализующих классы изоморфизма графов, а поскольку схема орбиталов группы G на $R(G, H)$ является измельчением метрической схемы графа, то его алгебра смежности может быть интерпретирована как подалгебра алгебры Гекке группы G относительно H (см., например, [1]).

Введем некоторые определения. Связный граф Γ диаметра d называется *примитивным*, если для всех $i \in \{2, 3, ..., d\}$ граф Γ_i на том же множестве вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ, является связным; в противном случае, граф Γ называется *импримитивным.* По теореме Хигмана (см. [26, теорема 1.9]) свойство дистанционно-транзитивной группы быть примитивной (импримитивной) естественно приближается свойством дистанционно регулярного графа быть примитивным (соотв., импримитивным). Д. Смит [53] доказал, что импримитивность дистанционно регулярного графа валентности $k \geq 3$ влечет его двудольность или *антиподальность* (т.е. бинарное отношение «совпадать или находиться на максимальном расстоянии» на множестве вершин является эквивалентностью). Н. Биггс и Э. Гардинер (см. [19, предложение 4.2.2] и также [34], [10, теорема 2.9]) показали, что каждый импримитивный дистанционно регулярный граф степени $k \geq 3$ можно преобразовать в некоторый примитивный дистанционно регулярный граф путем применения операций перехода к антиподальным частным или половинным графам. Восстановление импримитивного графа по такому производному графу является весьма сложной проблемой (см. [44]), которая сопряжена с проблемой классификации антиподальных дистанционно регулярных графов небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$, и, как отмечается в [1, с. 239], аналогична определению группы автоморфизмов простой группы или построению расширения простой группы с помощью ее мультипликатора Шура. Отметим, что наибольший прогресс достигнут в описании тех антиподальных дистанционно регулярных графов, антиподальное частное которых является известным примитивным графом диаметра не меньше 3 (см. [21, 12, 11, 38]). Кроме того, число антиподальных д.р.г. фиксированного диаметра $d \geq 5$, известных к настоящему времени, оказывается очень мало. С другой стороны, антиподальные дистанционно регулярные графы небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$ образуют обширный и бесконечный класс графов, конструкции которых тесно взаимосвязаны с такими важными комбинаторными и алгебраическими объектами, как проективные плоскости, обобщенные четырехугольники, делимые дизайны, коды, (обычные и обобщенные) матрицы Адамара, конечные группы (см. [37, 29, 16, 25, 49, 28, 48, 50, 77]). Следует отметить, что несмотря на то, что антиподальные дистанционно регулярные графы небольшого диаметра интенсивно изучались за последние несколько десятилетий, систематического исследования их групп автоморфизмов не проводилось.

В диссертации проводится исследование транзитивных и, в основном, флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных д.р.г. небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$. Отметим, что задача описания таких групп представляет интерес, в том числе, для построения вышеупомянутых объектов. В целом, ее изучение фокусируется вокруг нескольких основных вопросов:

1) определение комбинаторных свойств графа, в частности, его допустимых массивов пересечений;

2) исследование связи локальных комбинаторных свойств графа и строения его группы автоморфизмов (локальный подход);

3) описание группы автоморфизмов графа по ее действиям (i) на вершинах, (ii) на дугах, (iii) на антиподальных классах (глобальный подход).

В диссертации исследования первого вопроса имеют вспомогательный характер, а основное внимание уделяется последним двум вопросам. Перейдем к предметному обсуждению истории и результатов.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет массив пересечений вида $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, где k — степень графа, r — порядок антиподального класса и μ — число общих соседей для двух вершин на расстоянии 2. При этом $2 \le r \le k$, Γ является антиподальным r-накрытием полного графа на $k+1$ вершинах, для параметров r, μ и k справедливо тождество $k-1-r\mu = \lambda - \mu$, где λ — число общих соседей для двух смежных вершин, и μ четно всякий раз, когда четно число $k+1$. Из результатов Э. Гардинера [34] следует, что в случае $r = k$ граф Γ изоморфен второй окрестности вершины в неполном графе Мура степени $k+1 \in \{3, 7, 57\}$. Из результата М. Ашбахера [13] о несуществовании группы ранга 3 степени 3250 и подстепени 57 следует, что если граф Γ дистанционно-транзитивен с $r = k$, то Γ — это 6-цикл или вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона (см. также [35]).

Р. Мэтоном [50] была найдена первая конструкция бесконечного семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 и степени $k = q > 3$, допускающих флаг-транзитивное действие группы $L_2(q)$. Д. Тейлор [59] классифицировал антиподальные дистанционно-транзитивные графы диаметра 3 с $r = 2$, обнаружив в том числе несколько спорадических примеров (для групп Co_3 и HiS) и бесконечных семейств (для групп $SU_3(q)$ и ${}^2G_2(q)$).

Впоследствии К. Годсил, Р. Либлер и Ш. Прэгер [36] завершили классификацию антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3 для оставшихся значений $2 < r < k$ (небольшой пробел в их доказательстве указан и исправлен в [32]). Ключевую роль в их работе сыграло следующее наблюдение, позволяющее значительно ограничить строение группы автоморфизмов такого графа. Если G — это флаг-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, то (i) группа G индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на множестве антиподальных классов и если более того, G — дистанционно-транзитивная группа, то (ii) глобальный стабилизатор $G_{\{F\}}$ антиподального класса F в G индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на F. Как известно, по теореме Бернсайда каждая конечная 2-транзитивная группа подстановок является либо аффинной (т.е. ее цоколь является регулярной элементарной абелевой группой), либо почти простой (т.е. ее цоколь является простой неабелевой группой). Более того, на основе классификации конечных простых групп была получена классификация всех конечных 2-транзитивных групп подстановок. Она и стала основным инструментом исследования антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3 в [36]. Отметим, что с тех пор и до настоящего времени было открыто всего около десятка разных бесконечных семейств антиподальных д.р.г. диаметра 3 (в том числе бесконечные семейства реберно симметричных графов, не являющихся дистанционно-транзитивными).

В общем случае флаг-транзитивная группа автоморфизмов G антиподального д.р.г. Γ диаметра 3 может не обладать свойством (ii) и методы, предложенные в [36] для описания стабилизаторов вершин в дистанционно-транзитивных группах, оказываются неприменимыми. Несмотря на то, что строение группы G^{Σ}, индуцируемой флаг-транзитивной группой G на множестве антиподальных классов Σ графа Γ, также значительно ограничено классификационной теоремой, вопросы восстановления группы G по G^{Σ}, равно как и вопрос существования графа Γ для данной группы G, потребовали специального исследования для большинства допустимых групп G^{Σ}, в том числе, разработки новых методов, предлагаемых в диссертации, и применения таких глубоких результатов теории групп, как классификация О'Нэна–Скотта примитивных групп подстановок нечетной степени, классификация примитивных групп подстановок ранга 3, подгрупповое строение конечных простых групп, сведения о группах когомологий конечных групп, теория (обыкновенных и модулярных) представлений.

До недавнего времени класс реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 оставался практически неисследованным в общем случае. Случай $r \in \{2, k\}$ был рассмотрен в работе А.А. Махнева, Д.В. Падучих и автора диссертации [6]. А именно, с применением результата А.А. Махнева и Д.В. Падучих [5] о том, что порядок группы автоморфизмов неполного графа Мура степени $k+1 = 57$ не делится на $k(k+1)$, в [6] было показано, что при $r \in \{2, k\}$ полная группа автоморфизмов $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ реберно симметричного антиподального д.р.г. Γ диаметра 3 действует дистанционно-транзитивно. Кроме того, в [6] были найдены необходимые условия существования таких пар (Γ, G) при $\lambda = \mu$, в частности, установлено, что при этом условии группа G^Σ не является аффинной. Классификация реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 с $\mu = 1$ была недавно получена в работе [62], согласно которой при $\mu = 1$ граф Γ изоморфен либо 6-циклу, либо второй окрестности в графе Хофмана-Синглтона, либо графу Мэтона с $k = 2^e$ и $r = k - 1$.

Поэтому, а также ввиду того, что условие $\lambda \neq \mu$ влечет целочисленность спектра матрицы смежности графа Γ и дает некоторые дополнительные соотношения для его параметров r, μ и k, при описании групп $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ можно ограничиться случаем $\mu > 1$ и удобно рассматривать отдельно три ситуации:

I. G^Σ — почти простая группа и $\lambda = \mu$;

II. G^Σ — почти простая группа и $\lambda \neq \mu$;

III. G^Σ — аффинная группа.

В диссертации рассмотрена каждая из них.

В случае I определены все семейства графов, удовлетворяющих необходимым условиям существования из [6]. При этом найдены два новых бесконечных семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, допускающих флаг-транзитивные действия простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$.

В случае II получены необходимые и достаточные условия существования графов Γ с $\lambda \neq \mu$ и описаны их группы G, при этом обнаружено бесконечное семейство антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $k = q^3$ и $\mu = (q^2 - 1)(q + 1)/r$, допускающих флаг-транзитивное действие группы $SU_3(q)$, где q — нечетная степень простого числа и порядок r антиподального класса — это делитель числа $q + 1$ такой, что $(q + 1)/r$ нечетно, пропущенное Броувером в [20, предложение 12.5.4]. Для этого автором был разработан оригинальный метод анализа паросочетаний в некоторых накрытиях полных графов, допускающих флаг-транзитивную группу автоморфизмов с (B, N)-парой ранга 1, который основан на изучении канонической формы элементов в таких группах.

С применением этих результатов в диссертации классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа действует транзитивно на дугах и индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. А именно, доказано, что при $r \notin \{2, k\}$ и $\mu > 1$ каждый такой граф допускает флаг-транзитивную группу автоморфизмов, изоморфную группе $L_2(q), U_3(q), SU_3(q), Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$, и приведена его конструкция в виде графов смежных классов соответствующей группы. При этом был исследован и решен вопрос об изоморфизме этих графов графам из семейств, построенных Мэтоном [50], Броувером [20, предложение 12.5.4] и Камероном [25, предложение 5.1].

Группа всех автоморфизмов произвольного антиподального д.р.г. Φ, фиксирующих (как множество) каждый его антиподальный класс, обозначается через $\mathcal{CG}(\Phi)$ (она называется также *накрывающей группой* графа Φ).

В случае III в диссертации получено описание групп G графов Γ с $r \notin \{2, k\}$. Для этого был разработан способ определения допустимых флаг-транзитивных групп G графа Γ в аффинном случае, основанный на редукции к графам, у которых порядок накрывающей группы имеет одно из экстремальных значений. При этом было доказано, что при $\mathcal{CG}(\Gamma) = 1$ возникает всего два различных (с точностью до изоморфизма) графа, причем каждый из них может быть получен путем удаления спреда из геометрического или псевдогеометрического графа для обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(5, 3)$ (их конструкции описаны соответственно в [52] и [22]). В диссертации доказано, что при $\mathcal{CG}(\Gamma) > 1$ граф Γ является графом Кэли, допускающим регулярную группу автоморфизмов T (полный прообраз цоколя группы G^{Σ} в G), которая в большинстве подслучаев является элементарной абелевой 2-группой при четном $|\Sigma|$ и специальной группой простой экспоненты p с $Z(T) = \mathcal{CG}(\Gamma)$ при нечетном $|\Sigma| = p^e$. При этом было описано допустимое строение стабилизатора вершины в G и найдены ограничения для параметров k, r и μ графа. На основе перечисленных результатов в диссертации было показано, что за исключением т.н. одномерного случая $G^{\Sigma} \leq \mathrm{A\Gamma L}_1(|\Sigma|)$ и случая $\mu = 1$, при $r \notin \{2, k\}$ и нечетном $|\Sigma|$ граф Γ изоморфен графу, получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы или Годсила-Хензеля (см., например, [37, конструкция 4.3] и [37, конструкция 6.4]).

Одним из следствий проведенного в диссертации исследования случаев I и II является классификация некоторых графов на множестве инволюций простой группы $G \in \{L_2(q),\ Sz(q),\ U_3(q)\}$. *Графом D_n-инволюций* конечной группы X с непустым множеством Ω инволюций, замкнутым относительно сопряжений элементами из X, и непустым множеством $\mathcal{S}$ подгрупп в X, изоморфных диэдральной группе порядка n, также замкнутым относительно сопряжений элементами из X, называется граф на множестве Ω, ребрами которого являются пары вершин $\{u, v\}$ такие, что $\langle u, v\rangle \in \mathcal{S}$. В работе М. Джудичи и Э. Девиллерс [31] была предложена задача описания графов S_3-инволюций конечных простых групп и исследованы графы S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$. В диссертации эта задача решена для групп $U_3(2^n)$, и, более того, классифицированы графы $D_{2\cdot\chi(G)}$-инволюций каждой группы $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, где $q = 2^n > 2$ и

$$\chi(G) = \begin{cases} 5, & \text{если } G = Sz(q) \\ 3, & \text{если } G \in \{L_2(q), U_3(q)\} \end{cases}.$$

А именно, с применением классического результата М. Судзуки [58] о том, что G действует транзитивно на множестве своих отличимых (distinguished) пар инволюций, установлено, что каждый такой граф, с одной стороны, является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, и с другой — совпадает с графом π-локального слияния (π-local fusion graph, см. [15]) группы G, где $\pi = \{\chi(G)\}$ (отдельно отметим, что с применением этих результатов автором было обнаружено, что бесконечные семейства графов π-локального слияния групп G, где π — множество всех нечетных порядков элементов группы G, отличных от $\chi(G)$, принадлежат классу графов Деза, тем самым, найдено новое бесконечное семейство графов Деза [61]). В диссертации также доказано, что для каждого $n \geq 2$ граф S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен дистанционно регулярному графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$, что уточняет результат из [31], и, кроме того, установлено, что несколько бесконечных семейств фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ принадлежат классу локально сильно регулярных графов.

Если Φ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 и $\mathcal{CG}(\Phi)$ — абелева группа, регулярная на (каждом) его антиподальном классе, то в соответствии с терминологией из [37] граф Φ будет называться *абелевым*. В диссертации исследуется задача классификации абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством: $(*)$ Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов.* При этом, не ограничивая общности, можно считать, что G совпадает с полным прообразом группы G^Σ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Решение этой задачи для случая, когда подстановочный ранг $\mathrm{rk}(G^\Sigma)$ группы G^Σ равен 2 может быть получено из результатов диссертации, перечисленных ранее, поскольку граф Γ со свойством $(*)$, удовлетворяющий данному условию на ранг, является реберно симметричным. В диссертации исследован класс абелевых антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 со свойством $(*)$ в следующем случае, когда $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. При этом условии граф Γ оказывается «почти» реберно симметричным, в том смысле, что группа G имеет ровно две орбиты на множестве дуг графа Γ, а сам граф Γ может быть представлен в виде объединения двух графов смежных классов группы G. Для изучения таких графов был разработан метод редукции к т.н. *минимальным* частным графа Γ, который позволяет классифицировать графы Γ в зависимости от типа такого частного. При помощи исследования равномерных (equitable) разбиений множества вершин графа Γ, которые возникают как разбиения на множество орбит некоторых подгрупп группы G, в диссертации получен ряд существенных ограничений на группу G, спектр и параметры графа Γ, а также классифицированы его минимальные частные. На основе полученных результатов решена поставленная задача при условии, что цоколь группы G^Σ является спорадической простой группой. Решение опирается на классификацию примитивных групп подстановок ранга 3 соответствующего типа и отвечающих им графов ранга 3 (см. [24, гл. 11]).

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра $d \in \{4, 5\}$ является антиподальным r-накрытием своего антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $r = 1 + b_2/c_{d-2}$ и $\bar{\Gamma}$ — это дистанционно регулярный граф диаметра 2 с массивом пересечений $\{b_0, b_1; 1, \gamma\mu\}$, где $\gamma = r$ при $d = 4$ и $\gamma = 1$ при $d = 5$. При этом если G — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа $\bar{\Gamma}$, то G индуцирует группу ранга 3 на $\bar{\Gamma}$ и, более того, граф (ранга 3) $\bar{\Gamma}$ известен (см. [24, гл. 11]), в частности, граф $\bar{\Gamma}$ импримитивен тогда и только тогда, когда $\bar{\Gamma}$ — полный двудольный граф и Γ — двудольный граф диаметра 4.

А.А. Иванов, Р. Либлер, Т. Пенттила и Ш. Прэгер [43] классифицировали дистанционно-транзитивные антиподальные накрытия импримитивных графов ранга 3. В работах Дж. Ван Бона и А. Броувера, А. Юришича, Дж. Хэмметера были классифицированы дистанционно регулярные антиподальные накрытия многих примитивных графов ранга 3 (см. обзор в [9]). Так, Дж. Ван Бон и А. Броувер [21] доказали, что граф эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ не может иметь дистанционно регулярных антиподальных накрытий диаметра 5, за исключением случая $q = 2$, в котором таким накрытием является 5-куб. Известны всего два дистанционно регулярных антиподальных накрытия диаметра 4 графов $\mathrm{Herm}(2, q^2)$: граф Уэлса (единственный граф с массивом пересечений $\{5, 4, 1, 1; 1, 1, 4, 5\}$ (для $q = 2$)) и граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея (граф с массивом пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ (для $q = 3$)). В той же работе (см. [21, с. 164]) авторами был поставлен вопрос о существовании других накрытий графов $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, который до сих пор остается нерешенным. Отметим, что в работе М. Альфурайдана [9] была предпринята попытка описания дистанционно-транзитивных антиподальных накрытий известных на тот момент примитивных графов ранга 3 с применением компьютерных вычислений, но оказалось, что она содержит ряд неточностей. Так, случай, когда антиподальное частное является графом эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, в [9] был рассмотрен некорректно. В диссертации получено полное описание реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий диаметра 4 графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которых индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном, что, в частности, восполняет указанный пробел из [9].

К настоящему времени известно существование бесконечных семейств двудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4 и всего лишь четырнадцать примеров недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4. Так, ряд недвудольных антиподальных д.р.г. диаметра 4 был неявно обнаружен в связи с исследованием расширений почти простых групп, порожденных классом 3-транспозиций, в работе С.Д. Смита [54]. Среди них оказалось, например, дистанционно регулярное антиподальное 3-накрытие графа 3-транспозиций третьей группы Фишера Fi_{24}, допускающее флаг-транзитивное действие квазипростой группы $3.Fi_{24}'$ (3-централизатора в монстре Фишера–Грайса), явная конструкция которого приведена С. Нортоном [51].

Ввиду результатов Дж. Кулена, А. Юришича и П. Тервиллигера [45] параметры недвудольного антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 удовлетворяют *фундаментальной границе*

$$\Big(\theta + \frac{b_0}{b_0 - b_1}\Big)\Big(\eta + \frac{b_0}{b_0 - b_1}\Big) \geq -\frac{b_0 b_1 (b_0 - b_1 - 1)}{(b_0 - b_1)^2},$$

где θ и η — максимальное и минимальное неглавные собственные значения графа Γ соответственно. При этом, если в фундаментальной границе для графа Γ достигается равенство, то граф Γ локально сильно регулярен и его массив пересечений зависит от трех параметров: неглавных собственных значений $p = -1 - b_1/(1 + \eta)$, $-q = -1 - b_1/(1 + \theta)$ локальных подграфов и размера r антиподального класса. В этом случае граф Γ называется *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами (p, q, r) или просто AT4(p, q, r)-*графом.*

За исключением двух дистанционно-транзитивных антиподальных накрытий графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ с $q = 2$, 3, графа Фостера $3.\mathrm{Sym}(6)$ и третьего графа Сойчера, все известные недвудольные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 4 являются плотными (дистанционно-транзитивными) графами: граф Джонсона $J(8, 4)$, половинный 8-куб $\frac{1}{2}H(8, 2)$, граф Конвея-Смита $3.\,\mathrm{Sym}(7)$, граф $3.O_6^-(3)$, граф $3.O_7(3)$, граф $3.Fi_{24}$, графы Мейкснера, первый и второй графы Сойчера. Более того, кроме половинного 8-куба, все известные AT4(p,q,r)-графы допускают квазипростую флаг-транзитивную группу автоморфизмов. В общем виде проблема классификации AT4(p,q,r)-графов была поставлена в работе Кулена и Юришича [46], где были найдены некоторые комбинаторные характеризации таких графов и ограничения для их параметров (p,q,r). Впоследствии Юришичем [47] была выдвинута гипотеза о том, что, за исключением нескольких спорадических примеров, параметры каждого AT4(p,q,r)-графа удовлетворяют одному из условий: (i) $q=p+2$; (ii) $q|p$. Особый интерес представляет собой исследование графов с $q=p+2$, так как в этом случае граф имеет нулевой параметр Крейна q_{44}^4 и вторая окрестность произвольной вершины в нем является недвудольным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 4 [47, теорема 5.5]. Примером AT4$(p,p+2,r)$-графа с $p=2$ является антиподальное 3-накрытие единственного графа ранга 3 с параметрами $(162,56,10,24)$, построенное Л. Сойчером (второй граф Сойчера) с помощью компьютера [57]. Он допускает флаг-транзитивное действие квазипростой группы вида $3_2.U_4(3)$ (в обозначениях из «Атласа конечных групп» [27]) и ввиду результата Броувера [20, теорема 11.4.6] характеризуется своим массивом пересечений. Вторая окрестность вершины в нем — (реберно симметричный, но не дистанционно-транзитивный) третий граф Сойчера (с массивом пересечений $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$) [57]. Существование AT4$(p,p+2,r)$-графов с $p>2$ неизвестно, в частности, уже на протяжении 20 лет открытым является вопрос их существования даже для небольших допустимых значений параметра p (см., например, [46, 47] и [48]). Естественно возникает вопрос о том, какие группы могут действовать флаг-транзитивно на AT4$(p,p+2,r)$-графе.

Один из подходов к решению данной задачи предполагает определение простого спектра группы автоморфизмов графа, т.е. множества простых делителей ее порядка. В диссертации установлено, что простой спектр группы автоморфизмов AT4$(p,p+2,r)$-графа в большой степени ограничивается строением его локальных подграфов. Как известно, локальные подграфы AT4$(p,p+2,r)$-графа являются сильно регулярными графами с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2),p(p+3),p-2,p\big)$ [46]. В диссертации исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с такими параметрами, в частности, найдена верхняя граница для ее простого спектра. На основе этого результата получены существенные ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов AT4$(p,p+2,r)$-графа в случае, когда p — степень простого числа. А именно, при данном условии: 1) показано, что простой спектр стабилизатора дуги в полной группе автоморфизмов AT4$(p,p+2,r)$-графа ограничен множеством $\{2,3,\ldots,p\}$; 2) получена верхняя оценка для простого спектра полной группы автоморфизмов реберно симметричного AT4$(p,p+2,r)$-графа; 3) показано, что если степень вершины — произведение двух простых чисел, то стабилизатор вершины в полной группе автоморфизмов реберно симметричного AT4$(p,p+2,r)$-графа является почти простой группой. С применением этих результатов решен отрицательно вопрос существования реберно симметричных AT4$(p,p+2,r)$-графов с небольшим допустимым параметром $p\in\{5,7,11,17,27\}$. Кроме того, установлено, что сильно регулярные графы с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2),p(p+3),p-2,p\big)$ и $p=5,7$, вопрос существования которых открыт (см. [24, гл. 12] и [23]), не являются вершиннотранзитивными.

Цель и основные результаты диссертации. Цель диссертации состоит в изучении групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение графа или на действие группы на графе. Основные результаты диссертации таковы.

1. Классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы смежных классов диаметра 3 с $r > 2$ квазипростых групп $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Найдены новые бесконечные семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, связанные с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Результат опубликован в статьях [77, 73].

2. Для каждой группы $G \in \{U_3(q), Sz(q)\}$, где $q = 2^n \geq 4$, доказано, что граф на множестве ее инволюций, в котором две вершины смежны, если порядок произведения соответствующих инволюций равен ассоциированному простому числу группы G в смысле Судзуки, дистанционно регулярен. Как следствие, для групп $U_3(2^n)$ решена задача описания графов S_3-инволюций, предложенная в [31]. Кроме того, для каждого $n \geq 2$ доказано, что граф S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен дистанционно регулярному графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$. Установлено, что несколько бесконечных семейств фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ принадлежат классу локально сильно регулярных графов. Результат опубликован в статьях [77, 73, 75]

3. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Классифицированы графы Γ в почти простом случае. Результат опубликован в статьях [80, 72, 74].

4. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Показано, что за исключением одномерного случая $G^\Sigma \leq \mathrm{A\Gamma L}_1(|\Sigma|)$ и случая $\mu = 1$, при нечетном $|\Sigma|$ граф Γ является графом Таса-Соммы или графом Годсила-Хензеля. Результат опубликован в статьях [68, 76, 79].

5. Доказано, что антиподальное дистанционно регулярное накрытие диаметра 4 графа эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на дугах и индуцирует группу ранга 3 на множестве его антиподальных классов, изоморфно графу Уэлса или графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея. Результат опубликован в статье [78].

6. Получены ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графа в случае, когда p — степень простого числа. Доказано, что $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графы с $p = 5, 7, 11, 17, 27$ не являются реберно симметричными. Результат опубликован в статьях [70, 71, 67].

7. Исследован класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 со свойством $(*)$: Γ обладает транзитивной группой автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа. Классифицированы графы со свойством $(*)$ при условии, что цоколь группы G^Σ — спорадическая простая группа ранга 3. Результат опубликован в статье [66].

Результаты диссертации опубликованы в статьях [66]–[80] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты в пунктах 1, 2, 6 и 7 получены автором лично. Результаты в пунктах 3 и 4 получены в соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих, при этом вклад автора диссертации является решающим. Результат из пункта 5 получен в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих.

Новизна и научная значимость работы. В диссертации изучаются (в основном, транзитивные и флаг-транзитивные) группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение группы или графа. Наиболее значительный результат диссертации — классификация флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в аффинном и почти простом случаях, а также открытие бесконечных семейств реберно-симметричных дистанционно регулярных графов, связанных с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Важным инструментом этой работы стали разработанные автором методы локального анализа графов смежных классов простых групп с (B,N)-парой ранга 1, использующие каноническую форму элементов и классические результаты Судзуки о структурных уравнениях в таких группах, а также способ определения допустимых групп автоморфизмов в аффинном случае, основанный на редукции к графам, у которых порядок накрывающей группы имеет одно из экстремальных значений.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры и алгебраической комбинаторики.

Методы исследования. При исследовании дистанционно регулярных графов и их автоморфизмов в работе применяются методы теории конечных групп, теории представлений групп, методы локального анализа и спектральной теории графов, а также оригинальные методы, разработанные автором. Кроме того, в работе в ряде специальных случаев привлекались компьютерные вычисления в GAP [33] и Magma [18] для перебора орбитальных графов групп подстановок.

Апробация результатов. Основные результаты работы были представлены на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013, 2014, 2016–2021), в том числе в 2017 году в виде пленарного доклада по теме диссертации, Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (Новосибирск, 2013), Международной конференции по алгебре и комбинаторике, посвященной 60-летию А.А. Махнева (Екатеринбург, 2013), 37-й и 43-й Австралазиатских комбинаторных конференциях (Австралия, 2013, 2021), 44–49 Всероссийских молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2013–2021), Международной школе-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (Новосибирск, 2014), Международной конференции «Алгебра и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина (Нальчик, 2014), Международной школе-конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.В. Кабанова (Нальчик, 2014), Международной конференции «Graph Theory, Matrix Theory and Interactions» (Кингстон, Канада, 2014), Международных конференциях серии G2 (Екатеринбург, 2015, 2017, Новосибирск, 2016), Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019), Восьмой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), Конференции молодых ученых «Ломоносов–2021» (Москва, 2021), Канадской конференции по дискретной и алгоритмической математике «CanaDAM 2021» (Канада, 2021), 8-м Европейском математическом конгрессе (Порторож, Словения, 2021), 28-й Британской комбинаторной конференции «BCC 2021» (Дарем, Великобритания, 2021), Международной конференции по комбинаторным дизайнам и кодам «CDC 2021» (Риека, Хорватия, 2021), Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021).

Результаты работы докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре ИММ УрО РАН, на заседании Уральского математического общества, на семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Теория групп» и «Алгебра и логика», на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, на семинаре лаборатории математической логики ПОМИ РАН, на семинаре «Incidence Geometry» математического факультета Гентского университета, а также отмечены премией Уральского математического общества молодым математикам за 2013 год и премией Губернатора Свердловской области для молодых ученых за 2016 год в номинации «За лучшую работу в области математики».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 217 страницах, библиография содержит 150 наименований. Перейдем к более подробному изложению работы.

Основное содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разделена на главы, которые разбиваются на параграфы, а параграфы, в свою очередь, разделены на подпараграфы. Формулировки основных теорем продублированы во введении. Все утверждения в нумерованных главах имеют имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер утверждения в текущей главе. Все таблицы имеют одинарную сквозную нумерацию.

Глава 1 диссертации имеет вспомогательный характер. В ней приведены основные используемые определения и обозначения, изложены необходимые базовые результаты из теории групп подстановок, теории представлений, теории чисел и алгебраической теории графов (в том числе, конструкции реберно симметричных графов и дистанционно регулярных графов).

В **главе 2** получена классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда транзитивная на дугах группа автоморфизмов G графа Γ индуцирует аффинную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ его антиподальных классов.

В § 2.1 с применением т.н. метода Хигмана исследования групп автоморфизмов дистанционно регулярного графа найдены общие формулы для характеров мономиального матричного представления группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3 с $\lambda \neq \mu$. С помощью этих формул далее в § 2.1 определены собственные значения и допустимые массивы пересечений антиподального д.р.г. диаметра 3 на v вершинах, который обладает автоморфизмом g одного из двух специальных типов: (i) $\alpha_2(g) = v$ или (ii) $\alpha_3(g) = v$ (здесь и далее для автоморфизма h графа через $\alpha_s(h)$ обозначается число его вершин x таких, что $\partial(x, x^h) = s$).

Как известно, если $\widetilde{G}$ — конечная 2-транзитивная группа подстановок на множестве степени n и цоколь N группы $\widetilde{G}$ — абелева группа, то $\widetilde{G}$ подстановочно изоморфна подгруппе из $\mathrm{A\Gamma L}_d(q)$ для некоторых d и $q = p^c$, где p — простое, и $n = q^d = |N|$. В свою очередь, каждая подгруппа $\widetilde{G} \leq \mathrm{A\Gamma L}_d(q)$ 2-транзитивна на векторах соответствующего векторного пространства тогда и только тогда, когда стабилизатор нулевого вектора $\widetilde{G}_0 \leq \mathrm{\Gamma L}_d(q)$ действует транзитивно на ненулевых векторах. Аффинные 2-транзитивные группы подстановок с неразрешимым стабилизатором точки были классифицированы в работе К. Геринга [40]. Они включают три бесконечных семейства групп *линейного, симплектического* или G_2- типа (при этом $(\widetilde{G}_0)^\infty$ является транзитивной линейной группой), а также спорадические примеры для $d = 2, 4, 6$ *исключительного* или *экстраспециального* типов. Разрешимые конечные 2-транзитивные группы подстановок были описаны Б. Хуппертом (см. [41]) и включают бесконечное семейство групп *одномерного* типа и небольшое число других примеров экстраспециального типа. Более подробное описание можно найти в [42, гл. XII, § 7].

На основе классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок в § 2.2 установлены базовые свойства группы G, в том числе, исследована ситуация, когда G содержит нормальную подгруппу порядка $|\Sigma|$ (в этом случае оказывается, что граф Γ обладает автоморфизмом типа (ii)). В § 2.2 также доказано, что либо K действует регулярно на антиподальном классе (в этом случае граф Γ обладает автоморфизмом типа (i)) и для вершины a графа Γ и подгруппы $T = O_p(G)$, где p — простой делитель числа $|\Sigma|$, группа G_a изоморфна стабилизатору точки в G^Σ и $G = T : G_a$, либо $K = 1$ и граф Γ изоморфен одному из двух различных графов, которые могут быть получены путем удаления спреда из геометрического или псевдогеометрического графа для обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(5, 3)$ (второй (негеометрический) граф построен в [22]).

В § 2.3 и § 2.4 исследуются графы с $K > 1$ соответственно для $p = 2$ и для $p > 2$. В этих параграфах развит метод исключения допустимых вариантов строения группы $T : G_a$, основанный на результатах § 2.2 и классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок. С его помощью для неразрешимой группы G_a изучено ее (как правило, модулярное) представление на $T/\Phi(T)$, индуцированное действием на T, найдены достаточно сильные ограничения на G и массив пересечений графа Γ, в частности, для $p = 2$ исключен случай $\Phi(T) > 1$, а для $p > 2$ доказано, что T — специальная группа с центром K. Для разрешимой группы G_a, которая, в большинстве случаев, изоморфно вкладывается в $\mathrm{\Gamma L}_1(|\Sigma|)$, также найдены дополнительные ограничения на строение группы G и массив пересечений графа Γ.

В § 2.5 доказано, что при $p > 2$ в каждом случае для G_a, указанном в качестве допустимого в § 2.4, кроме одномерного, граф Γ известен и может быть построен с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.

Основные результаты **главы 2** представлены в теоремах 2.1, 2.2, 2.3 и следствии 2.4.

Теорема 2.1. *Предположим, что группа G действует транзитивно на дугах антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, где $r \notin \{2, k, (k-1)/\mu\}$, и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Пусть K — ядро действия G на Σ, $F \in \Sigma$, $a \in F$, $H = G_{\{F\}}$, $C = C_{G_a}(K)$, $|\Sigma| = p^e$, где p — простое число, и T — полный* *прообраз цоколя группы* G^{Σ} *в* G. *Если* $p=2$, *то либо* $K=1$ *и* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{15,10,1;1,2,15\}$, *либо* $|K|=r$, $r\mu=k+1=2^e$, $\mu>1$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $R=\mathrm{GL}_1(2^e)\cap G_a \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, G_a *содержит подгруппу* B *нечетного порядка, которая содержит* R *и действует транзитивно на* $[a]$, *и выполняются следующие утверждения:*

(i) *если* T *содержит нормальную в* G *подгруппу порядка* 2^e, *то* $K=E_r, r=\mu=2^{e/2}$, H *действует* 2-*транзитивно на* F, T — *элементарная абелева или специальная группа порядка* $2^{e+e/2}$, $C_K(R)=1$, $C_R(K)=\langle\tilde{h}\rangle>1$, $\alpha_1(\tilde{h})=|R|2^{e/2+1}w$ *и* $0\leq w\leq(e,2^e-1)/2$, *в частности, если* $|R|=2^e-1$, *то* $\alpha_1(\tilde{h})=0$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует регулярно на* $F-\{a\}$;

(ii) *если* $C_R(K)=1$, *то* $\Phi(K)=1, e=6$ *и* $r=32$;

(iii) *если* $C_R(K)>1$, *то* $|C_R(K)|>2^{e/2}/(e,2^e-1)$, $r\leq 2^{e/2}\leq\mu$ *и* $C_T(R)\leq K\leq Z(T)$, *а если к тому же* $\Phi(T)<K$ *и* $B\leq C_G(K)$, *то* $\Phi(T)=1$, *группа* T *содержит нормальную в* TB *подгруппу порядка* 2^e *и* Γ — *граф из п.* (i) *выше;*

(2) $e=2dc$, $d\geq 1$, r *делит* 2^c, T — *элементарная абелева группа порядка* $2^e r$, *не содержащая нормальных в* G *подгрупп порядка* 2^e, $Sp_{2d}(2^c)\trianglelefteq G_a$ *или* $d=3$ *и* $G_2(2^c)\trianglelefteq G_a$.

Теорема 2.2. *В предположениях и обозначениях из теоремы 2.1, а также при условии, что* $p>2$ *и* $\mu>1$, *имеем* $|K|=r$, $r\mu=k+1=p^e$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *реализуется экстраспециальный случай,* $r=p$, T — *экстраспециальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p *и либо*

(i) $p^e=3^4$, $Q_8\circ D_8\simeq R_0\trianglelefteq C$, $G_a/R_0\leq S_5$ *и* 5 *делит* $|G_a|$, *либо*

(ii) $p^e=5^2$, $\mathrm{SL}_2(3)\leq C, G_a\leq \mathrm{SL}_2(3).Z_4$, *либо*

(iii) $p^e=7^2$, $\mathrm{SL}_2(3)\leq C, \mathrm{SL}_2(3).Z_2\leq G_a\leq \mathrm{SL}_2(3).Z_6$, *либо*

(iv) $p^e=11^2$, $C\simeq \mathrm{SL}_2(3)$, $G_a\simeq Z_5\times\mathrm{SL}_2(3)$ *или* $Z_5\times\mathrm{GL}_2(3)$, *либо*

(v) $p^e=23^2$, $G_a\simeq Z_{11}\times(\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$, $C\simeq\mathrm{SL}_2(3)$ *или* $\mathrm{SL}_2(3).Z_2$;

(2) *реализуется исключительный случай и* $G_a\trianglerighteq S\simeq\mathrm{SL}_2(5)$ *при* $k\neq 728$ *и* $G_a\simeq\mathrm{SL}_2(13)$ *при* $k=728$, T — *специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p *и либо*

(i) $p^e=3^6$, $r=3$, $C=G_a\simeq\mathrm{SL}_2(13)$, *либо*

(ii) $p^e=9^2$, $r\in\{3,9\}$, $G_a/S\leq D_8$, $S\leq C$, *либо*

(iii) $p^e=11^2$, $r=11$, $S=C$, $G_a\simeq\mathrm{SL}_2(5)$ *или* $\mathrm{SL}_2(5)\circ Z_{10}$, *либо*

(iv) $p^e=19^2$, $r=19$, $S\leq C$, $G_a\simeq\mathrm{SL}_2(5)\circ Z_{18}$, *либо*

(v) $p^e=29^2$, $r=29$, $S\leq C$, $G_a\simeq\mathrm{SL}_2(5)\circ Z_{14}$ *или* $\mathrm{SL}_2(5)\circ Z_{28}$, *либо*

(vi) $p^e=59^2$, $r=59$, $S=C$, $G_a\simeq\mathrm{SL}_2(5)\circ Z_{58}$;

(3) *реализуется одномерный случай,* $R=G_a\cap\mathrm{GL}_1(p^e)\trianglelefteq G_a\leq\Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *и либо*

(i) $e>4$, $r\geq p^{e/2}$, T — *специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p, *и* R *не нормализует подгрупп индекса* p *в* K, *либо*

(ii) $e=4$, $r=p^2=\mu$, T — *специальная группа порядка* p^6, *группа* R *действует полурегулярно на* $[a]$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует полурегулярно на* $F-\{a\}$, *либо*

(iii) $e=4, p=3$, T — *специальная группа порядка* rp^4 *и* $R\leq N_G(K_1)$, *где* K_1 — *подгруппа индекса* p *в* K, $|R|=20$, $G_a\simeq Z_5:Z_{16}$ *и* $|R/C_R(K)|\leq 2$, *либо*

(*iv*) $e = 2$, $r = p$, T *— экстраспециальная группа экспоненты* p *и* $G_a \leq \mathrm{GL}_2(p)$, *либо*

(*v*) $e = 2$, $3 < r = p$ *— простое число Мерсенна,* T *— абелева группа и* $C_T(G_a) = 1$*;*

(4) *реализуется симплектический случай,* $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* p^c, $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$, T *— специальная группа порядка* rp^{2dc} *и экспоненты* p.

Теорема 2.3. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 3*, удовлетворяющий условиям из пп. 1, 2, 4 или условию* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *при* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2. Тогда граф* Γ *изоморфен дистанционно регулярному графу, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.*

Следствие 2.4. *Если в теореме 2.2 вместо условия* $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *предполагать, что* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*, то графы из пп. 1 и 2, а также граф со свойством* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *для* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2 не существуют.*

Результаты **главы 2** опубликованы в статьях [79, 76, 68]. Статья [79] написана в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих. Отметим, что в [79] были получены необходимые условия существования реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 при том условии, что его полная группа автоморфизмов индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Но в доказательствах ряда локальных утверждений из [79] были допущены некоторые неточности. В работе [68] они были устранены и приведен исправленный вариант основной теоремы из [79]. Подчеркнем, что в отличие от работы [79], где проводилось описание пар (Γ, G) при условии $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, в [68] была исследована также возможность $G < \mathrm{Aut}(\Gamma)$, при этом применялась схема доказательства и часть вспомогательных утверждений из [79]. Этот результат представлен в теоремах 2.1 и 2.2. В работах [68] и [76] получены теорема 2.3 и следствие 2.4.

В **главе 3** классифицируются антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 с квазипростой флаг-транзитивной группой автоморфизмов, изоморфной группе $L_2(q)$, $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$. В [6] были приведены необходимые условия существования трех бесконечных семейств реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, отвечающих бесконечным сериям простых групп $U_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Несмотря на то, что существование подходящих реберно симметричных претендентов обеспечивалось конструкцией графов смежных классов, вопрос, являются ли эти графы дистанционно регулярными или нет (за исключением некоторых примеров для малых значений q, которые были построены авторами [6] с помощью компьютерной системы GAP [33]), оставался открытым.

В § 3.1 доказано, что в некоторых случаях эти реберно симметричные графы в самом деле являются дистанционно регулярными. А именно, доказана теорема 3.1, в которой представлены два бесконечных семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, связанных с группами Судзуки $Sz(q)$ и группами Ри ${}^2G_2(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$ или $q = 3^{2n+1} > 3$ соответственно. Эти семейства дистанционно регулярных графов были впервые открыты автором диссертации в [77]. Предложенный в [77] метод доказательства дистанционной регулярности графов смежных классов групп $Sz(q)$ и

${}^2G_2(q)$ также оказался новым. Он основан на изучении канонической формы элементов в данных группах, которая в свою очередь, определяет локальное строение этих графов.

Теорема 3.1. *Пусть $G \in \{Sz(q), {}^2G_2(q)\}$, где q — степень простого числа p, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $q > 3$. Пусть g — это инволюция из $G - N_G(S)$, $\langle h \rangle$ — это подгруппа нечетного индекса $r > 1$ из $N_G(S) \cap N_G(S)^g$ и $H = S\langle h \rangle$. Тогда $\Gamma(G, H, HgH)$ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

(1) $\{q^2, (q^2-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^2-1)/r, q^2\}$ *при $G = Sz(q)$, или*

(2) $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ *при $G = {}^2G_2(q)$,*

и $\Gamma(G, H, HgH)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - N_G(S)$.

Далее в § 3.1 для группы G и ее подгруппы H, определенных как в теореме 3.1 для $r = (q-1)_{2'}$, исследована шурова схема отношений группы G на множестве ее правых смежных классов по H. Оказывается, что граф некоторого базисного отношения этой схемы эквивалентен графу смежных классов из заключения теоремы 3.1 для данных G и r. Там же определены ее числа пересечений и получено доказательство дистанционной регулярности такого графа как следствие найденных свойств схемы. Эти результаты опубликованы в [69].

В § 3.2 доказана теорема 3.3, в которой классифицируются антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 с $r > 2$, которые допускают флаг-транзитивное действие группы $SU_3(q)$. Этот результат получен в работе автора диссертации [73] с применением модификации метода анализа графов смежных классов, разработанного для доказательства теоремы 3.1 в [77].

Теорема 3.3. *Предположим, что группа $G \in \{U_3(q), SU_3(q)\}$, где q — степень простого числа p, действует флаг-транзитивно на антиподальном дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с индексом антиподальности $r > 2$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и H — это подгруппа из $N_G(S)$ индекса r. Пусть g — это 2-элемент из $G - N_G(S)$ такой, что $g^2 \in H$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.*

(1) *r делит $q+1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция при четном q или элемент порядка 4 при нечетном q.*

(2) *r — нечетный делитель числа $q-1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция.*

Также в § 3.2 были найдены все допустимые q и r, при которых дистанционно регулярный граф смежных классов из заключения теоремы 3.3 существует для данной группы G.

Одним из следствий теорем 3.1 и 3.3 является предложение 3.4, доказываемое в § 3.3. В нем классифицированы графы $D_{2\cdot\chi(G)}$-инволюций группы $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, где $q = 2^n > 2$ и

$$\chi(G) = \begin{cases} 5, & \text{если } G = Sz(q) \\ 3, & \text{если } G \in \{L_2(q), U_3(q)\} \end{cases}.$$

В статье М. Джудичи и Э. Девиллерс [31] была предложена задача описания графов S_3-инволюций конечных простых групп и исследованы графы S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ (см. [31, теоремы 3.11, 3.12]). Предложение 3.4 существенно уточняет эти результаты и решает указанную задачу в случае $G = U_3(2^n)$.

Предложение 3.4. *Пусть $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, $q = 2^n > 2$ и Δ — это орбитал группы G на множестве Ω ее инволюций, содержащий точку (x_1, x_2) такую, что $[x_1, x_2] \neq 1$. Тогда граф Γ на Ω, в котором вершины y_1 и y_2 смежны тогда и только тогда, когда $(y_1, y_2) \in \Delta$, является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

(1) $\{q^3, q^3 - q^2 - q - 2, 1; 1, q^2 + q + 1, q^3\}$ *при $G = U_3(q)$,*

(2) $\{q^2, q^2 - q - 2, 1; 1, q + 1, q^2\}$ *при $G = Sz(q)$, или*

(3) $\{q, q-2, 1; 1, 1, q\}$ *при $G = L_2(q)$ (в этом случае Γ изоморфен графу Мэтона* $\mathrm{M}(q, q-1)$ *(с таким же массивом пересечений)),*

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). В частности, граф Γ изоморфен графу на Ω, в котором вершины y_1 и y_2 смежны тогда и только тогда, когда $|y_1 y_2| = \chi(G)$ (что эквивалентно тому, что $\langle y_1, y_2 \rangle \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — (единственный) класс сопряженных диэдральных подгрупп порядка $2 \cdot \chi(G)$ группы G).

Результат предложения 3.4 для групп $G = L_2(2^n)$ был ранее частично доказан в [8], но изоморфизм $\Gamma \simeq \mathrm{M}(q, q-1)$ показан именно в работе [73] автора диссертации. Отметим, что предложение 3.4 может быть полезным при исследовании других графов на классе инволюций группы G, например, ее графов π-локального слияния (см. [15]).

Далее в § 3.3 представлены некоторые похожие конструкции графов на множестве Ω неединичных элементов из центров силовских p-подгрупп группы $G \in \{^2G_2(q), U_3(q)\}$, где $q > 3$ — это степень простого нечетного числа p и $q \equiv 3 \pmod 4$, эквивалентные конструкциям дистанционно регулярных графов из теорем 3.1 и 3.3. Для каждого элемента $x \in \Omega$ пару элементов $\{x, x^{-1}\}$ будем называть *инверсной* и обозначать через $\omega(x)$. Пусть $S, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $S \neq Q$, $x \in S \cap \Omega$ и $y \in Q \cap \Omega$. Упорядоченную пару элементов (x, y) будем называть *s-отличимой*, если y — это единственный элемент из $\Omega \cap Q$ со свойством $|xy| = s$.

Предложение 3.5. *Пусть $G \in \{U_3(q), {}^2G_2(q)\}$, $q > 3$, $q \equiv 3 \pmod 4$ и Δ — орбитал группы G на Ω, содержащий точку (x_1, x_2) такую, что $[x_1, x_2] \neq 1$. Тогда граф Γ на множестве инверсных пар группы G, в котором вершины $\omega(y_1)$ и $\omega(y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда Δ содержит (y_1, y_2) или (y_1, y_2^{-1}), является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

$$\{q^3, q^3 - 2q^2 - 2q - 3, 1; 1, 2(q^2 + q + 1), q^3\}$$

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). Кроме того, если (x_1, x_2) — это s-отличимая пара, то вершины $\omega(y_1)$ и $\omega(y_2)$ смежны в Γ тогда и только тогда, когда $|y_1 y_2| = s$ или $|y_1 y_2^{-1}| = s$.

Там же показано, что для минимальных значений q группа G из предложения 3.5 обладает s-отличимой парой в случаях, когда $G = {}^2G_2(27)$ и $s = 9$ или $G = U_3(7)$ и $s \in \{3, 4, 6, 14\}$. Эти результаты **главы 3** опубликованы в статьях [77, 73].

В § 3.4 исследовано локальное строение графов Мэтона четной степени (которые ввиду предложения 3.4 являются фактор-графами графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$) и выделены несколько бесконечных серий локально Δ-графов из этого семейства графов, где Δ — это сильно регулярный граф, являющийся объединением аффинно полярных графов типа "-" (изоморфных графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$), псевдогеометрический граф для $pG_l(s, l)$ или граф ранга 3, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.

Теорема 3.6. *Пусть $q = 2^{2t} > 2$, $t \in \mathbb{N}$ и r — это неединичный делитель числа $q - 1$. Пусть $\mathrm{M}(q, r)$ — это граф Мэтона с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$ и Δ — это локальный подграф графа $\mathrm{M}(q, r)$. Тогда Δ — это реберно симметричный граф и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если r делит $2^t + 1$, то либо*

(*i*) *$r = 2^t + 1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо*

(*ii*) *$r < 2^t + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^t{+}1)(2^t{-}1)/r, ((2^t{+}1)/r{-}1)((2^t{+}1)/r{-}2){+}2^t{-}2, (2^t{+}1)/r((2^t{+}1)/r{-}1)\big).$$

(2) *Если t четно и r делит $2^{t/2} + 1$, то либо*

(*i*) *$r = 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{t/2} - 1)(2^t + 1), 2^{t/2} - 2, 2^{t/2}(2^{t/2} - 1)\big),$$

изоморфный аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$, либо

(*ii*) *$r < 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, z(2^{t/2} - 1)(2^t + 1), z(2^{t/2} - 1)(3 + z(2^{t/2} - 1)) - 2^t, z(2^{t/2} - 1)(1 + z(2^{t/2} - 1))\big),$$

являющийся объединением $z = (2^{t/2} + 1)/r$ графов, изоморфных аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$.

(3) *Если r — простой делитель числа $q - 1$, 2 — примитивный элемент по модулю r и $(r - 1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{2t} - 1)/r, (2^{2t} - 3r + 1 + \epsilon(r - 1)(r - 2)2^t)/r^2, (2^{2t} - r + 1 - \epsilon(r - 2)2^t)/r^2\big),$$

где $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.

В § 3.4 также доказана характеризуемость некоторых графов Мэтона своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Теорема 3.7. *Пусть Γ — вершинно-транзитивный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{n - 1, (r - 1)c_2, 1; 1, c_2, n - 1\}$ и $n = rc_2 + 2$ — простое число Ферма. Если число r — простое, то граф Γ изоморфен графу Мэтона (с тем же массивом пересечений).*

Эти результаты опубликованы в статье [75].

В § 3.5 исследуется вопрос о единственности реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ (существование такого графа следует из результатов § 3.2). Этот вопрос представляет отдельный интерес для последующей классификации реберно симметричных антиподальных д.р.г. диаметра 3, проводимой в **главе 4**. Так, в § 3.5 доказано предложение 3.8, характеризующее автоморфизмы простых порядков гипотетического д.р.г. с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, и с его помощью — теорема 3.9, которая дает положительное решение указанного вопроса.

Теорема 3.9. *Пусть* Γ *— реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Пусть* $U = U_3(3)$, $S, Q \in \mathrm{Syl}_3(U)$, $S \neq Q$, $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ *и* g *— это элемент порядка 4 из* $N_U(L) - L$. *Положим* $H = S\langle g^2\rangle$. *Тогда* $\Gamma \simeq \Gamma(U, H, HgH)$ *и* $G'' \simeq U$.

Этот результат опубликован в статье [80]. Все результаты **главы 3** получены автором лично.

В **главе 4** завершена классификация реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 в почти простом случае для $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$. Для этого, с учетом результатов **главы 3** и работ [6, 62] оставалось классифицировать графы Γ с $r \notin \{2, k\}$, $\lambda \neq \mu$ и $\mu > 1$. Соответствующий результат представлен в теореме 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, *где* $r \notin \{2, k\}$ *и* $\lambda \neq \mu$. *Пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ *и* G^Σ *— это группа подстановок, индуцируемая группой* G *на* Σ. *Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ *группы* G^Σ *является простой неабелевой группой. Тогда* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma) \simeq U_3(q)$ *и* G *содержит нормальную подгруппу, изоморфную группе* $U_3(q)$ *или* $SU_3(q)$, *которая действует транзитивно на дугах графа* Γ, $k = q^3$, $\mu = (q+1)(q^2-1)/r$ *и* r *делит* $q+1$.

В § 4.1 – § 4.3 теорема 4.1 доказывается при условии, что пара $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma), |\Sigma|)$ отлична от $(L_d(q), \frac{q^d-1}{q-1})$, где $d \geq 3$. В § 4.1 и § 4.2 с применением теоремы 3.3 и методов ее доказательства для $K := \mathcal{CG}(\Gamma)$ рассмотрены случаи $K = 1$ и $1 < |K| < r$ соответственно. В § 4.3 исследован случай $|K| = r$. Для доказательства теоремы 4.1 в этом случае строение группы G удается восстановить по $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ в наиболее частой ситуации, когда $|K|$ не превосходит степени минимального подстановочного представления группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ и мультипликатор Шура группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ является циклическим. При этом оказывается, что полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ в G является произведением подгруппы K и нормальной компоненты L группы G, являющейся накрывающей группой для $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$. С учетом результатов классификации минимальных подстановочных представлений конечных простых 2-транзитивных групп (см. [4, 3]) и классификации их мультипликаторов Шура (см. [2]), дальнейшие рассуждения удается свести к рассмотрению случая $\mathrm{Soc}(G^\Sigma) \simeq U_3(q)$, в котором $L \simeq U_3(q)$ или $SU_3(q)$.

Этот результат получен совместно с Махневым А.А. и Падучих Д.В. и опубликован в статье [72], при этом вклад автора диссертации решающий.

Случай $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma), |\Sigma|) = (L_d(q), \frac{q^d-1}{q-1})$, где $d \geq 3$, потребовал отдельного рассмотрения и был исключен в § 4.4. Этот результат получен совместно с Махневым А.А. с превалирующим вкладом автора диссертации и опубликован в статье [74].

В итоге, комбинация результатов **глав 3**, **4**, [62, теорема 2], [6, теорема] и [19, предложение 12.5.3] дает теорему 4.2, представленную в [81, теорема 2.4.1].

Теорема 4.2. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$*, где* $r \notin \{2,k\}$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ*. Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ *группы подстановок* G^Σ*, индуцируемой группой* G *на* Σ*, является простой неабелевой группой. Тогда* G *содержит нормальную подгруппу, накрывающую для* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$*, которая действует транзитивно на дугах графа* Γ*, и четверка* $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma),k,r,\mu)$ *одна из следующих:*

(1) $(L_2(q),q,r,\frac{q-1}{r})$*, где* $q \geq 4$*, число* r *делит* $\frac{q-1}{(2,q-1)}$ (Γ *— граф из конструкции Мэтона* [19, предложение 12.5.3])*;*

(2) $(U_3(q),q^3,r,\frac{q^3-1}{r})$*, где* $q \geq 4$*, число* r *нечетно и делит* $q-1$ (Γ *— граф из конструкции Броувера [20, предложение 12.5.4], см. также теорему 3.3*)*;*

(3) $(Sz(q),q^2,r,\frac{q^2-1}{r})$*, где* $q \geq 8$*, число* r *делит* $q-1$ (*см. теорему 3.1*)*;*

(4) $({}^2G_2(q),q^3,r,\frac{q^3-1}{r})$*, где* $q \geq 27$*, число* r *делит* $\frac{q-1}{2}$ (*см. теорему 3.1*)*;*

(5) $(U_3(q),q^3,r,\frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$*, где* $q \geq 3$*, число* r *делит* $\frac{q+1}{(2,q+1)}$ (Γ *— граф из конструкции Камерона [25, предложение 5.1], см. также теорему 3.3*)*;*

(6) $(U_3(q),q^3,r,\frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$*, где* $q \geq 3$*, число* r *делит* $q+1$*, а числа* q *и* $(q+1)/r$ *нечетны* (*см. теорему 3.3*)*;*

Для каждой фиксированной допустимой четверки $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma),k,r,\mu)$ *граф* Γ *существует и является единственным* (*с точностью до изоморфизма*)*.*

Глава 5 посвящена исследованию групп автоморфизмов графов Γ со свойством $(*)$. Мы будем говорить, что абелев недвудольный антиподальный д.р.г. Γ диаметра 3 является *минимальным* и имеет *тип* (Tx), а также обозначать его через $\Gamma(\widetilde{G},X,K)$, где $K := \mathcal{CG}(\Gamma) \leq X \leq \widetilde{G} \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$, если группа K элементарная абелева, группа $\widetilde{G}$ транзитивна на вершинах и индуцирует примитивную почти простую группу подстановок на множестве антиподальных классов с цоколем T такую, что $T \simeq X/K$ и тройка $(\widetilde{G},X,K)$ удовлетворяют условию (Tx) из следущего списка:

(T1) либо (i) $X = K \times X'$ и $X' \simeq T$, либо (ii) X — квазипростая группа с центром K;

(T2) T действует точно на K.

В § 5.1 доказывается предложение 5.1, которое позволяет свести классификацию абелевых графов Γ со свойством $(*)$ к рассмотрению соответствующих им минимальных графов. В § 5.2 устанавливаются некоторые общие свойства абелевых графов Γ со свойством $(*)$ при условии $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$ и доказывается теорема 5.3, которая дает ограничения на спектр и параметры графа Γ, множество вершин или ребер которого допускает некоторые равномерные разбиения на орбиты подгрупп из G. § 5.3 посвящен описанию минимальных абелевых графов Γ со свойством $(*)$ при условии, что $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$ (предложения 5.4 и 5.6). Сначала в § 5.3 доказывается, что если полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ в G не является квазипростой группой, то выполнено хотя бы одно из следующих утверждений: (i) Γ имеет вершинно-транзитивную группу автоморфизмов, изоморфную группе $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$, (ii) Γ является графом Тейлора (и его параметры k, r и μ могут быть выражены при помощи параметров графов ранга 3, ассоциированных с G^Σ), (iii) $\mathrm{rk}(\mathrm{Soc}(G^\Sigma)) > 3$, (iv) степень $\mathrm{d}_{\min}(\mathrm{Soc}(G^\Sigma))$ минимального подстановочного представления группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ не превосходит числа r. Вместе с тем приводится ряд примеров минимальных графов $\Gamma(G, X, K)$ типа (T1). Затем уточняется строение группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$, а также параметры и спектр графа Γ при условии, что группа G квазипроста. Поскольку перечисленные результаты слишком многочисленны и требуют введения объемных технических определений, мы ограничимся лишь изложением основных следствий из них, полученных в диссертации. Так, с применением методов исследования абелевых антиподальных д.р.г. диаметра 3, предложенных в § 5.1 – § 5.3, в заключительном § 5.4 классифицированы абелевы графы Γ со свойством $(*)$ при условии, что $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$ и $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ является спорадической простой группой (теорема 5.7 и следствие 5.9). Сформулируем основные утверждения из § 5.4.

Теорема 5.7. *Предположим, что* $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, X, K)$ *является абелевым минимальным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ *и* $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma)$ *— спорадическая простая группа. Тогда* $K = Z(X)$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

$(S1)$ X' *действует интранзитивно на вершинах графа* Γ, $\widetilde{G} = X$, $X' \simeq M_{22}$, $k = 175$, $r = 2$, Γ *— дистанционно-транзитивный граф Тейлора с* $\mu \in \{72, 102\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Gamma) = HiS \times K$*;*

$(S2)$ X *— квазипростая группа,* $r = 2$ *и либо* $X = Z_2.M_{22}$, $k = 175$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$, *либо* $X = Z_2.Fi_{22}$, $k = 3509$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{1600, 1908\}$.

Граф Тейлора из п. $(S1)$ заключения теоремы 5.7 существует, известен и для каждого фиксированного набора параметров k, r и μ является единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с таким массивом пересечений (см., например, [36]). Существование графов Тейлора из п. $(S2)$ заключения теоремы 5.7, равно как и накрытий, описываемых далее в следствии 5.9, неизвестно.

Следствие 5.9. *Предположим, что* Γ *является абелевым недвудольным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ *со свойством* $(*)$ *и* $T := \mathrm{Soc}(\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma)$ *— спорадическая простая группа ранга* 3*. Тогда* Γ *является* $(r/2)$*-накрытием гра-*

фа Тейлора из п. $(S2)$ *заключения теоремы 5.7 и либо* $T \simeq M_{22}$, $k = 175$ *и* $r\mu/2 \in \{72, 102\}$, *либо* $T \simeq Fi_{22}$, $k = 3509$ *и* $r\mu/2 \in \{1600, 1908\}$.

Результаты **главы 5** получены автором лично и опубликованы в статье [66].

Глава 6 посвящена классификации реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, а также исследованию групп автоморфизмов антиподальных плотных графов диаметра 4 и их локальных подграфов.

В § 6.1 исследуются реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которых индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном, и доказывается

Теорема 6.1. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4, антиподальное частное* $\bar{\Gamma}$ *которого изоморфно графу эрмитовых форм* $\mathrm{Herm}(2, q^2)$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *индуцирует группу ранга 3 на* $\bar{\Gamma}$, *то* Γ *— один из следующих графов:*

(1) *граф Уэлса* (*2-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 2^2)$ *с параметрами* $(16, 5, 0, 2)$)*;*

(2) *граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея* (*3-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 3^2)$ *с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$)*.*

Теорема 6.1 получена в неразделимом соавторстве с Махневым А.А. и Падучих Д.В. и опубликована в статье [78].

Последующие § 6.2, § 6.3 и § 6.4 посвящены исследованию групп автоморфизмов $AT4(p, p+2, r)$-графов. В § 6.2 исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big)$, получены ограничения на простой спектр группы автоморфизмов $AT4(p, p+2, r)$-графа, и доказаны теорема 6.2 и следствие 6.3. Далее для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей. Простой спектр $\pi(|G|)$ конечной группы G кратко обозначается через $\pi(G)$.

Теорема 6.2. *Пусть* Γ *—* $AT4(p, p+2, r)$*-граф,* $\{a, b\}$ *— его ребро и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* G_a *действует точно как на* $\Gamma_1(a)$, *так и на* $\Gamma_2(a)$, *и если* p *— степень простого числа,* $p > 2$, *то* $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2, 3, ..., p\}$.

Следствие 6.3. *Предположим, что* Γ *— это реберно симметричный* $AT4(p, p+2, r)$*-граф, где* p *— степень простого числа,* $p > 2$, *и пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $\pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big) \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, ..., p\} \cup \pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big)$. *Если к тому же числа* $p+2$ *и* p^2+4p+2 *— простые, то для любой вершины* a *графа* Γ *группа* G_a *почти проста.*

Следствие 6.3 позволяет определить строение допустимых групп автоморфизмов реберно симметричных $AT4(p, p+2, r)$-графов для простых чисел $p+2$ и p^2+4p+2, не превосходящих 1000, в случае, если p — степень простого числа. С его помощью и на основе классификации [65] конечных простых групп, максимальный элемент простого спектра которых не превосходит 1000, в § 6.2 установлено, что справедлива

Теорема 6.4. $AT4(p, p+2, r)$*-графы с* $p \in \{11, 17, 27\}$ *не являются реберно симметричными.*

Эти результаты получены автором лично и опубликованы в статье [67].

В [7] получено описание наборов допустимых параметров АТ4$(p, p+2, r)$-графов небольшой степени. В частности, в [7, теорема 3] показано, что $r \in \{3, 6\}$ в случае $p = 5$ и $r \in \{4, 8\}$ в случае $p = 7$. В § 6.3 – § 6.4 исследуются группы автоморфизмов гипотетических АТ4$(p, p+2, r)$-графов и их локальных подграфов для $p \in \{5, 7\}$.

Теорема 6.5. *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\},$$

$r \in \{3, 6\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$ *и группа* G *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Теорема 6.6. *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\},$$

$r \in \{4, 8\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 79\}$ *и группа* G *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Каждый локальный подграф АТ4$(p, p+2, r)$-графа сильно регулярен с параметрами $(329, 40, 3, 5)$ при $p = 5$ или с параметрами $(711, 70, 5, 7)$ при $p = 7$. Оба этих набора параметров входят в список Броувера [23] параметров небольших сильно регулярных графов, вопрос существования которых до сих пор остается нерешенным. В **главе 6** доказаны следующие две теоремы.

Теорема 6.7. *Пусть* Θ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(329, 40, 3, 5)$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Theta)$ *интранзитивна на вершинах графа* Θ *и* $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$.

Теорема 6.8. *Пусть* Θ *— это сильно регулярный граф с параметрами* $(711, 70, 5, 7)$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Theta)$ *интранзитивна на вершинах графа* Θ *и* $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$.

Эти результаты получены автором лично и опубликованы в статьях [70, 71].

Благодарности. Автор признателен своему научному консультанту А.А. Махневу и своему соавтору Д.В. Падучих за внимание к работе и сотрудничество. Автор выражает благодарность В.И. Трофимову, А.В. Васильеву, А.С. Кондратьеву, Д.О. Ревину и В.В. Кабанову за обсуждения результатов работы и ряд ценных замечаний. Автор также благодарен всем сотрудникам отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН за благоприятную творческую атмосферу, в которой была выполнена диссертация.

Список литературы

[1] Баннаи Э., Ито Т. *Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений* // Под ред. Ю.И. Журавлева, А.И. Кострикина. - М. : Мир, 1987. - 373 с.

[2] Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, М., Мир, 1985.

[3] Мазуров В.Д. *Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона* // Алгебра и логика. 1988. Т.27, № 5. С. 562–580.

[4] Мазуров В.Д. *Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы* // Алгебра и логика. 1993, Т.32, № 3, 267–287.

[5] Махнев А. А., Падучих Д.В. *Об автоморфизмах графа Ашбахера* // Алгебра и логика. 2001. V.40, № 2. P. 69–74.

[6] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$* // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С.237–246.

[7] Махнев А.А., Падучих Д.В. *Небольшие* АТ4*-графы и отвечающие им сильно регулярные подграфы* // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 220–230.

[8] Мухаметьянов И.Т. *Графы на классе сопряженных инволюций группы* $L_2(2^m)$ // Научн. обозр. 2013. № 5, P. 133–139.

[9] Alfuraidan M.R. *Antipodal distance transitive covers with primitive quotient diameter two* // Discrete Math. 2013, V. 313. P. 2409-2422.

[10] Alfuraidan M.R., Hall J.I. *Smith's theorem and a characterization of the 6-cube as distance-transitive graph* // J. Algebr. Comb. 2006, V. 24. P. 195–207.

[11] Alfuraidan M.R., Hall J.I. *Imprimitive distance-transitive graphs with primitive core of diameter at least 3* // Mich. Math. J. 2009. V.58. P. 31–77.

[12] Alfuraidan M.R., Hall J.I., Laradji A. *Antipodal covers of distance-transitive generalized polygons* // J. Algebr. Comb. 2018. V.48. P. 607–626.

[13] Aschbacher M. *The non-existence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57* // J. Algebra. 1971. V.19. P. 538-540.

[14] Bannai E., Bannai E., Ito T. Tanaka R. *Algebraic Combinatorics* // Series in Discrete Mathematics and Applications, 5. De Gruyter, 2021.

[15] Ballantyne J., Local fusion graphs of finite groups, Doctoral thesis, Manchester Inst. for Math. Sci., The University of Manchester, 2011.

[16] Bending T., Fon-Der-Flaass D.*Crooked functions, bent functions, and distance regular graphs* // Elect. J. Combin. 1998. V.5. R34.

[17] Biggs N.L. *Intersection matrices for linear graphs* // Combinatorial Mathematics and its applications (Proc. Oxford 7-10 July 1969) Acad. Press, London 1971, P. 15–23.

[18] Bosma W., Cannon J., Playoust C. *The Magma algebra system. I. The user language* // J. Symbolic Comput. 1997. V.24. P. 235–265.

[19] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*, Berlin etc: Springer-Verlag — 1989. 494 p.

[20] Brouwer A.E. *Corrections and additions to the book "Distance-regular graphs"*, manuscript. URL: http://www.win.tue.nl/~ aeb/drg/index.html.

[21] Brouwer A.E., van Bon J.T.M. *The distance-regular antipodal covers of classical distance-regular graphs* // Combinatorics (Eger, 1987), in: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, V.52, North-Holland Amsterdam, 1988. P. 141–166.

[22] Brouwer A.E., Koolen J.H., Klin M.H. *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph* // Discrete Math. 2003. V.264, № 1-3. P. 13–24.

[23] Brouwer A.E. *Parameters of strongly regular graphs* // URL: http://www.win.tue.nl/~ aeb/graphs/srg/srgtab.html

[24] Brouwer A.E., van Maldeghem H. *Strongly regular graphs* // Cambridge University Press, 2022.

[25] Cameron P.J. *Covers of graphs and EGQs* // Discrete Math. 1991. V.97, № 1-3. P. 83–92.

[26] Cameron P.J. *Permutation groups* // London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999.

[27] Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R. *Atlas of finite groups* // Oxford: Clarendon Press, 1985.

[28] de Caen D., Mathon R., Moorhouse G.E. *A family of antipodal distance-regular graphs related to the classical Preparata codes* // J. Algebr. Comb. 1995. V.4. P. 317–327.

[29] de Caen D., Fon-Der-Flaass D. *Distance regular covers of complete graphs from Latin squares* // Des. Cod. Crypt. 2005. V.34. P. 149–153.

[30] Delsarte P. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Rep. Suppl. 10. 1973.

[31] Devillers A., Giudici M. *Involution graphs where the product of two adjacent vertices has order three* // J. Aust. Math. Soc. 2008. V.85. P. 305–322.

[32] Devillers A., Giudici M., Li C.H., Pearce G., Praeger Ch.E. *On imprimitive rank 3 permutation groups* // J. London Math. Soc. 2011. V.84. P. 649–669.

[33] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8, 2015.

[34] Gardiner A. *Antipodal covering graphs* // J. Comb. Theory B. 1974. V.16. P. 255–273.

[35] Gardiner A. *Distance-transitive antipodal covers: the extremal case* // Discrete Math. 1994. V.134. P. 63–64.

[36] Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E. *Antipodal distance transitive covers of complete graphs* // Europ. J. Comb. 1998. V.19, № 4. P. 455–478.

[37] Godsil C.D., Hensel A.D. *Distance regular covers of the complete graph* // J. Comb. Theory Ser. B. 1992. V.56. P. 205–238.

[38] Fujisaki T., Koolen J.H., Tagamoto M. *Some properties of the twisted Grassmann graphs* // Innovations in Incidence Geometry. 2006. V.3, № 1. P. 81–87.

[39] Higman D.G. *Intersection matrices for finite permutation groups* // J. Algebra. 1967. V.6. P.22–42.

[40] Hering Ch. *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order* // Geom. Dedicata. 1974. V.2. P. 425–460.

[41] Huppert B. *Zweifach transitive, auflosbare Permutationsgruppen* // Math. Z. 1957. V.68. P. 126–150.

[42] Huppert B., Blackburn N. *Finite groups III* // New York: Springer-Verlag, 1982.

[43] Ivanov A.A., Liebler R.A., Penttila T., Praeger C.E. *Antipodal distance transitive covers of complete bipartite graphs* // Europ. J. Comb. 1997. V.18. P. 11–33.

[44] Ivanov A.A. *Distance-transitive graphs and their classification.* In: Faradžev I.A., Ivanov A.A., Klin M.H., Woldar A.J. (eds) Investigations in algebraic theory of combinatorial objects. Mathematics and its applications (Soviet series), V.84. Springer, Dordrecht, 1994.

[45] Jurišić A., Koolen J.H., Terwilliger P. *Tight distance-regular graphs* // J. Algebr. Comb. 2000. V. 12. P. 163–197.

[46] Jurišić A., Koolen J. *Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4* // Discrete Math. 2002. V.244. P. 181–202.

[47] Jurišić A. AT4 *family and 2-homogeneous graphs* // Discrete Math. 2003. V.264. P. 127–148.

[48] Jurišić A., Koolen J. *Classification of the family* $\mathrm{AT4}(qs, q, q)$ *of antipodal tight graphs* // J. Comb. Theory, Ser. A. 2011. V.118, № 3. P. 842–852

[49] Klin M., Pech Ch. *A new construction of antipodal distance-regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices* // Ars Math. Contemp. 2011. V.4. P. 205–243.

[50] Mathon R. *Lower bounds for Ramsey numbers and association schemes* // J. Comb. Theory Ser. B. 1987. V.42. P. 122–127.

[51] Norton S.P. *On the group* Fi_{24} // In: Aschbacher M., Cohen A.M., Kantor W.M. (eds) Geometries and Groups. Springer, Dordrecht. 1988. P. 483–501.

[52] Payne S.E. *The generalized quadrangle with* $(s; t) = (3; 5)$ // Proceedings of the Twenty-First Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, FL, 1990, Congr. Numer. 1990. V.77. P. 5–29.

[53] Smith D.H. *Primitive and imprimitive graphs* // Quart. J. Math. Oxford. 1971. V.22. P. 551–557.

[54] Smith S.D. *Nonassociative commutative algebras for triple covers of 3-transposition groups* // Mich. Math. J. 1977. V.24. P. 273-287.

[55] Sims C.C. *Graphs and finite permutation groups* // Math. Z. 1967. V.95. P. 76–86.

[56] Sabidussi G. *Vertex-transitive graphs* // Monatsh. Math. 1964. V.68, P. 426–438.

[57] Soicher L.H. *Three new distance-regular graphs* // Europ. J. Combin. 1993. V.14. P. 501-505.

[58] Suzuki M. *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent* // Ann. Math., Sec. Ser. 1964. V.80, № 1, P. 58–77.

[59] Taylor D.E. *Two-graphs and doubly transitive groups* // J. Comb. Theory Ser. A. 1992. V.61. P. 113–122.

[60] Tits J. *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent* // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1959. V.2. P. 14–60.

[61] Tsiovkina L. Yu. *A new construction of Deza graphs through* π*-local fusion graphs of finite simple groups of Lie-type of even characteristic* // preprint arXiv:2009.11788 [math.CO].

[62] Tsiovkina L. Yu. *On a class of edge-transitive distance-regular antipodal covers of complete graphs* // Ural Math. J. 2021. V.7, № 2. P. 136–158.

[63] van Bon J. *Finite primitive distance-transitive graphs* // Europ. J. Comb. 2007. V.28, № 2. P. 517–532.

[64] van Dam E.R., Koolen J.H., Tanaka H. *Distance-regular graphs* // Electr. J. Combin. 2016. DS22.

[65] Zavarnitsine A.V. *Finite simple groups with narrow prime spectrum* // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. V.6. P. 1–12.

Работы автора по теме диссертации

[66] Циовкина Л.Ю. *Об одном классе вершинно-транзитивных дистанционно регулярных накрытий полных графов* // Сиб. электр. матем. изв. 2021. Т.18, № 2. С. 758–781.

[67] Циовкина Л.Ю. *О простом спектре группы автоморфизмов* AT4$(p, p+2, r)$*-графа* // Алгебра и анализ. 2020. Т.32, № 5, С. 130–144 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *The prime spectrum of an automorphism group of an* AT4$(p, p+2, r)$*-graph* // St. Petersb. Math. J. 2020. V.32, № 5. P. 917–928).

[68] Циовкина Л.Ю. *Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в аффинном случае* // Сиб. электр. матем. изв. 2020. Т.17. С. 445–495.

[69] Циовкина Л.Ю. *Некоторые шуровы схемы отношений, связанные с группами Судзуки и Ри* // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т.25, № 4, С. 249–254.

[70] Циовкина Л.Ю. *О группе автоморфизмов антиподального плотного графа диаметра* 4 *с параметрами* $(5, 7, r)$ // Матем. заметки. 2019. Т.105, № 1, С. 123–135 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On the automorphism group of an antipodal tight graph of diameter 4 with parameters* $(5, 7, r)$ // Math. Notes. 2019. V.105, № 1-2. P. 104–114).

[71] Циовкина Л.Ю. *О группах автоморфизмов* $AT4(7, 9, r)$*-графов и их локальных подграфов* // Труды ИММ УрО РАН 2018. Т.24, № 3. С. 263–271 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On automorphism groups of* $AT4(7, 9, r)$*-graphs and of their local subgraphs* // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. V.307, Suppl. 1. S151–S158).

[72] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия полных графов: почти простой случай* // Алгебра и логика. 2018. Т.57, № 2. С. 214–231 (переводная версия: Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Tsiovkina L.Yu. *Edge-symmetric distance-regular coverings of complete graphs: the almost simple case* // Algebra and Logic. 2018. V.57, № 2. P. 141–152).

[73] Tsiovkina L.Yu. *Arc-transitive antipodal distance-regular covers of complete graphs related to* $SU_3(q)$ // Discrete Math. 2017. V.340, № 2. P. 63–71.

[74] Makhnev A.A., Tsiovkina L.Yu. *Arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three related to* $PSL_d(q)$ // Sib. Electr. Math. Rep., Special issue: Graphs and Groups, Spectra and Symmetries — G2S2 2016. 2016. V.13. P. 1339–1345.

[75] Циовкина Л.Ю. *О локальном строении дистанционно-регулярных графов Мэтона* // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т.22, № 3. С. 293–298 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On the local structure of distance-regular Mathon graphs* // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V.299, Suppl. 1. S225–S230).

[76] Циовкина Л.Ю. *Об аффинных дистанционно регулярных накрытиях полных графов* // Сиб. электр. матем. изв. 2015. Т.12. С. 998–1005.

[77] Tsiovkina L.Yu. *Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$* // J. Algebr. Comb. 2015. V.41, № 4. P. 1079–1087.

[78] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Антиподальные дистанционно-регулярные накрытия графов эрмитовых форм* $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ // Доклады Академии наук. 2015. Т.462, № 3. С. 268–273.

[79] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: аффинный случай* // Сиб. матем. журнал. 2013. Т.54, № 6. С. 1353–1367.

[80] Циовкина Л.Ю. *Об автоморфизмах графа с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т.10. С.689–698.

[81] Махнев А.А., Циовкина Л.Ю. *Антиподальные дистанционно регулярные графы и их автоморфизмы* // А.А. Махнев, Л.Ю. Циовкина; Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. — Новосибирск : СО РАН, 2018. – 196 с.

Подписано в печать 16.02.2022. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2.
Заказ № 7334. Тираж 100 экз.
Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
г. Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2
Тел.:+7 (343) 362-91-16, 362-91-17