На правах рукописи

Соколов Евгений Викторович

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП

1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ивановский государственный университет»

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Молдаванский Давид Ионович

Официальные оппоненты:

Бардаков Валерий Георгиевич,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник лаборатории обратных задач математической физики

Тимошенко Евгений Иосифович,
доктор физико-математических наук, профессор

Шлепкин Алексей Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности Института космических и информационных технологий

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования **«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»**

Защита состоится 31 марта 2023 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 24.1.074.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «______» __________________ 2023 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Ф. А. Дудкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$ относительно отношения θ*, если для любых элементов и множеств элементов данной группы, не состоящих в отношении θ, найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором образы указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении θ. Если θ — это отношение вхождения элемента в заданное подмножество Y, то говорят об *отделимости* (соответствующим классом групп) подмножества Y. Аппроксимируемость классом всех конечных групп (относительно любого отношения) принято называть *финитной.*

Хорошо известно, что если группа X конечно определена, то из ее финитной аппроксимируемости относительно θ следует разрешимость алгоритмической проблемы, состоящей в определении того, находятся ли заданные элементы и подмножества группы X в отношении θ. Именно это обстоятельство послужило причиной для начала интенсивных и систематических исследований аппроксимационных свойств групп, продолжающихся до сих пор. Однако, в настоящее время известен и целый ряд других применений указанных свойств; некоторые из них описываются ниже.

Финитная аппроксимируемость (относительно равенства элементов) тесно связана с такими свойствами, как хопфовость, линейность, гиперболичность и локальная разрешимость. Из финитной аппроксимируемости конечно порожденной группы следует финитная аппроксимируемость ее группы автоморфизмов. Известные критерии финитной аппроксимируемости и описания конечных гомоморфных образов могут служить целям классификации групп и их подгрупп.

Аппроксимируемость конечными p-группами для всех p из некоторого бесконечного множества простых чисел означает упорядочиваемость и, в некоторых случаях, нильпотентность группы. Почти аппроксимируемость групп конечными p-группами (или даже конечными $\mathfrak{P}$-группами для некоторого множества $\mathfrak{P}$ простых чисел) может оказаться достаточной для доказательства финитной аппроксимируемости свободной конструкции, построенной из этих групп, в то время как из одной лишь финитной аппроксимируемости указанных групп аппроксимируемость конструкции вывести не удается. Известные необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами очень сильно упрощают исследования нильпотентной аппроксимируемости конечно порожденных групп.

Аппроксимируемость нильпотентными и разрешимыми группами имеет приложения в теории многообразий и CW-комплексов, используется при изучении групп кос, узлов и зацеплений. Кроме того, аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения является необходимым условием аппроксимируемости свободными группами.

Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности конечно порожденной группы X в сочетании с некоторыми свойствами автоморфизмов этой группы обеспечивает финитную аппроксимируемость (относительно равенства) группы внешних автоморфизмов $\operatorname{Out} X$. Известен частичный аналог данного утверждения для случая аппроксимируемости конечными p-группами.

Отделимость объединенных или связанных подгрупп почти всегда является одним из необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп. Аналогичные взаимосвязи существуют между аппроксимируемостью и отделимостью относительно сопряженности (последняя обозначает аппроксимируемость относительно сопряженности элемента группы с одним из элементов заданной подгруппы).

Таким образом, свойства аппроксимируемости различными классами групп относительно различных отношений существенно взаимосвязаны и обладают многочисленными применениями в математической логике, алгебре и геометрии.

Свободные конструкции групп (свободные, древесные и полигональные произведения, HNN-расширения, фундаментальные группы графов групп и др.) естественным образом возникают в топологии и играют важную роль как в комбинаторной, так и в геометрической теории групп, во-первых, выступая в качестве средства построения новых групп с желаемыми свойствами и, во-вторых, обеспечивая возможность изучения заданной группы путем ее представления в виде конструкции, составленной из более просто устроенных или лучше изученных групп. Например, одним из ключевых моментов в доказательстве почти аппроксимируемости конечными p-группами групп 3-мерных многообразий является возможность описания структуры последних в виде фундаментальных групп графов групп. Поэтому изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп относительно различных отношений составляет немаловажную часть исследований аппроксимационных свойств групп в целом.

Цели, задачи и методы исследования. Цель работы состояла в развитии методов исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп различными, в первую очередь корневыми, классами групп и получении с помощью этих методов конкретных необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости. Здесь имеет смысл напомнить, что согласно одному из равносильных определений класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Всюду далее будем предполагать, что все рассматриваемые корневые классы нетривиальны, т. е. содержат неединичные группы.

Легко видеть, что корневыми являются классы всех конечных групп, всех разрешимых групп, всех групп без кручения, конечных $\mathfrak{P}$-групп и периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода для любого непустого множества $\mathfrak{P}$ простых чисел. Нетрудно показать также, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. Таким образом, к числу корневых относятся многие аппроксимирующие классы групп, рассматриваемые в литературе. Классы нильпотентных и свободных групп, тоже нередко фигурирующие в подобном качестве, корневыми не являются. Однако, аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп для всякого простого числа p служит необходимым условием аппроксимируемости свободными группами, а нильпотентная аппроксимируемость конечно порожденной группы равносильна аппроксимируемости объединением $\bigcup_p \mathcal{F}_p$. Поэтому утверждения об аппроксимируемости корневыми классами могут применяться и для доказательства аппроксимируемости свободными и нильпотентными группами.

Основными задачами диссертации являлись

– совершенствование и применение методов изучения аппроксимируемости относительно равенства корневыми классами групп свободных конструкций групп;

– использование доказанных утверждений для исследования свойства нильпотентной аппроксимируемости;

– получение базовых результатов об аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами относительно сопряженности.

Кроме этого, ставилась задача изучения свойства отделимости подгрупп в абелевых, нильпотентных и разрешимых группах. Ее решение необходимо как для уточнения полученных условий аппроксимируемости свободных конструкций групп, так и в качестве задела для исследования отделимости подгрупп указанных конструкций.

Перечисленные задачи с самого начала предполагалось решать путем усовершенствования алгебраических методов исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп (относительно равенства и сопряженности) и их применения совместно с классическими методами комбинаторной теории групп (такими как преобразования Тице, метод Рейдемейстера–Шрайера и др.). Помимо этого, в настоящей диссертации используются некоторые свойства абелевых и нильпотентных групп, описания подгрупп свободных конструкций групп, ряд сведений о строении обобщенных групп Баумслага–Солитэра и отдельные факты из элементарной теории графов.

Степень разработанности темы исследования. Если говорить об аппроксимационных свойствах групп в целом, то можно заметить, что существует основной набор таких свойств, который изучается уже около 50 лет и интерес к которому пока не ослабевает. Выглядит он следующим образом.

1. Аппроксимируемость относительно равенства
   – конечными группами;
   – конечными p-группами;
   – нильпотентными группами;
   – разрешимыми группами;
   – свободными группами.
2. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности.
3. Финитная отделимость подгрупп (как правило, определенного типа, например, циклических, абелевых или конечно порожденных), а также двойных смежных классов.

Количественное представление о существующем на момент написания диссертации интересе к свойствам из данного набора можно составить, анализируя статьи соответствующей тематики, опубликованные за предшествующие 5 лет. Как и следовало ожидать, более 20% из них посвящены изучению финитной аппроксимируемости. Второй по частоте встречаемости за тот же период оказалась финитная отделимость конечно порожденных подгрупп (около 15%). Каждому из остальных свойств соответствует примерно 5% статей. Среди групп и теоретико-групповых конструкций, для которых исследовались аппроксимационные свойства, чаще всего фигурировали свободные произведения с объединенной подгруппой и HNN-расширения, группы многообразий, а также группы кос, узлов и зацеплений.

Приведенный набор постепенно расширяется за счет естественных аналогов и обобщений входящих в него свойств. Так, например, в 90-х годах в связи с интенсивным изучением (применительно к свободным конструкциям групп) аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп и финитной аппроксимируемости относительно сопряженности в литературе стали использоваться понятия $\mathcal{F}_p$-отделимой и сопряженно финитно отделимой подгруппы.

Описание известных результатов, касающихся всех перечисленных выше свойств, могло бы составить содержание отдельного исследования. Поэтому далее ограничимся рассмотрением аппроксимируемости относительно равенства свободных конструкций групп: области, к которой относится бóльшая часть результатов настоящей диссертации.

Вопрос о том, при каких условиях заданная конструкция аппроксимируется каждым из указанных выше классов групп, полностью исследован лишь для (обычного) свободного произведения групп. А именно, для такого произведения получены критерии аппроксимируемости произвольным корневым классом групп [8,39], нильпотентными группами [14,44] и свободными группами [30]. Аппроксимационные свойства более сложно устроенных свободных конструкций: свободного произведения групп с объединенной подгруппой, древесного и полигонального произведений, HNN-расширения, фундаментальной группы графа групп — удается исследовать, лишь накладывая различные дополнительные ограничения на входящие в состав этих конструкций группы и объединенные или связанные подгруппы. Для групп таким ограничением чаще всего служит принадлежность к классу абелевых, нильпотентных, разрешимых или свободных групп, для подгрупп — конечность, цикличность, центральность или нормальность. С учетом необычайного разнообразия формулировок уже доказанных утверждений логично предположить, что для перечисленных конструкций никогда не будут получены критерии, столь же простые и универсальные, как для свободного произведения групп. Скорее всего, их исследование будет идти по пути постепенного расширения списка групп, которые можно использовать для построения конструкции, и ослабления накладываемых на эти группы и их подгруппы ограничений.

Среди аппроксимационных свойств свободных конструкций групп наибольший интерес всегда вызывала финитная аппроксимируемость. Вследствие высокой степени разработанности данной тематики темпы ее изучения постепенно снижаются. Из последних результатов, обобщающих значительное число доказанных ранее утверждений, следует отметить

– критерии финитной аппроксимируемости тубулярной (tubular) группы [41] и HNN-расширения с центральными связанными подгруппами [17];

– достаточные условия финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений свободных и конечно порожденных линейных групп [35];

– цикл статей о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений разрешимых групп и групп конечного общего ранга [1–6].

Кроме этого, имеет смысл упомянуть результаты о финитной аппроксимируемости

– HNN-расширений с нормальными циклическими связанными подгруппами [56];

– автоморфно индуцированных HNN-расширений [45, 46];

– полигональных произведений свободных групп [42];

– некоторых древесных произведений групп [47, 57].

Вторым по частоте рассмотрения в литературе является свойство аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп. В 90-х — 2000-х годах с помощью критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп [40] и аналога фильтрационной методики из [34] было получено достаточно много результатов об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных и древесных произведений. Критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной группы были найдены в [16, 29, 51] и сформулированы в различных терминах. В [18, 19] получены также критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения произвольной группы с конечно порожденными центральными связанными подгруппами и HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы с конечными связанными подгруппами. Некоторые из описанных выше результатов были распространены на фундаментальные группы произвольных графов групп.

В 2010-х годах $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость свободных конструкций групп практически не исследовалась. Ей на смену пришла аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел. К настоящему времени многие из доказанных в этом направлении утверждений распространены на случай корневого аппроксимирующего класса, состоящего из периодических групп.

Если не учитывать результаты об аппроксимируемости конечными p-группами и произвольными корневыми классами групп, то можно без труда перечислить статьи, где изучалась аппроксимируемость свободных конструкций групп разрешимыми или нильпотентными группами. В бо́льшей части из них речь идет об обобщенном свободном произведении двух групп. Единственным результатом об аппроксимируемости разрешимыми группами конструкции HNN-расширения является теорема 1.1 из [50], согласно которой данным классом аппроксимируется произвольное HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы. Критерии нильпотентной аппроксимируемости для HNN-расширений конечной и конечно порожденной абелевой группы приводятся в [51]. Первый из них впоследствии был распространен на фундаментальные группы произвольных графов конечных групп.

При исследовании аппроксимируемости свободными группами наряду с классом $\mathcal{R}\Phi$ групп, обладающих этим свойством, обычно рассматривается и класс $\mathcal{FR}\Phi$ (fully residually free-групп), принадлежность которому группы X означает, что для любого своего конечного подмножества Y она обладает гомоморфизмом на свободную группу, действующим инъективно на Y. Аппроксимируемость свободных конструкций групп свободными группами изучалась, по-видимому, лишь в [30–33, 49, 55]. Вместе с тем, за последние 25 лет было получено множество результатов о строении и свойствах (включая проблему изоморфизма) конечно порожденных $\mathcal{R}\Phi$- и $\mathcal{FR}\Phi$-групп. Вероятно, в некоторых конкретных случаях этих результатов может оказаться достаточно для того, чтобы ответить на вопрос, принадлежит ли заданная конечно порожденная группа, представимая в виде той или иной свободной конструкции, классу $\mathcal{R}\Phi$ или $\mathcal{FR}\Phi$.

Начало систематическому исследованию аппроксимируемости свободных конструкций групп произвольными корневыми классами положила статья [8], где установлено, в частности, что каждая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом групп. После этого была в той или иной степени изучена аппроксимируемость корневыми классами следующих свободных конструкций:

– свободного произведения двух групп с нормальными объединенными подгруппами [24, 66];

– HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами [23, 54];

– HNN-расширения с центральными связанными подгруппами при условии, что базовая группа принадлежит аппроксимирующему классу или связанные подгруппы конечны [10];

– свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, являющейся ретрактом хотя бы в одном из свободных множителей [21];

– древесного произведения, реберные подгруппы которого служат ретрактами в содержащих их вершинных группах [7, 22, 26];

– автоморфно индуцированного HNN-расширения с циклическими связанными подгруппами [27].

Полученные результаты и некоторые технические приемы, наработанные при их доказательстве, позволили установить критерии аппроксимируемости корневыми классами для

– групп Баумслага–Солитэра [25];

– групп Артина и групп Коксетера с древесной структурой [26].

Подводя итог данному обзору и оценивая место и перспективы исследований аппроксимируемости свободных конструкций произвольными корневыми классами групп, можно сделать следующие выводы.

1. К настоящему времени все наиболее естественные ограничения, которые можно было бы наложить на объединенные или связанные подгруппы, по-видимому, уже рассмотрены. Поэтому, как правило, новые результаты о финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп получаются двумя путями. Первый из них состоит в рассмотрении (относительно) простых конструкций (обобщенных свободных произведений и HNN-расширений), в состав которых входят новые, более сложно устроенные группы. Это направление исследований реализовано, например, в упомянутых выше работах [1–6]. Поскольку для вновь рассматриваемых групп условия аппроксимируемости произвольным корневым классом, скорее всего, неизвестны, рассматривать аппроксимируемость такими классами вместо финитной в данном случае невозможно.

Второй путь — прямо противоположный: сложные конструкции строятся из простых, иногда совсем примитивных групп. Это направление тоже является весьма перспективным, поскольку ряд известных групп получается именно таким способом. В качестве примеров можно привести обобщенные группы Баумслага–Солитэра (представляющие собой фундаментальные группы конечных графов групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами), тубулярные группы (отличающиеся от обобщенных групп Баумслага–Солитэра тем, что вершинные группы являются свободными абелевыми ранга 2), группы Артина с древесной структурой (древесные произведения с циклическими реберными подгруппами, в которых каждая вершинная группа — это либо обобщенное свободное произведение двух бесконечных циклических групп, либо HNN-расширение бесконечной циклической группы). Для таких групп изучение аппроксимируемости сразу произвольными корневыми классами групп выглядит более реалистично и позволяет получить значительно больше результатов ценой незначительных дополнительных усилий.

2. Исследования аппроксимируемости свободных конструкций нильпотентными, разрешимыми, свободными и конечными p-группами находятся в состоянии стагнации. В первых трех случаях это связано с отсутствием подходящих методов, в четвертом — с большими техническими трудностями, возникающими при использовании фильтрационной методики в сочетании с критериями из [16, 40] (особенно при рассмотрении древесных произведений и фундаментальных групп графов групп). Изучение аппроксимируемости произвольными корневыми классами уже сейчас оживляет это направление, причем с технической точки зрения предлагаемый подход оказывается проще, чем упомянутые выше традиционные исследования аппроксимируемости конечными p-группами.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту. Одним из основных методов исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп служит фильтрационный подход Г. Баумслага, долгое время применявшийся для изучения аппроксимируемости указанных конструкций классом всех конечных групп и некоторыми его подклассами. Наиболее важным результатом настоящей диссертации является выполненное в главе 2 обобщение данного метода на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса и фундаментальной группы любого графа групп. Как отмечено ниже, предложенное обобщение упрощает изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп и позволяет доказывать сразу несколько утверждений вместо одного. Подтверждением этому служат полученные в главах 3–5 результаты об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп различных графов групп с центральными реберными подгруппами. Для их доказательства используются еще два вспомогательных метода, также входящие в число основных результатов диссертации. Первый из них опирается на свойства определяемых в главе 3 конструкций обобщенного прямого и обобщенного свободного произведений, ассоциированных с графом групп, и применяется для построения гомоморфизма фундаментальной группы графа групп на группу из аппроксимирующего класса, действующего инъективно на всех вершинных группах (отыскание таких гомоморфизмов является одной из наиболее сложных задач, возникающих при использовании фильтрационного подхода). Второй метод служит обобщением на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп, замкнутого относительно взятия фактор-групп, метода спуска и подъема совместимых подгрупп, изначально предложенного Д. И. Молдаванским для исследования аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связанными подгруппами классами всех конечных и конечных p-групп. В главе 4 он применяется для сведéния задачи изучения аппроксимируемости рассматриваемых HNN-расширений к аналогичной задаче для расщепляемых расширений групп, являющейся в общем случае более простой.

С помощью перечисленных методов в диссертации получены

– критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.3);

– достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами при условии, что указанные подгруппы в каждой вершинной группе пересекаются тривиально или граф содержит не более одного простого цикла (теоремы 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6);

– достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами (теоремы 4.1.1–4.1.3);

– критерий аппроксимируемости корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с центральными циклическими связанными подгруппами (теоремы 4.1.6–4.1.9);

– критерий аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра корневым классом, состоящим из периодических групп, и достаточное условие аппроксимируемости той же группы корневым классом, содержащим непериодические группы (теоремы 5.2.2, 5.2.3).

К числу основных результатов диссертации относятся также

– равносильные определения и некоторые другие свойства корневых классов групп (§ 1.4);

– описания подгрупп, отделимых корневым классом, состоящим из периодических групп, в абелевых, нильпотентных и разрешимых группах определенного вида, а также в группах, аппроксимируемых нильпотентными и разрешимыми группами такого же вида (§§ 6.2, 6.3);

– критерии аппроксимируемости относительно сопряженности корневым классом $\mathcal{C}$, состоящим из конечных групп, расширения свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными подгруппами (теоремы 7.1.1, 7.1.3);

– критерии аппроксимируемости обобщенных групп Баумслага–Солитэра классами всех нильпотентных групп, нильпотентных групп без кручения и свободных групп (теоремы 8.1.3, 8.1.4).

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Существенной ее особенностью является изучение аппроксимируемости не каким-то одним конкретным классом групп, а сразу целым семейством классов, удовлетворяющих определенному набору условий. Понятно, что данный подход позволяет сэкономить усилия, доказывая «за раз» несколько утверждений вместо одного. Более важно, однако, то, что он обладает следующими двумя преимуществами.

1. Благодаря фиксированному набору условий, предъявляемых к аппроксимирующим классам групп, получаемые результаты хорошо стыкуются друг с другом и позволяют постепенно продвигаться в направлении усложнения рассматриваемых конструкций и ослабления ограничений, накладываемых на группы, из которых они построены. Если в начале исследований аппроксимируемости произвольными корневыми классами речь шла в основном об уточнении и обобщении известных фактов, то теперь накопленный багаж позволяет доказывать, в том числе, и новые утверждения о финитной аппроксимируемости групп.

2. Наличие для одной и той же группы сведений о ее аппроксимируемости классами групп из достаточно представительного семейства дает возможность «зажать» очередной аппроксимирующий класс между двумя другими, для которых необходимые и/или достаточные условия аппроксимируемости уже известны. Это позволяет либо сразу получить результат об аппроксимируемости новым классом, либо очень существенно сократить число рассматриваемых случаев.

Если сравнивать методы исследования аппроксимируемости произвольными корневыми классами с доказательствами известных утверждений об аппроксимируемости конкретными классами групп, то следует признать, что при изучении свойства финитной аппроксимируемости они не дают заметного ускорения или упрощения. Гораздо лучше обстоит дело с аппроксимируемостью конечными p-группами. Обычно при исследовании этого свойства применяют критерий Г. Хигмена [40] и другие аналогичные результаты, вызывающие значительные трудности технического характера в случае древесных произведений и более сложно устроенных фундаментальных групп графов групп. Для таких конструкций использование лишь свойств, которыми обладают все корневые классы, приводит не к уменьшению, а, напротив, к увеличению числа получающихся результатов за счет упрощения необходимых для их доказательства рассуждений. По похожим причинам еще большего продвижения удается достигнуть при изучении аппроксимируемости разрешимыми группами. Как уже было отмечено выше, несмотря на наличие отдельных утверждений, достаточно универсальных методов исследования указанного свойства применительно к свободным конструкциям групп не существует. По-видимому, это связано с тем, что наиболее известные характеристики разрешимых групп (такие, как наличие нормальных рядов с абелевыми факторами и т. п.) мало что дают при подобных исследованиях. Использование вместо них свойств, присущих всем корневым классам, оказывается более продуктивным и приводит к кратному увеличению числа результатов в данной области.

Настоящая диссертация развивает описанные выше идеи, распространяя методы исследования аппроксимируемости корневыми классами на фундаментальные группы произвольных графов групп. Экономия усилий, о которой шла речь выше, становится еще большей за счет использования введенного в главе 2 понятия допустимой системы совместимых подгрупп. Оно упрощает применение имеющихся результатов в случае изменения ограничений, которым должна удовлетворять свободная конструкция (подробнее об этом написано в § 2.1 диссертации).

Новыми утверждениями о финитной аппроксимируемости групп служат полученные в главе 3 достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с тривиально пересекающимися центральными реберными подгруппами. Эти же теоремы, а также ряд доказанных в главе 4 критериев аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связанными подгруппами дают неизвестные ранее условия аппроксимируемости конечными p-группами, где p — простое число. Что же касается аппроксимируемости классом всех разрешимых групп и различными его подклассами, то здесь новые результаты доставляют практически все доказанные в диссертации утверждения об аппроксимируемости корневыми классами групп.

Упомянутый выше подход, состоящий в окружении аппроксимирующего класса двумя другими, применяется, во-первых, в § 6.4 для снятия с указанного класса требования замкнутости относительно взятия фактор-групп и, во-вторых, в главе 8 для получения критерия нильпотентной аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра. Последний пример особенно важен, так как показывает возможный путь исследования нильпотентной аппроксимируемости свободных конструкций групп на основе известных утверждений об аппроксимируемости тех же конструкций корневыми классами групп.

Таким образом, в диссертации развиваются новые, более универсальные и в ряде случаев более продуктивные методы исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Получаемые с их помощью конкретные научные результаты могут найти свое применение в теории групп и связанных с ней разделах математики.

Степень достоверности и апробация результатов диссертации. Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации содержатся в статьях [58–70], опубликованных в журналах, включенных в перечень ВАК. Их достоверность подтверждается подробными доказательствами, прошедшими проверку в том числе при рецензировании указанных работ. Статьи [58–62, 67–69] подготовлены автором лично. Из результатов работ [63–66, 70] в диссертацию включены лишь те, которые принадлежат автору, а именно

– критерий аппроксимируемости корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с бесконечными циклическими связанными подгруппами, лежащими в центре базовой группы [63, теоремы 2–5];

– определения и свойства конструкций обобщенного прямого и обобщенного свободного произведений групп, ассоциированных с графом групп; общая идея их использования для изучения аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп [64, 65];

– ряд свойств корневых классов групп [66, § 5] и гомоморфизмов фундаментальных групп графов групп на группы из таких классов, действующих инъективно на всех вершинных группах [65, § 3], [70, теоремы 2, 3];

– критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом фундаментальной группы графа изоморфных групп [70, теорема 4].

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях:

– Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013, 2015, 2016, 2017, 2018, 2020, 2021 гг.);

– Международной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015 г.);

– XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2016 г.);

– Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 2018 г.);

– XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2018 г.);

– XVI и XVII Международных конференциях «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, май и сентябрь 2019 г.);

– Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019 г.);

– Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2019 г.);

– Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021 г.);

– Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А. И. Старостина (Екатеринбург, 2021 г.);

– Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Нальчик, 2022 г.);

– XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова (Брянск, 2022 г.);

– Второй конференции Математических центров России (Москва, 2022 г.).

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебра и логика» (Новосибирск, 2022 г.) и на семинаре по теории групп Ивановского государственного университета (Иваново, 2013–2021 гг.).

Основное содержание работы

Диссертация состоит из 8 глав, изложена на 206 страницах и включает 213 библиографических ссылок.

Глава 1 является вводной, и характер ее содержимого существенным образом меняется от параграфа к параграфу. В §§ 1.1–1.3 приводятся необходимые далее сведения об аппроксимационных свойствах и свободных конструкциях групп. Содержащиеся в этих параграфах утверждения в основном известны, некоторые из них даны без доказательств. Свойства корневых классов, описанные в § 1.4, относятся к основным результатам диссертации.

Исходное определение корневого класса, данное К. Грюнбергом в [39], носит чисто утилитарный характер и затрудняет понимание того, что представляют собой корневые классы групп в целом. **Теорема 1.4.1** дополняет его двумя равносильными определениями. Одно из них уже было приведено выше, согласно второму класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений. Отсюда легко следует, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. Кроме этого, в § 1.4 описаны некоторые семейства разрешимых групп, заведомо принадлежащих заданному корневому классу, и установлено, что если корневой класс состоит из периодических групп, то каждая из них имеет конечный период.

Основной целью **главы 2** является распространение фильтрационного метода Г. Баумслага [34] на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и доказательство двух условий общего характера, достаточных для аппроксимируемости таким классом фундаментальной группы графа групп. Начиная с этой главы и до конца диссертации, предполагается, что все рассматриваемые корневые классы групп нетривиальны (т. е. содержат неединичные группы); Γ — непустой связный ориентированный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допускаются петли и кратные ребра); $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп над Γ, в котором каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставлена некоторая (*вершинная*) группа G_v, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — (*реберная*) группа H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$ (где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа Γ, являющиеся концами ребра e). Подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ будем также называть *реберными* и обозначать для краткости через H_{+e} и H_{-e}.

Напомним, что *фундаментальной группой* графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ называется группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, образующими которой служат образующие групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и символы t_e $(e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и всевозможные соотношения вида

$$h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\ h_e \in H_e),$$
$$t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\ h_e \in H_e),$$

где $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ — множество ребер некоторого остовного дерева $\mathcal{T}$ в графе Γ. Известно, что все группы с представлениями описанного выше вида, соответствующими различным остовным деревьям графа Γ, изоморфны, и это позволяет говорить о фундаментальной группе графа групп без упоминания конкретного остовного дерева.

В настоящей диссертации используются два способа проверки $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Первый из них состоит в отыскании гомоморфизма указанной группы на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех реберных подгруппах. **Теорема 2.2.1** утверждает, что существования такого гомоморфизма в сочетании с $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью всех вершинных групп достаточно для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Второй способ заключается в том, чтобы аппроксимировать группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ не непосредственно $\mathcal{C}$-группами, а фундаментальными группами графов групп над тем же графом Γ, аппроксимируемость которых доказана первым способом. Более точно, каждая из указанных фундаментальных групп должна обладать свойством $\mathbb{P}$, состоящим в существовании гомоморфизма на $\mathcal{C}$-группу, инъективного на всех вершинных группах (а не только на реберных подгруппах). Такая двухступенчатая схема построения гомоморфизмов группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, отображающих ее на группы из аппроксимирующего класса $\mathcal{C}$ и сохраняющих отношения между заданными элементами и подмножествами, и составляет суть фильтрационного метода. Более формально она описана в § 2.1, а реализующее ее достаточное условие (**теорема 2.3.1**) доказано в § 2.3. Простейшую иллюстрацию применения данной схемы содержит § 2.4, где найден критерий аппроксимируемости корневыми классами фундаментальной группы графа изоморфных групп (**теорема 2.4.2**). Последняя конструкция достаточно искусственна, но нередко применяется для построения различных контрпримеров. В таком качестве она используется и в § 2.5, где исследуется вопрос о необходимости условия теоремы 2.2.1.

Можно показать, что любой гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$ проходит через гомоморфизм на фундаментальную группу со свойством $\mathbb{P}$ и потому, на первый взгляд, описанная двухступенчатая схема построения гомоморфизмов не приводит к сужению области применения фильтрационного подхода. На самом деле, для доказательства аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ фундаментальными группами со свойством $\mathbb{P}$ приходится требовать $\mathcal{C}$-отделимости реберных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в содержащих их вершинных группах, и это требование служит принципиальным ограничением как исходного метода Г. Баумслага, так и всех его обобщений, включая то, которое реализовано в настоящей диссертации. Существуют примеры, показывающие, что данное ограничение не является необходимым для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$; подробнее этот вопрос обсуждается в § 2.7.

Следует отметить, что в более ранних исследованиях, использовавших фильтрационный метод, на промежуточные конструкции, которыми аппроксимируется группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, накладывали лишь требование $\mathcal{C}$-аппроксимируемости. **Теорема 2.5.1** описывает некоторые ситуации, в которых оно равносильно свойству $\mathbb{P}$. Например, это так, если класс $\mathcal{C}$ состоит только из конечных групп и граф Γ конечен. В общем случае, однако, свойство $\mathbb{P}$ оказывается сильнее (соответствующие примеры приводятся в § 2.6), и полученные к настоящему времени результаты позволяют утверждать, что замена им условия $\mathcal{C}$-аппроксимируемости делает фильтрационный подход к исследованию аппроксимационных свойств свободных конструкций групп более продуктивным.

Понятно, что первый из описанных выше способов доказательства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ применим лишь в случае, когда все реберные подгруппы этой группы принадлежат классу $\mathcal{C}$. Второй способ свободен от данного ограничения, но для его использования к графу групп и вершинным группам обычно приходится предъявлять более жесткие требования. Иллюстрацией этому могут служить обсуждаемые ниже теоремы 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.5, 3.3.6, первая пара которых получена первым способом, а вторая — вторым.

В **главе 3** предшествующие результаты применяются для изучения фундаментальной группы графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$, в котором для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}$ (приведенное условие центральности предполагается выполненным до конца описания главы 3). Для реализации первого из указанных выше способов доказательства аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в § 3.1 вводится в рассмотрение конструкция обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп, определяемая следующим образом.

Пусть граф Γ не имеет кратных ребер и петель. Тогда через $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ будем обозначать группу, образующими которой являются образующие групп G_v $(v \in \mathcal{V})$, а определяющими соотношениями — соотношения тех же групп и всевозможные соотношения вида

$$h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E},\ h_e \in H_e),$$
$$[g_u, g_w] = 1 \ (u, w \in \mathcal{V},\ u \neq w,\ g_u \in G_u,\ g_w \in G_w).$$

Группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ будем называть *обобщенным прямым произведением, ассоциированным с графом групп* $\mathcal{G}(\Gamma)$, если выполняются следующие два условия:

(i) для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ продолжаемо до инъективного гомоморфизма и потому все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ можно считать подгруппами группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$;

(ii) для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ имеют место равенства $H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}$.

Отметим, что если граф Γ является полным, то обобщенное прямое произведение, ассоциированное с графом групп $\mathcal{G}(\Gamma)$, оказывается обобщенным прямым в смысле Б. и Х. Нейманн [48].

Очевидно, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой фактор-группу группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ по нормальному замыканию множества элементов

$$\bigl\{t_e \mid e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}\bigr\} \cup \bigl\{[g_u, g_w] \mid u, w \in \mathcal{V},\ u \neq w,\ g_u \in G_u,\ g_w \in G_w\bigr\}.$$

Легко видеть, что если группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ удовлетворяет условию (i), то естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ действует инъективно на всех вершинных группах и потому обеспечивает выполнение свойства $\mathbb{P}$ в случае, когда группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ принадлежит аппроксимирующему классу. Эта идея допускает определенное развитие, но ее использование ограничивается условиями, при которых обобщенное прямое произведение существует, т. е. обладает свойствами (i) и (ii). **Теоремы 3.2.1 и 3.2.2** утверждают, что последнее верно, если граф Γ является деревом или для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа

$$H_v = \mathrm{sgp}\bigl\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\bigr\}$$

представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп. Именно эти условия определяют те требования, которым должен удовлетворять граф групп в остальной части главы 3.

Далее будем считать, что $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и граф Γ может содержать кратные ребра и петли. Будем говорить, что граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ *имеет тип* (k) $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, если он обладает свойством (k) из следующего списка:

(1) для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп;

(2) граф Γ является деревом;

(3) граф Γ содержит в точности один простой цикл.

С помощью установленных в § 3.2 свойств обобщенных прямых произведений и теоремы 2.2.1 доказывается

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на подгруппе H_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$, то существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на $\mathcal{C}$-группу, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathcal{V})$.*

2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ являются $\mathcal{C}$-аппроксимируемыми, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

3. *Пусть $\mathcal{C}_{\mathtt{tf}}$ — класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения, для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_v\sigma_v$ изолирована в ней. Тогда*:

а) *если $D \in \mathcal{C}$, то гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\sigma \in \mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$;*

б) *если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ являются $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемыми, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема.*

Очень похожее утверждение (**теорема 3.3.2**) имеет место для графов групп типа (2) (в любом случае) и типа (3) (если класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы). Отметим, что теоремы 3.3.1 и 3.3.2 обобщают основные результаты статьи [10], полученные с использованием других методов, а также теорему 1.1 из [50].

Будем говорить, что некоторая группа X *$\mathcal{C}$-регулярна по своей подгруппе Y*, если для любой нормальной подгруппы M группы Y, удовлетворяющей условию $Y/M \in \mathcal{C}$, найдется нормальная подгруппа N группы X такая, что $X/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap Y = M$. Отметим, что понятие регулярности обобщает классическое понятие *мощного элемента*: если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то элемент $x \in X$ является мощным тогда и только тогда, когда группа X $\mathcal{F}$-регулярна по циклической подгруппе $\langle x \rangle$. Приводимые далее теоремы 3.3.5 и 3.3.6 получаются путем совместного использования необходимых и достаточных условий из §§ 2.3, 2.7 и теорем 3.3.1, 3.3.2. Предваряя формулировку второй из них, заметим, что если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2), то без потери общности для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ можно считать выполненным неравенство $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$.

Теорема 3.3.5. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1) и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v $\mathcal{C}$-отделима в группе G_v, в то время как группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

Теорема 3.3.6. *Пусть $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ и справедливо хотя бы одно из следующих условий*:

1) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v;*

2) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.*

Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Почти неисследованным в главе 3 остается случай, когда граф $\mathcal{G}(\Gamma)$ содержит циклы и не удовлетворяет свойству (1). Фундаментальная группа простейшего графа групп указанного вида представляет собой HNN-расширение с центральными связанными подгруппами, и изучению аппроксимируемости таких HNN-расширений посвящена **глава 4**. До конца ее обсуждения будем считать, что $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, G — некоторая группа, H и K — изоморфные центральные подгруппы группы G, $H \neq G \neq K$ и

$$\mathfrak{G} = \langle G, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi \rangle \text{ —}$$

HNN-расширение группы G с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными при помощи некоторого изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Положим также $K_0 = G$, $H_1 = H$, $K_1 = K$ и, если подгруппы H_i и K_i уже определены, то $H_{i+1} = H_i \cap K_i$ и $K_{i+1} = H_{i+1}\varphi$ (здесь и далее ограничение изоморфизма φ на любую подгруппу, содержащуюся в H, будем обозначать просто символом φ). Тогда для всякого $i \geqslant 0$ определено HNN-расширение

$$\mathfrak{K}_i = \langle K_i, t;\ t^{-1}H_{i+1}t = K_{i+1},\ \varphi \rangle.$$

Очевидно, что если для некоторого $n \geqslant 1$ выполнено равенство $H_n = K_n$, то $H_{n+1} = K_n = K_{n+1}$ и потому группа $\mathfrak{K}_n$ представляет собой расщепляемое расширение группы K_n при помощи бесконечной циклической группы $\langle t \rangle$. Легко видеть также, что ограничение изоморфизма φ на подгруппу H_n служит автоморфизмом последней и подгруппа $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$ группы $\mathfrak{G}$ оказывается расщепляемым расширением группы H_n при помощи подгруппы $\langle t \rangle$, изоморфным $\mathfrak{K}_n$.

Основной целью главы 4 является обобщение предложенного Д. И. Молдаванским [17, 18] метода спуска и подъема совместимых подгрупп на случай аппроксимируемости указанным выше классом $\mathcal{C}$. Суть данного метода состоит в доказательстве того, что при определенных условиях для каждого $i \geqslant 0$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ равносильна $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{K}_i$. Если $H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant 1$, это позволяет свести вопрос о $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ к, вообще говоря, более простой задаче отыскания условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения $\mathfrak{K}_n$. Два критерия аппроксимируемости расщепляемых расширений корневыми классами групп приводятся в конце параграфа 4.3.

Отметим, что равенство $H_n = K_n$ может не иметь места ни для какого $n \geqslant 0$. Чтобы добиться его выполнения, в сформулированной ниже теореме 4.1.1 и ряде других утверждений из главы 4 на группу G накладывается более слабое условие: $H_n = H_{n+1}$ для некоторого $n \geqslant 1$. Примеры ситуаций, в которых последнее соотношение обязательно имеет место, описываются в параграфах 4.1 и 6.4.

Предваряя формулировку теоремы 4.1.1, напомним, что подгруппа Y группы X называется $\mathfrak{P}'$*-изолированной* в этой группе для некоторого множества простых чисел $\mathfrak{P}$, если для любых элемента $x \in X$ и простого числа $q \notin \mathfrak{P}$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Легко видеть, что пересечение любого числа $\mathfrak{P}'$-изолированных подгрупп снова является $\mathfrak{P}'$-изолированной подгруппой и потому для каждой подгруппы Y определена наименьшая содержащая ее $\mathfrak{P}'$-изолированная подгруппа, называемая $\mathfrak{P}'$*-изолятором* подгруппы Y в группе X. Как и выше, если класс $\mathcal{C}$ включает только периодические группы, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$.

Теорема 4.1.1. *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$. Пусть также для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{i+1}K_{i+1}$ и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолятор подгруппы $H_{i+1}K_{i+1}$ в группе K_i $\mathcal{C}$-отделим в этой группе. Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) $H_n = K_n$;
2) *подгруппа* $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$ *$\mathcal{C}$-аппроксимируема*;
3) *подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G.*

Теорема 4.1.2. *Пусть класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и для некоторого $n \geqslant 0$ существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(K_n)$, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий*:

1) $H_{n+1} \cap Q = 1 = K_{n+1} \cap Q$,
2) $Q \leqslant H_{n+1} \cap K_{n+1}$ *и* $Q\varphi = Q$.

Пусть также для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{i+1}K_{i+1}$ и подгруппа $H_{i+1}K_{i+1}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе K_i. Тогда группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Отметим, что одно из приведенных в диссертации следствий сформулированных теорем обобщает основной результат работы [28] (в части, касающейся ненисходящих HNN-расширений). Помимо метода спуска и подъема совместимых подгрупп, опирающегося в свою очередь на фильтрационный подход, доказательства теорем 4.1.1 и 4.1.2 используют свойства некоторых обобщенных прямых произведений, рассматриваемых в § 4.2, и теорему 3.3.2.

В отдельных случаях полностью изучить аппроксимируемость HNN-расширения удается, не применяя метод спуска и подъема совместимых подгрупп. В настоящей диссертации такое исследование, использующее результаты §§ 2.3, 2.7 и теорему 3.3.1, проведено при условии, что связанные подгруппы H и K являются циклическими. В связи с формулировкой следующей теоремы заметим, что если указанные подгруппы еще и конечны, то, поскольку в конечной циклической группе есть только одна подгруппа заданного порядка, имеет место равенство $(H \cap K)\varphi = H \cap K$.

Теорема 4.1.6. *Пусть группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K являются конечными циклическими, $L = H \cap K$ и Φ — циклическая подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, L$, порожденная ограничением изоморфизма φ на подгруппу L. Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{C}$. В частности, если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Далее будем считать, что подгруппы H и K бесконечны. Если группа G обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу, действующим инъективно на подгруппах H и K, то класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы и в силу упоминавшейся выше теоремы 3.3.2 из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость HNN-расширения $\mathfrak{G}$. В случае, когда гомоморфизма группы G с указанными свойствами не существует, критерий аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ дают

Теоремы 4.1.7 и 4.1.8. *Пусть группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K являются бесконечными циклическими и не существует гомоморфизма группы G на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективного на подгруппах H и K. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I (**теорема 4.1.7**). *Если $H \cap K \neq 1$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *фактор-группы $H/H \cap K$ и $K/H \cap K$ имеют одинаковые порядки*;

2) *подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G*;

3) *класс $\mathcal{C}$ содержит группу порядка* 2, *если только подгруппа $H \cap K$ не лежит в центре группы $\mathfrak{G}$.*

II (**теорема 4.1.8**). *Если $H \cap K = 1$ и Ω — семейство нормальных подгрупп группы G такое, что $N \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $G/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap HK = (HK)^n$ для некоторого $n \geqslant 1$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K отделимы семейством Ω, т. е.*

$$\bigcap_{N \in \Omega} HN = H, \qquad \bigcap_{N \in \Omega} KN = K.$$

Описание семейства Ω и проверка отделимости им подгрупп H и K для конкретных класса $\mathcal{C}$ и группы G могут оказаться непростой задачей. Потребовав в дополнение к предположениям теоремы 4.1.8, чтобы подгруппа HK была $\mathcal{C}$-отделимой в группе G, удается доказать критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$, справедливость условий которого установить легче (**теорема 4.1.9**). Однако, $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы HK, вообще говоря, не является необходимым условием $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$; соответствующий пример приводится в § 4.1. Поэтому теорема 4.1.9 не может служить полной заменой теоремы 4.1.8.

Если потребовать, чтобы циклическими (точнее, бесконечными циклическими) были не одни лишь реберные, а и все вершинные группы, то получить законченные результаты об аппроксимируемости корневыми классами удается не только для HNN-расширений, но и для фундаментальных групп любых конечных графов групп. Как уже было отмечено выше, такие фундаментальные группы называют *обобщенными группами Баумслага–Солитэра* или *GBS-группами*. Их аппроксимируемость корневыми классами изучается в **главе 5**. Здесь имеет смысл напомнить, что (обычная) *группа Баумслага–Солитэра* — это HNN-расширение бесконечной циклической группы, т. е. группа с представлением вида

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа, которые без потери общности можно считать удовлетворяющими неравенствам $|n| \geqslant m > 0$. GBS-группа называется *элементарной*, если она изоморфна $\mathrm{BS}(1,1)$, $\mathrm{BS}(1,-1)$ или бесконечной циклической группе.

Заметим, что если все вершинные и реберные группы графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ являются бесконечными циклическими и зафиксированы их порождающие g_v $(v \in \mathcal{V})$ и h_e $(e \in \mathcal{E})$, то гомоморфизм $\varphi_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ однозначно определяется числом $\lambda(\varepsilon e) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таким, что $\bigl(g_{e(\varepsilon)}\bigr)^{\lambda(\varepsilon e)} = h_e\varphi_{\varepsilon e}$. Поэтому вместо графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ можно рассматривать *граф с метками* $\mathcal{L}(\Gamma)$, который получается из Γ путем сопоставления концам каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ ненулевых целых чисел $\lambda(+e)$ и $\lambda(-e)$.

С этого момента и до конца описания главы 5 будем считать, что Γ — непустой конечный связный граф, $\mathcal{L}(\Gamma)$ — некоторый граф с метками и $\mathfrak{G}$ — соответствующая ему GBS-группа.

Элемент $a \in \mathfrak{G}$ называется *эллиптическим*, если он сопряжен с элементом некоторой вершинной группы. Известно, что для любого $g \in \mathfrak{G}$ и для любого неединичного эллиптического элемента a существуют ненулевые целые числа m и n такие, что $g^{-1}a^m g = a^n$, причем отношение n/m не зависит от выбора a, m и n. Поэтому определен так называемый *модулярный гомоморфизм* Δ группы $\mathfrak{G}$ в мультипликативную группу поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, переводящий элемент g в n/m.

Граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ называется *редуцированным*, если каждое не являющееся петлей ребро имеет метки, отличные от ± 1. Нетрудно показать, что любая GBS-группа может быть задана редуцированным графом с метками.

Теорема 5.2.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой и задающий ее граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа $\mathcal{L}(\Gamma)$ являются $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числами.*
2. *Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1,-1\}$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа $\mathcal{L}(\Gamma)$ являются $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числами и $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.*
3. *Если $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1,-1\}$, то группа $\mathfrak{G}$ не аппроксимируется классом $\mathcal{C}$.*

Известно, что GBS-группа разрешима, если она элементарна или изоморфна $\mathrm{BS}(1,q)$, где $q \neq \pm 1$. Аппроксимируемость корневыми классами обычных групп Баумслага–Солитэра изучается в [25], и в сочетании с результатами данной работы теорема 5.2.2 дает критерий аппроксимируемости произвольной GBS-группы корневым классом, состоящим из периодических групп.

Теорема 5.2.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа $\mathfrak{G}$ элементарна, то она принадлежит классу $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$ всех $\mathcal{C}$-групп без кручения.*

2. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной и Q — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порожденное множеством $\operatorname{Im}\Delta$. Если аддитивная группа кольца Q принадлежит классу $\mathcal{C}$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема. В частности, если $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$ или класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема.*

Отметим, что сформулированные теоремы усиливают и обобщают теорему 1 из [36], следствие 7.7 из [43] и следствие 3 из [52]. Ввиду специфики рассматриваемых фундаментальных групп доказательства теорем 5.2.2 и 5.2.3 не опираются на результаты предыдущих трех глав (за исключением теоремы 2.7.1), а используют вместо них известные факты о строении GBS-групп, бóльшая часть которых описана в параграфах 5.1 и 5.3.

В условиях ряда теорем из глав 2–4 фигурируют свойства отделимости подгруппы и регулярности группы по подгруппе. **Глава 6** описывает некоторые случаи, в которых указанные свойства выполняются автоматически или могут быть относительно легко проверены. До конца ее обсуждения будем считать, что $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, состоящий из периодических групп.

Нетрудно проверить, что любая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа должна быть $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Известно много примеров ситуаций, когда верно и обратное. Например, это так для циклических подгрупп свободных групп, но данный результат, вообще говоря, нельзя распространить на произвольные конечно порожденные подгруппы [9]. В главе 6 изучается вопрос о том, какие условия достаточно наложить на абелеву, нильпотентную или разрешимую группу для того, чтобы она обладала свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$, означающим равносильность $\mathcal{C}$-отделимости и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности для всех подгрупп. Основой для этих исследований послужила статья А. И. Мальцева [15], в которой аналогичный вопрос рассматривается для случая, когда $\mathcal{C}$ — класс всех конечных групп.

Будем говорить, что абелева группа

а) *слабо $\mathcal{C}$-ограничена,*

б) *$\mathcal{C}$-ограничена,*

в) *сильно $\mathcal{C}$-ограничена,*

если в произвольной ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$,

а) имеет конечный период,

б) имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathcal{C}$,

в) конечна.

Нильпотентную (разрешимую) группу назовем (*слабо*, *сильно*) *$\mathcal{C}$-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом со (слабо, сильно) $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми факторами. В § 6.1 установлено, что в действительности факторы *любого* субнормального ряда (слабо, сильно) $\mathcal{C}$-ограниченной разрешимой группы оказываются (слабо, сильно) $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми группами. Классы $\mathcal{C}$-ограниченных, слабо $\mathcal{C}$-ограниченных и сильно $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных и разрешимых групп будем обозначать через $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$, $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BN}$, $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BN}$ и $\mathcal{C}$-$\mathcal{BS}$, $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BS}$, $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$ соответственно.

Отметим, что всякая конечно порожденная абелева группа сильно $\mathcal{C}$-ограничена и потому классы $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$ и $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BN}$ включают соответственно все полициклические и все конечно порожденные нильпотентные группы. Заметим также, что если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, то классы сильно $\mathcal{C}$-ограниченных абелевых и разрешимых групп совпадают с классами ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп в смысле А. И. Мальцева [15].

Перейдем теперь к описанию абелевых, нильпотентных и разрешимых групп со свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. Наиболее законченный вид такое описание имеет в случае абелевых групп: **теорема 6.2.1** утверждает, что для них указанное свойство равносильно слабой $\mathcal{C}$-ограниченности. $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BN}$-группа может уже не располагать свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$: соответствующий пример приводится в § 6.2. Однако, согласно **теореме 6.3.1** и **следствию 6.3.2** всякая $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группа обладает данным свойством, а для нильпотентных групп без кручения верно и обратное: из условия $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ вытекает $\mathcal{C}$-ограниченность.

Для разрешимой группы свойство $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ может не выполняться и в случае, когда она принадлежит классу $\mathcal{C}$-$\mathcal{BS}$; иллюстрирующий это пример строится в § 6.2. Более того, $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группа также не обязана обладать данным свойством, если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит не все простые числа. Например, не имеющая кручения сверхразрешимая группа $\mathrm{BS}(1,-1)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, только если $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, в то время как ее единичная подгруппа всегда является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Оставшийся случай, когда $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ совпадает с множеством всех простых чисел и разрешимая группа сильно $\mathcal{C}$-ограничена, описывается приводимым далее утверждением, обобщающим теорему 6 из [15].

Теорема 6.2.3. *Пусть множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. Тогда для любой разрешимой группы X справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $X \in \mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$, то все подгруппы группы X $\mathcal{C}$-отделимы.*
2. *Если группа X не имеет кручения и все ее подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы, то $X \in \mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$.*

Утверждение 1 теоремы 6.2.3 в свою очередь обобщает

Теорема 6.2.4. *Пусть множество* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ *содержит все простые числа,* X *— некоторая* $\mathcal{C}$*-*$s\mathcal{BS}$*-аппроксимируемая группа,* Y *— ее подгруппа и существует гомоморфизм группы* X *на* $\mathcal{C}$*-*$s\mathcal{BS}$*-группу, действующий инъективно на подгруппе* Y*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа* Y *отделима в группе* X *классом* $\mathcal{SC}$ *разрешимых* $\mathcal{C}$*-групп.*

2. *Если подгруппа* Y *лежит в центре группы* X*, то последняя* $\mathcal{C}$*- и* $\mathcal{SC}$*-регулярна по подгруппе* Y*.*

Чтобы сформулировать аналог теоремы 6.2.4 для нильпотентно аппроксимируемых групп, обозначим через $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$ класс всех $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения. Введение данного класса вполне естественно, поскольку согласно теореме 6.3.1 только такие $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группы аппроксимируются классом $\mathcal{C}$. Если ограничиться рассмотрением лишь $\mathcal{C}$-аппроксимируемых $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп, то приводимое далее утверждение становится обобщением теоремы 6.3.1. Отметим, что здесь оно дано в несколько более слабой формулировке, нежели в диссертации.

Теорема 6.3.3. *Пусть* X *— некоторая* $\mathcal{C}$*-*$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$*-аппроксимируемая группа,* Y *— ее подгруппа,* $\mathfrak{I}$ *—* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$*-изолятор подгруппы* Y *в группе* X *и существует гомоморфизм* σ *группы* X *на* $\mathcal{C}$*-*$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$*-группу, действующий инъективно на подгруппе* Y*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа* $\mathfrak{I}$ *отделима в группе* X *классом* $\mathcal{NC}$ *нильпотентных* $\mathcal{C}$*-групп, совпадает с множеством* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$*-корней, извлекающихся в группе* X *из элементов подгруппы* Y *и имеет ту же ступень нильпотентности, что и* Y*.*

2. *Гомоморфизм* σ *действует инъективно на подгруппе* $\mathfrak{I}$ *и потому* $\mathfrak{I} \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$.

3. *Если подгруппа* Y *центральна в группе* X*, то последняя* $\mathcal{C}$*- и* $\mathcal{NC}$*-регулярна по подгруппе* Y*.*

В § 6.4 с помощью сформулированных выше утверждений доказывается ряд следствий из теорем 3.3.5, 3.3.6, 4.1.1, 4.1.7 и 4.1.9. Наиболее содержательными из них являются приведенные здесь для простоты в несколько ослабленном виде

Теоремы 6.4.4 и 6.4.5. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— HNN-расширение группы* G *с центральными связанными подгруппами* H *и* K*,* $H \neq G \neq K$*, подгруппы* H_i *и* K_i $(i \geqslant 1)$ *определены так же, как в главе 4, и при некотором* $m \geqslant 1$ *подгруппы* H_m *и* K_m *конечно порождены. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I (**теорема 6.4.4**). *Если множество* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ *содержит все простые числа, группа* G *аппроксимируется* $\mathcal{C}$*-*$s\mathcal{BS}$*-группами и обладает гомоморфизмом на такую группу, действующим инъективно на подгруппе* HK*,* *то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant m+1$.*

II (**теорема 6.4.5**). *Если группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группами и обладает гомоморфизмом на такую группу, действующим инъективно на подгруппе HK, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *$H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant m+1$;*

2) *подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G;*

3) *$\bigcap_{N \in \Omega} N = 1$, где Ω — семейство подгрупп группы H_n, определенное следующим образом: $N \in \Omega$ тогда и только тогда, когда H_n/N — конечная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа, $N\varphi = N$ и порядок автоморфизма группы H_n/N, индуцированного автоморфизмом φ, является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

Отметим, что условие II.3 выше — это не что иное, как критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$.

В главах 1–6 речь идет исключительно об аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами относительно равенства. Последние две главы намечают два других возможных направления исследований.

Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп. Основным результатом **главы 7** является

Теорема 7.1.1. *Произвольное расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.*

В случае, когда $\mathcal{C}$ представляет собой класс всех конечных групп, сформулированная теорема была доказана в [37] с использованием результатов работы [53]. Аналогичное утверждение об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами получено в [11]. Теорема 7.1.1 открывает дорогу к изучению $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций групп, и в качестве примера ее применения доказана

Теорема 7.1.3. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп, в котором все вершинные группы $\mathcal{C}$-аппроксимируемы относительно сопряженности и все реберные подгруппы конечны. Если группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Из теоремы 7.1.3 вытекает **следствие 7.1.4**, согласно которому (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{C}$-аппроксимируемых относительно сопряженности, в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Отметим, что теорема 7.1.3 и следствие 7.1.4 обобщают теорему 1 из [38], теорему 1 из [12], теорему 3 из [53] и теорему 10 из [11], в которых речь идет об аппроксимируемости относительно сопряженности классами всех конечных групп и конечных p-групп.

Цель **главы 8** состоит в том, чтобы показать (на примере обобщенных групп Баумслага–Солитэра), как имеющиеся результаты об аппроксимируемости корневыми классами групп можно использовать для изучения аппроксимируемости той же свободной конструкции нильпотентными группами. Общая идея заключается в том, чтобы исключить из рассмотрения как можно больше случаев, используя для этого необходимые и достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами, а также необходимое условие локальной аппроксимируемости нильпотентными группами, полученное в [13]. Как правило, в результате такого исключения конструкция приобретает новые свойства, позволяющие исследовать ее нильпотентную аппроксимируемость в оставшемся случае.

Далее, как и при описании главы 5, будем предполагать, что Γ — непустой конечный связный граф, $\mathcal{L}(\Gamma)$ — некоторый граф с метками и $\mathfrak{G}$ — соответствующая ему GBS-группа. Критерий нильпотентной аппроксимируемости обычной группы Баумслага–Солитэра получен в [20]. В сочетании с ним критерий аппроксимируемости нильпотентными группами произвольной GBS-группы дает

Теорема 8.1.3. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой и задающий ее граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован.*

1. *Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, то группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными p-группами для некоторого простого числа p.*
2. *Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то следующие утверждения равносильны:*
   а) *группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется нильпотентными группами;*
   б) *группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется конечными нильпотентными $\{2, p\}$-группами для некоторого простого p (возможно, равного 2);*
   в) *все метки графа $\mathcal{L}(\Gamma)$ являются p-числами для некоторого простого p и, если $p \neq 2$, то каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит циклическому радикалу группы $\mathfrak{G}$.*
3. *Если $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, то группа $\mathfrak{G}$ не аппроксимируется нильпотентными группами.*

В связи с формулировкой приведенной теоремы необходимо напомнить, что *циклическим радикалом* группы $\mathfrak{G}$ называется наибольшая циклическая нормальная подгруппа этой группы. Известно, что циклический радикал существует, если группа $\mathfrak{G}$ не изоморфна $\mathrm{BS}(1, 1)$ или $\mathrm{BS}(1, -1)$.

Отметим, что если граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, все его метки являются p-числами для некоторого простого $p \neq 2$ и $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то имеется алгоритм, проверяющий, что каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит циклическому радикалу группы $\mathfrak{G}$; он приводится в § 8.3.

Доказательство теоремы 8.1.3 существенным образом опирается на некоторые утверждения из главы 5. С их же помощью доказана

Теорема 8.1.4. *Следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.*

2. *Группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется свободными группами.*

3. *Группа* $\mathfrak{G}$ *изоморфна прямому произведению свободной и бесконечной циклической групп.*

В связи с последним утверждением имеет смысл отметить, что прямое произведение свободной и бесконечной циклической групп принадлежит классу $\mathcal{FR}\Phi$ (fully residually free-групп) тогда и только тогда, когда оба его сомножителя являются циклическими группами.

Благодарности

Прежде всего, автор хотел бы выразить благодарность и признательность своему научному консультанту, профессору Д. И. Молдаванскому, бывшему также и руководителем его кандидатской диссертации. Проделанная Д. И. Молдаванским огромная методическая работа и организованный им спецсеминар позволили автору составить первое целостное представление об исследованиях аппроксимационных свойств групп и сделали путь, которым он шел в последующие годы, значительно более прямым и легким. Автор также считает нужным отметить, что продолжает неизменно следовать множеству полезных советов, полученных им от Д. И. Молдаванского по поводу написания статей. Помимо этого, автор хотел бы поблагодарить участников семинара по теории групп ИвГУ, в особенности профессоров Д. Н. Азарова, Д. И. Молдаванского и Н. И. Яцкина, за постоянный интерес к его докладам и плодотворное их обсуждение.

Список литературы

[1] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.

[2] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 483–491.

[3] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 9–19.

[4] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.

[5] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 163–169.

[6] *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.

[7] *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6 (2008). С. 29–42.

[8] *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10.

[9] *Бардаков В. Г.* К вопросу Д. И. Молдаванского о p-отделимости подгрупп свободной группы // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 505–509.

[10] *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.

[11] *Иванова Е. А.* О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп : дисс… канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2004.

[12] *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2005. Вып. 3. С. 83–91.

[13] *Куваев А. Е.* Необходимые условия нильпотентной аппроксимируемости некоторых теоретико-групповых конструкций // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1335–1349.

[14] *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25 (67), № 3. С. 347–366.

[15] *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

[16] *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140.

[17] *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2002. Вып. 3. С. 123–133.

[18] *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2003. Вып. 3. С. 102–116.

[19] *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2006. Вып. 3. С. 128–132.

[20] *Молдаванский Д. И.* О нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 5. С. 752–759.

[21] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

[22] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.

[23] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

[24] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

[25] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

[26] *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

[27] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2020. № 12. С. 41–50.

[28] *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated Abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50, № 6. P. 495–501.

[29] *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite p-groups to be residually p // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Vol. 215, № 9. P. 2280–2289.
[30] *Baumslag B.* Residually free groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1967. Vol. 17, № 3. P. 402–418.
[31] *Baumslag B., Levin F.* A free product with a non-power amalgamated which is not residually free // Math. Z. 1976. Vol. 151, № 3. P. 235–237.
[32] *Baumslag B., Levin F., Rosenberger G.* A cyclically pinched product of free groups which is not residually free // Math. Z. 1993. Vol. 212, № 1. P. 533–534.
[33] *Baumslag G.* On generalised free products // Math. Z. 1962. Vol. 78, № 1. P. 423–438.
[34] *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193–209.
[35] *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // Invent. Math. 2005. Vol. 160, № 2. P. 341–356.
[36] *Dudkin F. A.* $\mathcal{F}_\pi$-residuality of generalized Baumslag–Solitar groups // Arch. Math. 2020. Vol. 114, № 2. P. 129–134.
[37] *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. Lond. Math. Soc. (2). 1979. Vol. 20, № 2. P. 215–221.
[38] *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. Vol. 29., № 1. P. 35–51.
[39] *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. Vol. 7, № 1. P. 29–62.
[40] *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1, № 3. P. 301–305.
[41] *Hoda N., Wise D. T., Woodhouse D. J.* Residually finite tubular groups // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A: Mathematics. 2020. Vol. 150, № 6. P. 2937–2951.
[42] *Kim G.* On the residual finiteness of certain polygonal products of free groups // Comm. Korean Math. Soc. 2016. Vol. 31, № 3. P. 461–466.
[43] *Levitt G.* Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2015. Vol. 18, № 1. P. 1–43.
[44] *Lichtman A. I.* Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1978. Vol. 12, № 1. P. 49–64.
[45] *Logan A. D.* The residual finiteness of (hyperbolic) automorphism-induced HNN-extensions // Comm. Algebra. 2018. Vol. 46, № 12. P. 5399–5402.
[46] *Logan A. D.* Every group is the outer automorphism group of an HNN-extension of a fixed triangle group // Adv. Math. 2019. Vol. 353. P. 116–152.

[47] *Metaftsis V., Raptis E.* Residual finiteness of infinite amalgamated products of cyclic groups // J. Pure Appl. Algebra. 2007. Vol. 208, № 3. P. 1091–1097.

[48] *Neumann B. H., Neumann H.* A remark on generalized free products // J. Lond. Math. Soc. 1950. Vol. 25, № 3. P. 202–204.

[49] *Raptis E., Varsos D.* Some residual properties of certain HNN extensions // Bull. Greek Math. Soc. 1987. Vol. 28. P. 81–87.

[50] *Raptis E., Varsos D.* Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1989. Vol. 59, № 3. P. 285–290.

[51] *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. Vol. 76, № 2. P. 167–178.

[52] *Robinson D. J. S.* Recent results on generalized Baumslag–Solitar groups // Note Mat. 2010. Vol. 30, № 1. P. 37–53.

[53] *Stebe P. F.* A residual property of certain groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 26, № 1. P. 37–42.

[54] *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125–143.

[55] *Wise D.* Some virtual limit groups // Groups Geom. Dyn. 2018. Vol. 12, № 4. P. 1265–1272.

[56] *Wong K. B., Wong P. C.* Residual finiteness, subgroup separability and conjugacy separability of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2012. Vol. 62, № 5. P. 875–884.

[57] *Wong K. B., Wong P. C.* Cyclic subgroup separability of certain graph products of subgroup separable groups // Bull. Korean Math. Soc. 2013. Vol. 50, № 5. P. 1753–1763.

Статьи, в которых опубликованы основные результаты диссертации

[58] *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

[59] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.

[60] *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

[61] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

[62] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

[63] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

[64] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

[65] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

[66] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.

[67] *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43, № 2. P. 856–860.

[68] *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. Vol. 582. P. 1–25.

[69] *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, № 3. P. 962–987.

[70] *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, № 2. P. 260–272.

Соколов Евгений Викторович

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 14.12.2022 г.
Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Печать плоская.
Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 120 экз.

Отпечатано на оборудовании издательства
«Ивановский государственный университет»
153025 Иваново, ул. Ермака, 39   (4932) 93-43-41
E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru