На правах рукописи

Чуриков Дмитрий Владимирович

О ЗАМЫКАНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Новосибирск — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Васильев Андрей Викторович.

Официальные оппоненты:
Маслова Наталья Владимировна,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Шпекторов Сергей Викторович,
кандидат физико-математических наук,
университет Бирмингема, Великобритания, профессор чистой математики

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова»

Защита диссертации состоится _______________ в __:__ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте `http://math.nsc.ru`.

Автореферат разослан __________ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Стукачев Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Постановка задачи и цели исследования. Теория групп подстановок — один из старейших разделов абстрактной алгебры, восходящий к классическим работам Э. Галуа и К. Жордана. Современный интерес к этой теории связан во многом с комбинаторикой и теорией сложности, поскольку группы подстановок естественно возникают как группы автоморфизмов комбинаторных структур, а вопрос об изоморфизме последних зачастую сводится к вопросу о поиске их полных групп автоморфизмов. Если P — k-арная комбинаторная структура множества Ω (можно считать, что P — разбиение множества Ω^k), то группа $\mathrm{Aut}(P)$ ее автоморфизмов, состоит из тех подстановок множества Ω, которые сохраняют классы разбиения P:

$$\mathrm{Aut}(P) = \{g \in \mathrm{Sym}(\Omega) : O^g = O, O \in P\}.$$

В настоящей диссертации, следуя Х. Виланду [42], мы рассматриваем комбинаторные структуры, инвариантные относительно заданных групп подстановок. Здесь естественно возникают понятия k-орбиты и k-замыкания группы подстановок, введенные Х. Виландом в 1969 году [42]. Если G — группа подстановок множества Ω, и k — натуральное число, то G покомпонетно действует на декартову степень Ω^k множества Ω:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^g = (\alpha_1^g, \ldots, \alpha_k^g) \text{ для всех } g \in G, (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \Omega^k.$$

Множество орбит этого действия, элементы которого называются *k-орбитами* группы G, обозначим через $\mathrm{Orb}_k(G)$. Легко понять, что k-орбиты группы G — это G-инвариантные отношения на множестве Ω^k.

Как показано выше, любой k-арной комбинаторной структуре соответствует некоторая группа подстановок, и наоборот, любая группа подстановок соответствует некоторой k-арной комбинаторной структуре. Это соответствие является соответствием Галуа и выражается следующими включениями

$$G \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}_k(G)), \text{ и } P \leq \mathrm{Orb}_k(\mathrm{Aut}(P)). \quad (1)$$

Группа $G^{(k)} = \mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}_k(G))$ называется *k-замыканием* группы G. Эквивалентно, k-замыкание группы G — это наибольшая по включению подгруппа в симметрической группе $\mathrm{Sym}(\Omega)$ с такими же k-орбитами, что и у G. Общая проблема, которая изучается в диссертации формулируется следующим образом.

Проблема k-замыкания. Для группы G подстановок конечного множества и целого положительного числа k найти k-замыкание $G^{(k)}$ группы G.

С теоретической точки зрения, k-замыкания группы подстановок можно рассматривать как ее последовательные аппроксимации, поскольку они связаны следующими включениями [42, теорема 5.8]:

$$G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq G^{(3)} \geq \ldots G^{(n)} = G^{(n+1)} = \ldots = G,$$

где ряд очевидно стабилизируется не позднее шага $n = |\Omega|$.

Несложно понять, что k-замыкание k-транзитивной группы подстановок множества Ω — это вся симметрическая группа $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Поэтому 1-замыкание есть прямое произведение симметрических групп, действующих на орбитах исходной группы, и в этом смысле имеет прозрачную структуру, но может оказаться очень далеким от исходной группы. Следующий вопрос, поднятый Х. Виландом в [42], гораздо нетривиальнее: какие классы групп замкнуты относительно k-замыкания при $k \geq 2$? Сам Х. Виланд показал, что классы конечных абелевых групп, p-групп и групп нечетного порядка замкнуты относительно k-замыкания при $k \geq 2$. Хотя 2-замыкание разрешимой группы не обязано быть разрешимым (достаточно взять разрешимую 2-транзитивную группу степени не меньше 5), совсем недавно в [29] было доказано, что класс разрешимых групп замкнут относительно k-замыкания при $k \geq 3$. В диссертации рассматривается вопрос о замкнутости класса нильпотентных групп относительно k-замыкания при $k \geq 2$.

Поскольку k-замыкание является оператором алгебраического замыкания, то естественно взглянуть на k-*замкнутые* группы, т. е. группы, совпадающие со своим k-замыканием. В диссертации мы изучаем условия k-замкнутости абелевых групп. В особенности нас интересует вопрос о критерии 2-замкнутости абелевых групп подстановок, который бы допускал эффективную алгоритмическую проверку.

Отметим, что недавно Д. Холт предложил подход, при котором понятие k-замкнутости переносится на абстрактные группы. В соответствии с ним абстрактная группа называется вполне k-замкнутой, если все ее точные подстановочные представления k-замкнуты [18]. В диссертации рассматриваются необходимые и достаточные условия вполне k-замкнутости конечных абелевых групп.

С точки зрения теории вычислительной сложности, наиболее важной является проблема 2-замыкания, которая эквивалентна проблеме нахождения группы автоморфизмов некоторого графа исходной группы. Действительно, пару $\Gamma = (\Omega, \mathrm{Orb}_2(G))$ можно рассматривать как цветной полный граф на множестве вершин Ω, где каждой 2-орбите группы G соответствует свой цвет. Тогда группа $G^{(2)}$ является полной группой автоморфизмов этого графа. Граф Γ называется *цветной шуровой когерентной конфигурацией*, ассоциированной с G. Для краткости мы назовем эту конфигурацию *схемой* группы G и обозначим через $\mathrm{Inv}(G)$. В этих обозначениях соответствие Галуа из (1) записывается следующим образом

$$G \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Inv}(G)) \text{ и } \Gamma \leq \mathrm{Inv}(\mathrm{Aut}(\Gamma))$$

(в случае $k = 2$). Замкнутые относительно этого соответствия объекты — это в точности 2-замкнутые группы подстановок, и *шуровы когерентные конфигурации* — когерентные конфигурации множества Ω, удовлетворяющие условию $\Gamma = \Gamma^{(2)}$, где $\Gamma^{(2)} = \mathrm{Inv}(\mathrm{Aut}(\Gamma))$.

Указанное соответствие Галуа приводит к двум естественным задачам: задаче нахождения 2-орбит группы автоморфизмов произвольной цветной когерентной конфигурации, т.е. по Γ найти $\Gamma^{(2)}$, и проблеме 2-замыкания, т.е. по G найти $G^{(2)}$. Хорошо известно, что первая из этих задач полиномиально эквивалентна общей проблеме изоморфизма графов, а вторая, очевидно, полиномиально к ней сводится. В частности, по модулю недавнего прорывного результата Л. Бабаи [9] это означает, что обе проблемы могут быть решены за квазиполиномиальное от размера множества Ω время. В то же время семейство групп, для которых известны полиномиальные алгоритмы нахождения 2-замыкания, достаточно ограничено. В диссертации изучается алгоритмическая сложность вычисления 2-замыкания $\frac{3}{2}$-транзитивной группы подстановок и проверки изоморфизма цветных шуровых $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций (точные определения см. ниже).

Среди шуровых $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций отдельный интерес представляют так называемые циклотомические схемы над конечными почти-полями. Если $\mathbb{K}$ — конечное почти-поле, и K — собственная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{K}^{\times}$, то группа $G = \mathbb{K}^{+} \rtimes K$ — $\frac{3}{2}$-транзитивная группа Фробениуса, и когерентная конфигурация $\mathrm{Inv}(G)$ называется циклотомической схемой над почти-полем $\mathbb{K}$ с базисной группой K. Впервые такие схемы изучались в работе Дж. Багеряна, И. Н. Пономаренко и А. Рахнама Барги [12]. В диссертации изучается высказанная в этой статье гипотеза о том, что за конечным числом исключений группы автоморфизмов циклотомических схем над почти-полями, т.е. 2-замыкания соответствующих групп Фробениуса, содержатся в одномерных полулинейных аффинных группах.

Степень разработанности и актуальность темы исследования. Основы теории k-замыканий были заложены Х. Виландом в 1969 году [42]. К теоретическим результатам про k-замыкания относятся теорема Л. А. Калужнина и М. Х. Клина 1976 года про k-замыкания импримитивных сплетений групп подстановок [3], результаты М. Либека, Ш. Прегер и Я. Саксла про цоколи k-замыканий примитивных групп [27, 33] и недавний результат Э. А. О'Брайена, А. В. Васильева, Е. П. Вдовина и И. Н. Пономаренко о разрешимости 3-замыкания конечной разрешимой группы [29]. Алгоритмическая постановка проблемы 2-замыкания возникла впервые в работе [35] И. Н. Пономаренко 1994 года, в которой было доказано существование полиномиального от степени группы алгоритма, решающего эту проблему в классе нильпотентных групп. Позднее аналогичные результаты были получены им для групп нечетного порядка [20] в соавторстве с С. А. Евдокимовым и для сверхразрешимых групп [36] в соавторстве с А. В. Васильевым.

Х. Виланд заметил, что класс конечных абелевых групп замкнут относительно k-замыкания при $k \geq 2$. А. З. Зеликовский изучал проблему графичности группы подстановок и в своей статье 1989 года предложил, как оказалось, ошибочный критерий 2-замкнутости абелевых групп [2]. Ошибку недавно отметили М. Грех и А. Киселевич [22], которые тоже изучали проблему графичности и в результате серии работ [22–24] установили критерий 2-замкнутости конечных абелевых групп в терминах теории графов, который, к сожалению, сложно проверить алгоритмически.

Понятие вполне k-замкнутости было недавно предложено Д. Холтом в [18]. Первый результат по этой тематике получен А. Абдоллахи и М. Арезумандом. Они описали все вполне 2-замкнутые конечные нильпотентные группы [6]. Позже эти авторы вместе с Г. Трэйси получили аналогичный результат для конечных разрешимых групп [7]. Вполне 2-замкнутые конечные группы с тривиальной подгруппой Фиттинга были недавно классифицированы М. Арезумандом, М. Иранманешем, Ш. Э. Прегер и Г. Трэйси [8].

$\frac{3}{2}$-Транзитивные группы были введены Х. Виландом в монографии 1964 года [41]. Напомним, что группа G называется $\frac{3}{2}$-*транзитивной*, если она транзитивна и орбиты стабилизатора G_α точки α на множестве $\Omega \setminus \{\alpha\}$ имеют одинаковую неединичную длину. $\frac{3}{2}$-Транзитивные группы естественно возникают как нормальные подгруппы дважды транзитивных групп. Примерами таких групп являются группы Фробениуса и группы автоморфизмов циклотомических схем над конечными полями [10, 16] и почти-полями [12, 44]. Основы теории $\frac{3}{2}$-транзитивных групп были заложены Х. Виландом [41], который показал, что каждая $\frac{3}{2}$-транзитивная группа примитивна или является группой Фробениуса. Далее Пассман классифицировал разрешимые группы из этого класса [30–32]. Почти простые $\frac{3}{2}$-транзитивные группы были описаны в [13], а окончательно классификация $\frac{3}{2}$-транзитивных групп была завершена совсем недавно в [21, 26].

Циклотомические схемы были введены Ф. Дельсартом в связи с проблемами теории кодирования и изначально определены над конечными полями [16]. Из основного результата [28] следует, что группы автоморфизмов таких схем содержатся в одномерных полулинйеных аффинных группах. Дж. Багерян, И. Н. Пономаренко и А. Рахнама Барги предложили рассматривать циклотомические схемы над конечными почти-полями и указали некоторое достаточное условие вложения группы автоморфизмов такой схемы в одномерную полулинейную аффинную группу. [12].

Теория когерентных конфигураций, методы которой используются при изучении k-замыканий, идейно восходит к методу колец Шура, предложенному И. Шуром и разработанному Х. Виландом в той же монографии 1964 года [41]. В отечественной науке конструкции, близкие к когерентным конфигурациям, были предложены Б. Ю. Вейсфейлером и А. А. Леманом в статье 1968 года [1]. Современное определение когерентной конфигурации было сформулировано в классической работе Д. Хигмана 1970 года [25]. Текущее состояние теории когерентных конфигураций отражено в монографии Г. Чена и И. Н. Пономаренко [15].

Основные результаты диссертации

1. Показано, что k-замыкание конечной нильпотентной группы подстановок есть прямое произведение k-замыканий ее силовских подгрупп при любом $k \geq 2$.

2. Найден допускающий эффективную алгоритмическую проверку индуктивный критерий 2-замкнутости конечных абелевых групп с циклическими транзитивными составляющими (теорема 4).

3. Получен критерий вполне замкнутости конечных абелевых групп. Доказано, что нетривиальная конечная абелева группа, раскладывающаяся в произведение n инвариантных множителей, вполне $(n + 1)$-замкнута, но не вполне n-замкнута (теорема 6).

4. Найдены полиномиальные алгоритмы поиска 2-замыканий $\frac{3}{2}$-транзитивных групп подстановок и решения проблемы изоморфиз-

ма цветных шуровых $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций (теоремы 7 и 8).

Первый результат получен автором лично [47]. Второй результат получен в неразделимом соавторстве с И. Н. Пономаренко [48], третий — с Ш. Э. Прегер [46], четвертый — с А. В. Васильевым [45].

Научная новизна и значимость работы. Работа носит теоретический характер. Все полученные результаты являются новыми. Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории групп, алгебраической комбинаторике и теории сложности, а также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Методы исследования. В диссертации используются классические методы теории групп [4] и особенно теории групп подстановок [5, 17, 41] и их замыканий [42]. Изучение $\frac{3}{2}$-транзитивных групп базируется на классификации $\frac{3}{2}$-транзитивных групп подстановок и $\frac{1}{2}$-транзитивных линейных групп [26], которая, в свою очередь, опирается на классификацию конечных простых групп.

В диссертации существенно используются методы теории когерентных конфигураций и ассоциативных схем [11, 15, 19], а также теория конечных почти-полей [39, 43] и циклотомических схем над ними [12].

При решении проблем вычислительной сложности используется хорошо известный инструментарий полиномиальных алгоритмов для групп подстановок [38]. Основную роль же играет алгоритм Вейсфейлера-Лемана [1, 40] и различные его модификации [34], в том числе разработанные автором диссертации.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018, 2020), Международной конференции «Symmetry vs. Regularity» (Пльзень, Чехия, 2018), Международной школе-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (Новосибирск, 2016, 2018), Международной конференции «Graphs and Groups, Spectra and Symmetries» (Новосибирск, 2016), Международной конференции «Workshop on Group Theory and Algebraic Combinatorics» (Новосибирск, 2017), Международной конференции «The 4th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications» (Новосибирск, 2021), Международной конференции «Graphs and Groups, Geometries and GAP» (Рогла, Словения, 2021), Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021), а также обсуждались на семинарах «Алгебра и логика» и «Теория групп» Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета.

Публикации. Результаты работы опубликованы в [44–53]. Основные результаты диссертации опубликованы в [45–48] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, приложения, заключения и списка литературы. Она изложена на 59 страницах и включает 3 таблицы. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Результаты диссертации сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные леммы имеют тройную нумерацию: номер главы, номер параграфа в главе и номер утверждения в текущем параграфе. Формулы имеют двойную нумерацию: номер главы и номер формулы внутри главы. Список литературы содержит 60 наименований. Работы автора по теме диссертации приведены отдельным списком.

Основное содержание диссертации

Во **введении** приводятся постановка и описание задачи, аргументируется актуальность темы исследования и описывается степень ее проработанности. Представлены основные результаты диссертации и методы, применяемые в исследовании. Также отражается теоретическая значимость и новизна полученных результатов. В конце размещены данные об апробации и публикации полученных результатов, а также краткое содержание диссертации.

В **первой главе** размещены основные определения и вспомогательные утверждения по k-замыканиям групп подстановок, $\frac{3}{2}$-транзитивным группам, когерентным конфигурациям, циклотомическим схемам над конечными почти-полями и алгоритму Вейсфейлера-Лемана. Отдельно отметим следующее полезное утверждение о связи k-замыкания и прямого произведения групп, которое, насколько известно автору, ранее нигде не было доказано явно.

Лемма 1.1.7. *Если $G_i \leq \mathrm{Sym}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, и группа $G_1 \times G_2$ действует на декартовом произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$, то для всех целых $k \geq 2$ выполняется равенство $(G_1 \times G_2)^{(k)} = G_1^{(k)} \times G_2^{(k)}$.*

Во **второй главе** изучаются k-замыкания конечных нильпотентных групп подстановок. Известно, что каждая конечная нильпотентная группа имеет вид прямого произведения своих силовских подгрупп [4, Теорема 17.1.4]. После нескольких вспомогательных утверждений в первом параграфе, во втором параграфе устанавливается, что оператор k-замыкания сохраняет это прямое произведение.

Теорема 1. *Если G — конечная нильпотентная группа подстановок, и k — целое число, большее 1, то $G^{(k)}$ — прямое произведение k-замыканий силовских подгрупп группы G. В частности, $G^{(k)}$ нильпотентна.*

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [47].

Третья глава посвящена 2-замыканиям конечных абелевых групп. В ней предложен алгоритм CYCLOSURE проверки 2-замкнутости конечных абелевых групп с циклическими транзитивными составляющими. За вспомогательными утверждениями в параграфе 1 следуют доказательства основных для построения алгоритма теорем 2 и 3 в параграфах 2 и 3 соответственно,

Теорема 2. *Пусть G — квазирегулярная группа подстановок и $Z = \mathrm{Zel}(G)$. Тогда G 2-замкнута в том и только в том случае, если $Z \leq G$ и $G^{\mathrm{Orb}(Z)}$ 2-замкнута.*

В теореме 2 через $\mathrm{Zel}(G)$ обозначается группа

$$\mathrm{Zel}(G) = \prod_{\Delta} \bigcap_{\Delta' \neq \Delta} (G_{\Delta'})^{\Delta},$$

где Δ и Δ' пробегают множество орбит группы G, и $(G_{\Delta'})^{\Delta}$ — это ограничение поточечного стабилизатора множества Δ' на множество Δ. Если $\mathrm{Zel}(G) \neq 1$, то теорема 2 является критерием 2-замкнутости квазирегулярных групп. При изучении абелевых групп со свойством $\mathrm{Zel}(G) = 1$ оказалась полезной концепция несущественной орбиты. Орбита Δ группы $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ называется несущественной, если группа G 2-замкнута тогда и только тогда, когда группа $G^{\Omega \setminus \Delta}$ 2-замкнута.

Теорема 3. *Пусть p — простое число, G — интранзитивная p-группа с циклическими транзитивными составляющими и $\mathrm{Zel}(G) = 1$. Тогда каждая орбита группы G является несущественной.*

В четвертом параграфе с помощью теорем 1, 2 и 3 доказывается теорема 4.

Теорема 4. *Алгоритм* CYCLOSURE *корректен и осуществляет проверку 2-замкнутости абелевых групп с циклическими транзитивными составляющими.*

В **четвертой главе** рассматриваются вполне k-замкнутые конечные абелевы группы. Известно, что любая конечно порожденная абелева группа изоморфна прямому произведению так называемых инвариантных множителей. В первом параграфе размещены вспомогательные утверждения, с помощью которых во втором параграфе доказывается следующая

Теорема 5. *Пусть A — нетривиальная конечная абелева p-группа и n — количество инвариантных множителей группы A. Тогда группа A вполне $(n+1)$-замкнута, но не вполне n-замкнута.*

В третьем параграфе с помощью теоремы 1 теорема 5 обобщается для всех конечных абелевых групп.

Теорема 6. *Пусть A — нетривиальная конечная абелева группа и n — количество инвариантных множителей группы A. Тогда A вполне $(n+1)$-замкнута, но не вполне n-замкнута.*

В **пятой главе** изучаются $\frac{3}{2}$-транзитивные группы подстановок и возникающие из них когерентные конфигурации. Группа подстановок множества Ω является $\frac{3}{2}$-транзитивной, если она транзитивна и орбиты стабилизатора точки α на множестве $\Omega \setminus \{\alpha\}$ одинаковой неединичной длины. В первом параграфе строится полиномиальный алгоритм нахождения 2-замыкания $\frac{3}{2}$-транзитивной группы подстановок.

Теорема 7. *Проблема 2-замыкания для $\frac{3}{2}$-транзитивной группы подстановок степени n может быть решена за время, полиномиальное от n.*

Напомним, что если G — $\frac{3}{2}$-транзитивная группа множества Ω, то пара $(\Omega, \mathrm{Orb}_2(G))$ называется цветной шуровой $\frac{3}{2}$-однородной когерентной конфигурацией. Теорема 7 позволяет получить полиномиальное решение проблемы изоморфизма таких конфигураций.

Теорема 8. *Проблема изоморфизма цветных шуровых $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций на n точках может быть решена за время, полиномиальное от n.*

В третьем параграфе классифицируются группы автоморфизмов циклотомических схем над конечными почти-полями. В частности, подтверждается гипотеза Багеряна-Пономаренко-Рахнама Барги о том, что за конечным числом исключений такие группы автоморфизмов содержатся в одномерных аффинных полулинйеных группах. Отметим, что доказательство этого результата использует в том числе и компьютерные вычисления [14, 37]. Ниже приведена краткая версия этого результата.

Теорема 9$'$. *Пусть $\mathbb{K}$ — конечное почти-поле, K — собственная подгруппа группы $\mathbb{K}^\times$ и $\mathcal{C} = \mathrm{Cyc}(\mathbb{K}, K)$ — циклотомическая схема над почти-полем $\mathbb{K}$ с базисной группой K. Тогда за конечным числом известных исключений выполнено включение $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) \leq \mathrm{A\Gamma L}(1, \mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — конечное поле, ассоциированное с $\mathbb{K}$.*

Результаты главы получены автором в неразделимом соавторстве с А. В. Васильевым и опубликованы в [44, 45].

Заключение

В диссертации изучаются теоретические и алгоритмические аспекты проблемы k-замыкания групп подстановок и связанные с ней вопросы. Особое внимание уделено нильпотентным, абелевым и $\frac{3}{2}$-транзитивным группам подстановок. Полученные результаты открывают новые методы и направления изучения k-замыканий. Например, теорема 1 может помочь обобщить результаты о вполне k-замкнутых абелевых группах (теорема 6) на нильпотентные группы. Из теоремы 2 следует, что отдельный интерес представляют квазирегулярные группы со свойством $\mathrm{Zel}(G) = 1$. В теоремах 7 и 8 решены проблемы эффективного нахождения 2-замыкания $\frac{3}{2}$-транзитивной группы и изоморфизма цветных шуровых $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций, тем самым, основной интерес теперь переносится на сложностной аспект проверки шуровости $\frac{3}{2}$-однородных когерентных конфигураций.

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Андрею Викторовичу Васильеву за постановку интересных исследовательских задач и всестороннюю помощь. Автор благодарен Илье Николаевичу Пономаренко и Шерил Элизабет Прегер за научное сотрудничество и консультации. Также автор признателен всем сотрудниками лаборатории алгебры ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики НГУ за полученные знания и творческую атмосферу.

Список литературы

[1] Вейсфейлер Б., Леман А. Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра // Научно-техн. информ. Сб. ВИНИТИ. — 1968. — Т. 2, № 9. — С. 12–16.

[2] Зеликовский А. З. Задача Кёнига для абелевых групп перестановок // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-Мат. Наук. — 1989. — Т. 125. — Н. — С. 34–39.

[3] Калужнин Л. А., Клин М. Х. О некоторых числовых инвариантых групп подстановок // Латв. Мат. Ежегод. — 1976. — Т. 18. — С. 81–99.

[4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп: Учебное пособие. 5-е изд., стер. // СПб.: Изд. «Лань» — 2009. — 288 с.

[5] Супруненко Д. А. Группы подстановок // Навука і тэхніка, Мінск. — 1996.

[6] Abdollahi A., Arezoomand M. Finite nilpotent groups that coincide with their 2-closures in all of their faithful permutation representations // J. Algebra Appl. — 2018. — Vol. 17, no. 4. — P. 1850065.

[7] Abdollahi A., Arezoomand M., Tracey G. On finite totally 2-closed groups — 2020. — URL: arxiv.org/abs/2001.09597v2.

[8] Arezoomand M., Iranmanesh M. A, Praeger C. E., Tracey G. Totally 2-closed finite groups with trivial Fitting subgroup — 2021. — URL: arxiv.org/abs/2111.02253.

[9] Babai L. Groups, Graphs, Algorithms: The Graph Isomorphism Problem // Proc. ICM 2018, Rio de Janeiro. — 2015. — Vol. 3. — P. 3303–3320.

[10] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. — 1989.

[11] Bannai E., Ito T. Algebraic combinatorics. I. Association schemes // The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc. — 1984. — 425 p.

[12] Bagherian J., Ponomarenko I., Rahnamai Barghi A. On cyclotomic schemes over finite near-fields // J. Algebraic Combin. — 2008. — Vol. 27. — P. 173–185.

[13] Bamberg J., Giudici M., Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J. The classification of almost simple $\frac{3}{2}$-transitive groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 4257–4311.

[14] Bosma W., Cannon J., Playoust C. The Magma algebra system I: The user language // J. Symbolic Comput. — 1997. — Vol. 24.

[15] Chen G., Ponomarenko I. Coherent configurations // Wuhan: Central China Normal University Press. — 2019. — URL: pdmi.ras.ru/~inp/ccNOTES.pdf.

[16] Delsarte P. An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Research Reports Suppl. — 1973. — Vol. 10.

[17] Dixon J. D., Mortimer B. Permutation Groups. // Berlin: Springer Verlag. — 1996. — 346 p.

[18] 2-closure of a permutation group: Questions / Answers — 2016. — URL: mathoverflow.net/q/235114.

[19] Evdokimov S., Ponomarenko I. Permutation group approach to association schemes // European J. Combin. — 2009. — Vol. 30, no. 6. — P. 1456–1476.

[20] Evdokimov S.,Ponomarenko I. Two-closure of odd permutation group in polynomial time // Discrete Math. — 2001. — Vol. 235, no. 1-3. — P. 221-232.

[21] Giudici M., Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J., Tiep P. H. Arithmetic results on orbits of linear groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 2016. — Vol. 368. — P. 2415–2467.

[22] Grech M., Kisielewicz A. 2-Closed Abelian Permutation Groups // Electron. Notes Discrete Math. — 2018. — Vol. 68. — P. 83–88.

[23] Grech M., Kisielewicz A. Graphical representations of cyclic permutation groups // Discrete Appl. Math. — 2020. — Vol. 277. — P. 172–179.

[24] Grech M., Kisielewicz A. Graphical representations of cyclic permutation groups // J. Algebr. Comb. — 2021. — URL: doi.org/10.1007/s10801-021-01060-8.

[25] Higman D. G. Coherent configurations. I. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1970. — Vol. 44. — 1–25.

[26] Liebeck M. W., Praeger C. E, Saxl J. The classification of $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups and $\frac{1}{2}$-transitive linear groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2019. — Vol. 147. — P. 5023–5037.

[27] Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J. On the 2-closures of finite permutation groups // J. Lond. Math. Soc. — 1988. — Vol. 37. — P. 241–252.

[28] McConnel R. Pseuso-ordered polynomials over a finite field // Acta Arith. — 1963. — Vol. 8. — P. 127–151.

[29] O'Brien E. A., Ponomarenko I., Vasil'ev A. V., Vdovin E. The 3-closure of a solvable permutation group is solvable // Journal of Algebra. — 2021. — URL: doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.07.002.

[30] Passman D. S. Exceptional $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 29. — P. 669–713.

[31] Passman D. S. Solvable Half-Transitive Automorphism Groups // J. Algebra. — 1967. — Vol. 6. — P. 285–304.

[32] Passman D. S. Solvable $\frac{3}{2}$-transitive groups // J. Algebra. — 1967. — Vol. 7. — P. 192–207.

[33] Praeger C. E., Saxl J. Closures of finite primitive permutation groups // Bull. London Math. Soc. — 1992. — Vol. 24. — P. 251-–258.

[34] Ponomarenko I. Bases of schurian antisymmetric coherent configurations and isomorphism test for schurian tournaments // Journal of Mathematical Sciences — 2013. — Vol. 192, no. 3. — P. 316–338.

[35] Ponomarenko I. Graph isomorphism problem and 2-closed permutation groups // Appl. Algebra Eng. Comm. Comput. — 1994. — Vol. 5. — P. 9–22.

[36] Ponomarenko I.,Vasil′ev A. Two-closure of supersolvable permutation group in polynomial time // Computational Complexity — 2020. — Vol. 29, 5.

[37] Schonert M. et al. GAP — Groups, Algorithms, and Programming // Lehrstuhl D fur Mathematik, Rheinisch Westfalische Technische Hochschule, Aachen, Germany. — 1995.

[38] Seress A. Permutation Group Algorithms // Cambridge Tracts in Mathematics. — 2003.

[39] Wahling H. Theorie der Fastkorper // Thales. — 1987.

[40] Weisfeiler B. (editor) On construction and identification of graphs // Springer Lecture Notes. — 1976. — Vol. 558.

[41] Wielandt H. Finite permutation groups // Academic Press, New York – London. — 1964.

[42] Wielandt H. Permutation groups through invariant relations and invariant functions // Lecture Notes Dept. Math., Ohio State Univ., Colombus, Ohio. — 1969.

[43] Zassenhaus H. Uber endliche Fastkorper // Abh. Math. Sem. Hamburg. — 1936. — Vol. 11. — P. 187–220.

Работы автора по теме диссертации

[44] Churikov D. V., Vasil′ev A. V. Automorphism groups of cyclotomic schemes over finite near-fields // Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 1271–1282.

[45] Васильев А. В., Чуриков Д. В. 2-Замыкание $\frac{3}{2}$-транзитивных групп за полиномиальное время // Сиб. матем. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 360–375.

[46] Churikov D., Praeger C. E. Finite totally k-closed groups // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, №. 1. — С. 240–245.

[47] Чуриков Д. В. Структура k-замыканий конечных нильпотентных групп подстановок // Алгебра и Логика. — 2021.— Т. 60, №. 2— С. 231–239.

[48] Churikov D., Ponomarenko I. On 2-closed abelian permutation groups // Comm. Algebra. — 2021. — URL: `doi.org/10.1080/00927872.2021.1990307`.

[49] Churikov D. V. Automorphism groups of cyclotomic schemes over finite near-fields // Материалы международной конференции «Graphs and Groups, Spectra and Symmetries». — 2016. — Новосибирск: ИМ СО РАН, Новосиб. гос. ун-т. — С. 51.

[50] Churikov D. On 2-closures of abelian groups // Материалы международной конференции «Workshop on Group Theory and Algebraic Combinatorics». — 2017. — Новосибирск: ИМ СО РАН, Новосиб. гос. ун-т. — С. 30.

[51] Churikov D. V. 2-closure of $\frac{3}{2}$-transitive groups in polynomial time // Abstracts of International Conference «Symmetry vs. Regularity». — 2018. — Plzen, Czech Republic: University of West Bohemia. — P. 43.

[52] Churikov D. V., Vasil′ev A. V. Isomorphism problem for coherent configurations associated with $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups // Материалы международной конференции «Мальцевские чтения». — 2018. — Новосибирск: ИМ СО РАН, Новосиб. гос. ун-т. — С. 131.

[53] Churikov D. V. On 2-closed quasiregular permutation groups // Материалы международной конференции «Мальцевские чтения». — 2020. — Новосибирск: ИМ СО РАН, Новосиб. гос. ун-т. — С. 50.

Чуриков Дмитрий Владимирович

О замыканиях конечных групп подстановок

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук