На правах рукописи

Корнев Руслан Александрович

Вычислимая сводимость метрик на вещественных числах

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор МОРОЗОВ Андрей Сергеевич
Официальные оппоненты:	КАНОВЕЙ Владимир Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, и.о. главного научного сотрудника
	КОРОВИНА Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита ============ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. ак. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, адрес сайта `http://math.nsc.ru`.

Автореферат разослан «___» ____________ 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 003.015.02, кандидат физико-математических наук, доцент	Стукачев Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации исследуются некоторые вопросы теории вычислимых метрических пространств. Для формализации понятия вычислимости на несчётной структуре используется подход TTE-теории Крайца и Вайрауха [21, 37, 22, 38, 39].

Интуитивно конструктивные результаты в анализе встречались и до того, как было дано формальное определение алгоритма: например, как хорошо известно, теорема Банаха о неподвижной точке [10] вместе с доказательством существования искомой точки даёт конструктивный способ её получения. Э. Борель [11] в 1912 г. определял вычислимые вещественные числа как такие числа α, для которых по всякому данному n можно *получить* рациональное приближение α с точностью $1/n$. Разумеется, речь шла о некоем алгоритмическом процессе получения приближения; формального определения процесса *получения* Борель не мог дать, но он отмечал, что такой процесс должен быть конечным, надёжным и однозначным. Борель рассуждает о существенно различных способах представления чисел (с помощью десятичных или цепных дробей), а также замечает, что неравенство двух вычислимых вещественных чисел можно обнаружить за конечное время, но равенство, вообще говоря, нельзя. Борель также вводит неформальное понятие вычислимой вещественной функции: он называет функцию f вычислимой, если всякое вычислимое вещественное число α она переводит в вычислимое. По всей видимости, алгоритм вычисления по всё более точным аппроксимациям α аппроксимаций для $f(\alpha)$ должен быть равномерным по таким последовательностям аппроксимаций α, т. к. Борель приходит к выводу, что вычислимая функция должна быть непрерывной в каждой вычислимой точке.

Точкой возникновения вычислимого анализа можно считать работы А. Тьюринга [35, 36], в которых было дано строгое определение вычислимого вещественного числа: вещественное число r называется *вычислимым,* если десятичное разложение r вычислимо на машине Тьюринга (a-машине в оригинальной статье). В [36] было показано, что это определение эквивалентно тому, что существует вычислимое представление r в виде вложенных отрезков, т. е. существует вычислимая последовательность вложенных рациональных отрезков $[a_n, b_n]$, содержащих r и таких, что $b_n - a_n < 2^{-n}$. Тем не менее, с помощью простого диагонального аргумента Тьюринг показал, что равномерный переход от представления с помощью вложенных отрезков к десятичному представлению невозможен. Позднее К. Крайцем и К. Вайраухом [22] было доказано, что различия между этими представлениями имеют, в сущности, топологический характер (далее мы поясним, что это означает). Кроме того, используя диагональный аргумент, похожий на упомянутый выше аргумент Тьюринга, они показали, что операции сложения и умножения не являются вычислимыми (и даже непрерывными) относительно десятичного представления вещественных чисел, а значит, возникает необходимость разработать инструмент, который позволил бы сравнивать различные представления между собой и искать среди них наиболее оптимальное.

Такой инструмент был получен в [37, 21] с помощью обобщения классической теории нумераций (см. [4, 1]) на несчётный случай, используя вместо ω пространство Бэра ω^ω или пространство Кантора 2^ω в качестве базисного пространства, теорию вычислимости на котором можно распространять на другие пространства посредством представлений. В дальнейшем мы будем работать только с пространством Бэра. *Представлением* множества X мощности не более чем континуум называют произвольную частичную сюръекцию из ω^ω на X. Частично вычислимыми функциями в пространстве Бэра естественно считать тьюринговы функционалы. Понятие *вычислимой сводимости* представлений теперь вводится так же, как и в счётном случае для нумераций: говорим, что $\delta_1 \leq_c \delta_2$, где δ_1, δ_2 — представления множества X, если существует тьюрингов функционал Φ, такой что $\delta_1(f) = \delta_2(\Phi(f))$ для всех $f \in \mathrm{dom}(\delta_1)$. Будем также говорить, что $\delta_1 \leq_t \delta_2$ (*δ_1 непрерывно сводится к δ_2*), если существует непрерывный частичный функционал $\Phi\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ с указанным выше свойством. Частичная функция $F\colon X \to Y$ называется (δ_X, δ_Y)-*вычислимой*, где δ_X, δ_Y — представления множеств X и Y, если $F(\delta_X(f)) = \delta_Y(\Phi(f))$ для $f \in \mathrm{dom}(F\delta_X)$.

Легко видеть, что $\leq_c$ и $\leq_t$ являются предпорядками на множестве всех представлений X. Можно определить операции $\wedge$ и $\vee$ на c-степенях представлений X, согласованные с индуцированным порядком на степенях, относительно которых этот порядок образует решётку.

В работе [21] (см. также [39]) сравниваются по вычислимой и непрерывной сводимостям следующие представления вещественных чисел:

1. ρ — *представление Коши,* использующее быстро сходящиеся последовательности рациональных чисел, т. е. $\rho(f) = x$ для $f \in \omega^\omega$ и $x \in \mathbf{R}$, если последовательность $q_{f(n)}$ рациональных чисел, перечисляемая функцией f, сходится к x и $|q_{f(n)} - q_{f(m)}| \leqslant 2^{-n}$ при $m > n$;

2. δ — представление через вложенные рациональные отрезки;

3. $\rho_<$ — представление через левое дедекиндово сечение, т. е. $\rho_<(f) = x$, если $\{q_{f(i)} \mid i \in \omega\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$;

4. $\rho_>$ — представление через правое дедекиндово сечение;

5. δ_C — представление с помощью сходящихся последовательностей, т. е. $\delta_C(f) = x$, если $q_{f(i)} \to x$;

6. δ_{dec} — десятичное представление;

7. δ_{cf} — представление с помощью цепных дробей.

Авторам этой работы удалось доказать, что для этих представлений выполнены следующие соотношения:

1. $\rho \equiv_c \delta \equiv_c \rho_< \wedge \rho_>$;

2. $\rho_<$ и $\rho_>$ не сравнимы относительно $\leq_t$;

3. $\rho_<, \rho_> \not\leq_t \rho$;

4. $\rho_<, \rho_> \leq_c \delta_C$, но $\delta_C \not\leq_t \rho_<, \rho_>$;

5. $\delta_{\mathrm{dec}} \leq_c \rho$, но $\rho \not\leq_t \delta_{\mathrm{dec}}$;

6. $\delta_{\mathrm{cf}} \leq_c \delta_{\mathrm{dec}}$, но $\delta_{\mathrm{dec}} \not\leq_t \delta_{\mathrm{cf}}$.

Тем не менее, как было замечено Р. Робинсоном [33] и К. Ко [20], класс вычислимых вещественных чисел $\mathbf{R}_c$ инвариантен относительно выбора представлений $\rho, \delta_{\mathrm{dec}}$ и δ_{cf}, т. е. вещественное число x вычислимо тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий: x обладает вычислимым именем Коши; левое и правое дедекиндовы сечения x вычислимо перечислимы; представление x в виде цепной дроби вычислимо. Ко [20] также доказал, что для фиксированного числа x левое дедекиндово сечение x T-эквивалентно разложению x в цепную дробь, т. е. $\delta_<^{-1}(x) \equiv_T \delta_{\mathrm{cf}}^{-1}(x)$.

Вещественное число x называется *вычислимо перечислимым,* если x имеет вычислимое $\rho_<$-представление, т. е. левое дедекиндово сечение x вычислимо перечислимо. Хорошо известно, что класс вычислимых чисел является собственным подклассом класса в. п. вещественных чисел. Пример невычислимого в. п. числа был построен Э. Шпекером [34] в 1949 г. и может быть сформулирован следующим образом. Для произвольного множества $A \subseteq \omega$ обозначим $x_A = \sum_{n\in A} 2^{-n}$. Легко видеть, что все числа вида x_A, где A — в. п. множество, являются вычислимо перечислимыми. Вместе с этим, число x_A вычислимо тогда и только тогда, когда множество A вычислимо. Дальнейшие результаты о классах сложности вещественных чисел могут быть найдены в [9, 41, 42]. Аналоги m-, tt- и T-сводимостей для вещественных чисел исследовались в работе Ко [19].

Пусть δ — представление множества X. *Финальной топологией* относительно представления δ называется топология τ_δ на X, задаваемая требованием непрерывности отображения δ (как частичного отображения из ω^ω в X). Представление δ называется *допустимым,* если на X можно задать топологию τ, такую что T_0-пространство (X, τ) сепарабельно, а δ t-эквивалентно *стандартному представлению* (X, τ), при котором элементы $x \in X$ кодируются последовательностями базисных окрестностей, в которых они содержатся. Известно [21], что финальная топология допустимого представления δ совпадает с топологией τ, упомянутой выше. Финальная топология представления Коши ρ вещественных чисел совпадает с обычной топологией $\mathbf{R}$. Финальной топологией представления δ_C является антидискретная топология: ни один начальный сегмент (ненормированно) сходящейся последовательности не даёт никакой информации о том, куда эта последовательность сходится. Таким образом, δ_C не является допустимым. Финальной топологией десятичного представления δ_{dec} является обычная топология, но это представление также не допустимо. По этим причинам именно представление Коши оказывается оптимальным для изучения вычислимости на $\mathbf{R}$ с точки зрения вычислимого анализа.

С. Банах и С. Мазур (см. [25]) изучали вычислимые функции, определённые на вычислимых вещественных числах. Функция $f\colon \mathbf{R}_c \to \mathbf{R}_c$ называется *вычислимой по Банаху-Мазуру,* если f переводит вычислимые последовательности в вычислимые последовательности. Одним из основных результатов [25] является доказательство того, что всякая такая функция обязана быть непрерывной на $\mathbf{R}_c$. Функция $f\colon \mathbf{R}_c \to \mathbf{R}_c$ называется *конструктивной,* или *вычислимой по Маркову,* если существует алгоритм, равномерно по индексу числа $x \in \mathbf{R}_c$ выдающий индекс $f(x)$. Понятие вычислимой вещественной функции в такой постановке исследовалось представителями русской конструктивной школы, возглавлявшейся А. А. Марковым (см. [5, 6, 7, 2, 3]). Г. С. Цейтин [6] доказал, что всякая (всюду определённая) конструктивная функция является конструктивно непрерывной, т. е. имеет конструктивный модуль непрерывности, на $\mathbf{R}_c$. О. Абертом [8] был построен пример функции $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такой что ограничение $f \restriction \mathbf{R}_c$ конструктивно, но f не является непрерывной на $\mathbf{R}$. Всякая конструктивная функция вычислима по Банаху-Мазуру [5]; тот факт, что обратная импликация неверна, был доказан в 2005 г. Гертлингом [17].

А. Гжегорчик [14] начал изучать понятие вычислимой функции вещественной переменной в современной постановке: он называл функцию

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ вычислимой, если существует *вычислимый функционал* второго порядка, выдающий для всякого числа x по каждой быстро сходящейся последовательности рациональных приближений x некоторую быстро сходящуюся последовательность приближений для $f(x)$. Гжегорчик [15] выводит несколько полезных эквивалентных определений вычислимой вещественной функции, одно из которых говорит, что вычислимость функции f эквивалентна её представимости с помощью вычислимой функции первого порядка, действующей на рациональных интервалах и монотонной относительно включения. Похожее определение будет впоследствии использоваться Вайраухом в [37] для построения TTE-теории вычислимости на ω^ω.

Исследование вычислимых метрических пространств в общем смысле было впервые предпринято в работах Д. Лакомба [24], Н. А. Шанина [7], Г. С. Цейтина [6] и Я. Московакиса [31], причём последние три автора рассматривают это понятие в "конструктивной" постановке в духе конструктивной школы. Лакомб [23] также инициировал исследование в. п. подмножеств вещественных чисел. Отдельно отметим работу Дж. Миллера [29], в которой вводится понятие *сводимости по представлению* точек вычислимых метрических пространств. Степени по этой сводимости называются *непрерывными* степенями по той причине, что каждая такая степень содержит элемент $f \in C[0,1]$ (можно показать, что f можно выбрать аналитической). Оказывается, что непрерывные степени образуют промежуточную структуру между тьюринговыми степенями и e-степенями. Из существования *нетотальной,* т. е. отличной от любой тьюринговой, непрерывной степени следует, что существует непрерывная функция $f \in C[0,1]$ без тьюринговой степени.

М. Б. Пур-Эль и Дж. И. Ричардс [32] изучали вычислимость на банаховых пространствах с помощью понятия *структуры вычислимости,* вводимого аксиоматически. Неформально говоря, структура вычислимости $\mathcal{I}$ в пространстве $\mathcal{B}$ — это семейство вычислимых последовательностей, замкнутое относительно линейных комбинаций, пределов и норм. В том случае, когда структура вычислимости содержит последовательность $\{e_n\}_{n\in\omega}$, линейная оболочка которой всюду плотна в $\mathcal{B}$, пространство $(\mathcal{B}, \mathcal{I})$ называется *эффективно сепарабельным.* Понятно, что в этом случае можно считать, что $\mathcal{B}$ представлено представлением Коши относительно $\{e_n\}_{n\in\omega}$. Среди множества вопросов, рассматриваемых в книге, также исследуется единственность структуры вычислимости в эффективно сепарабельном банаховом пространстве с точностью до изометрии. Доказывается, что в гильбертовом пространстве такая структура единственна, но в пространстве ℓ^1 существует структура, неизометричная стандартной. Аналог понятия структуры вычислимости для произвольного метрического пространства был введён Т. Мори, Ё. Цудзи и М. Ясуги в [30]; дальнейшие результаты в этом направлении см., например, в [40, 18].

А. Г. Мельников [27] вводит понятие *вычислимо категоричного* польского пространства $\mathcal{M} = (M, d)$: $\mathcal{M}$ называется вычислимо категоричным, если все *вычислимые структуры* (т. е. счётные всюду плотные подмножества) в нём вычислимо изометричны, т. е. для всякой пары вычислимых структур найдётся изометрия пространства $\mathcal{M}$ на себя, вычислимая относительно представлений Коши, индуцированных этими структурами. Это эквивалентно существованию эффективной процедуры, позволяющей равномерно по номеру точки в одной структуре получить имя Коши её изометричного образа в другой структуре. Вычислимую категоричность можно рассматривать относительно различных сигнатур: например, для того чтобы дать определение вычислимо категоричного банахова пространства, естественно под вычислимой структурой считать структуру, относительно которой сложение и умножение на скаляр вычислимы, а от изометрий требовать сохранения этих операций, т. е. линейности; при этом мы получим определение, аналогичное рассмотренному выше свойству единственности структуры вычислимости с точностью до изометрии в смысле Пур-Эль–Ричардса. Мельников обобщает результаты из [32], доказав, что гильбертово пространство вычислимо категорично, но ℓ^1 не вычислимо категорично, в сигнатуре метрического пространства. Также он получает результаты о вычислимой категоричности пространств Кантора и Урысона, а кроме того, доказывает, что пространство $C[0,1]$ не вычислимо категорично. В работе [28] Мельников и К. М. Нг показывают, что $C[0,1]$ имеет бесконечную вычислимую размерность и не является вычислимо категоричным как банахово пространство и как банахова алгебра. Отвечая на вопрос, поставленный в [27], и обобщая результат Пур-Эль и Ричардса, Т. Макниколл [26] доказывает, что среди пространств ℓ^p при вычислимом $p \geq 1$ лишь пространство ℓ^2 является вычислимо категоричным; тем не менее, все пространства ℓ^p являются Δ^0_2-категоричными.

Цели и задачи исследования. В рамках настоящей диссертации исследуются представления Коши польских пространств, порождённые одной и той же плотной подструктурой и различными метриками, совместимыми с топологией этого пространства. Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — польское пространство с выделенным счётным плотным подмножеством W и нумерацией ν множества W. Тогда всякая полная метрика ρ на $\mathbf{X}$ индуцирует представление Коши δ_ρ пространства $\mathbf{X}$. Мы говорим, что метрика ρ_1 вычислимо сводится к метрике ρ_2 ($\rho_1 \leq_c \rho_2$), если $\delta_{\rho_1} \leq_c \delta_{\rho_2}$, т. е. равномерно для каждого элемента $x \in X$ по каждому δ_{ρ_1}-имени для x можно вычислить некоторое δ_{ρ_2}-имя для x. Будем также говорить, что ρ_1 слабо сводится к ρ_2, $\rho_1 \leq_{ch} \rho_2$, если для каждого $x \in X$ по всякому δ_{ρ_1}-имени для x можно вычислить некоторое δ_{ρ_2}-имя для образа точки x относительно некоторого гомеоморфизма $\mathbf{X}$ на себя, т. е. если существует хотя бы один $(\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2})$-вычислимый автогомеоморфизм пространства $\mathbf{X}$. Нетрудно убедиться в том, что введённые упорядочения являются предпорядками на множестве полных метрик на $\mathbf{X}$.

Целью данной работы является исследование структурных свойств упорядочений степеней вычислимых метрик на польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой сводимости и слабой сводимости.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях в области вычислимого анализа.

Методология и методы исследований. В работе используются методы теории вычислимости и вычислимого анализа. В частности, используется метод приоритета с конечными нарушениями.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что все выпуклые метрики на $\mathbf{R}$ лежат в одной степени по вычислимой сводимости.

2. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и вычислимо сводимых к стандартной метрике на $\mathbf{R}$.

3. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и находящихся выше стандартной метрики на $\mathbf{R}$ относительно вычислимой сводимости.

4. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по слабой сводимости выше степени стандартной метрики.

5. Доказано, что счётная безатомная булева алгебра вложима в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по вычислимой сво-

димости выше степени стандартной метрики с сохранением точных верхних и нижних граней.

6. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в полурешётку степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве **X** по вычислимой сводимости ниже степени любой метрики, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

7. Доказано, что нижняя полурешётка степеней вычислимых метрик на **X** не является направленным вверх порядком и не является верхней полурешёткой в случае, если существует вычислимая метрика на **X**, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

Апробация работы. По основным результатам диссертации были сделаны доклады на следующих международных конференциях: МНСК «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2015 г.), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2019 и 2020 гг.), Workshop on Aspects of Computation (Сингапур, 2017 г.), Logic Colloquium (Лидс, Великобритания, 2016 г.; Удине, Италия, 2018 г.), Computability and Complexity in Analysis (Кохель-ам-Зее, Германия, 2018 г.), Computability in Europe (Гент, Бельгия (дистанционно), 2021 г.). Кроме того, результаты работы докладывались на научных семинарах «Теория вычислимости» и «Конструктивные модели» Новосибирского государственного университета и Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и на семинаре кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [43]–[52], из них [43]–[45] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приводятся основные определения, касающиеся теории вычислимости на метрических пространствах, вводятся исследуемые в работе понятия.

Во **второй главе** исследуется упорядочение $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{R})$ вычислимых метрик на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Строится серия примеров метрик со степенями, строго меньшими степени стандартной метрики ρ_R на $\mathbf{R}$. Основным результатом этой главы является теорема 2.4 о существовании бесконечной антицепи вычислимых метрик, не сравнимых друг с другом относительно $\leq_{ch}$ и c-сводимых к ρ_R. Перед этим доказываются некоторые предварительные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть ρ, ρ' — выпуклые вычислимые метрики на $\mathbf{R}$. Тогда $\rho \equiv_c \rho'$.*

Теорема 2.2. *Существуют вычислимые метрики ρ_0, ρ_1 на $\mathbf{R}$, такие что $\rho_0, \rho_1 \leq_c \rho_R$, $\rho_0 \not\leq_c \rho_1$ и $\rho_0 \equiv_{ch} \rho_1$. Таким образом, сводимости $\leq_c$ и $\leq_{ch}$ различаются на вычислимых вещественных метриках.*

Теорема 2.3. *Существует вычислимая метрика $\rho <_{ch} \rho_R$.*

Конструкция предыдущей теоремы обобщается для построения бесконечного количества вычислимых ch-неэквивалентных метрик. При этом возникнут конфликты требований, которые придётся разрешать методом приоритета с конечными нарушениями.

Теорема 2.4. *Существует последовательность $(\rho_i)_{i\in\omega}$ вычислимых метрик, не сравнимых между собой по ch-сводимости и c-сводимых к ρ_R.*

В **третьей главе** исследуется вопрос о существовании метрик над стандартной метрикой. На этот вопрос даётся положительный ответ: мы показываем, что ch-степень метрики ρ_R не является максимальной в $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{R})$. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует бесконечная последовательность вычислимых метрик $\rho_i >_c \rho_R$, $i \in \omega$, таких что $\rho_i \,|_{ch}\, \rho_j$ для всех $i \neq j$.*

Для доказательства которой снова требуется конечный приоритет. Стратегия выполнения негативных требований, обеспечивающих несводимость строящихся метрик к стандартной, основывается на сближении отдаленных (в стандартной метрике) точек вещественной прямой с помощью непрерывных деформаций. Для того чтобы графики этих деформаций не пересекались, приходится располагать их в разных плоскостях в $\mathbf{R}^3$, как показано на рисунке. Конструкция осуществляется таким образом, что

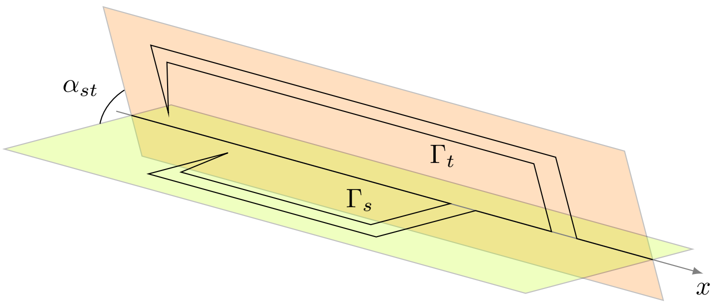

Рис. 1: Склеиваем две деформации.

деформации, определённые для различных метрик ρ_i, можно сочетать между собой, получая в итоге метрики ρ_A для множеств $A \subseteq \omega$. Метрика ρ_A вычислима тогда и только тогда, когда вычислимо множество A, и для всех $A \subseteq \omega$ верны следующие соотношения:

1. Если $A \subseteq B$, то $\rho_A \leq_c \rho_B$,
2. Если $A \not\subseteq B$, то $\rho_A \not\leq_{ch} \rho_B$.

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Верны следующие утверждения:*

1. *Упорядочение $(P(\omega), \subseteq)$ множества всех подмножеств ω вложимо в упорядочение ch-степеней вещественных метрик выше ρ_R.*
2. *Существует в точности $2^{\aleph_0}$ различных ch-степеней метрик.*
3. *Существует в точности $2^{\aleph_0}$ различных c-степеней метрик.*

4. *Любой счётный частичный порядок вложим в упорядочение ch-степеней вычислимых метрик над ρ_R.*

Конструкция метрик ρ_A обладает ещё одним полезным свойством: отображение $A \mapsto \rho_A$ сохраняет точные верхние и нижние грани вычислимых множеств. Более точно, для вычислимых множеств $A, B \subseteq \omega$ верно следующее: $\deg_c(\rho_{A\cup B}) = \deg_c(\rho_A) \vee \deg_c(\rho_B)$ и $\deg_c(\rho_{A\cap B}) = \deg_c(\rho_A) \wedge \deg_c(\rho_B)$ в решётке c-степеней представлений $\mathbf{R}$. Отсюда получаем результат о вложимости решёток в структуру c-степеней вычислимых метрик.

Теорема 3.3. *Следующие решётки вложимы в упорядочение c-степеней вычислимых метрик над ρ_R с сохранением точных верхних и нижних граней:*

1. *Булева алгебра вычислимых подмножеств ω;*

2. *Счётная безатомная булева алгебра* $\mathrm{Int}(1+\eta)$*;*

3. *Любая счётная дистрибутивная решётка.*

В **четвёртой главе** мы исследуем элементарные свойства структуры $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ c-степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве $\mathbf{X}$, а также доказываем несколько фактов о строении структуры $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ c-степеней произвольных метрик на $\mathbf{X}$. Простейшим свойством этих структур является следующее. Заметим, что если полные метрики ρ_1 и ρ_2 индуцируют одну и ту же топологию на X, то их поточечный максимум $\rho(x,y) = \max(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y))$ также является полной метрикой, индуцирующей эту же топологию. Без труда доказывается следующая лемма.

Лемма 4.1 ([12, 43])**.** *Пусть $\rho, \rho' \in M(\mathbf{X})$. Если существуют константы $r, M > 0$, такие что*

$$\forall x, y \in X \ \big(\rho(x,y) \leqslant r \Rightarrow \rho'(x,y) \leqslant M \cdot \rho(x,y)\big),$$

то $\rho \leq_c \rho'$.

В частности, если расстояния в метрике ρ' не превосходят расстояний в метрике ρ, то $\rho \leq_c \rho'$. Отсюда следует, что упорядочение $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ является направленным вниз (поточечный максимум двух метрик сводится к ним обеим). Более того, имеет место следующий факт.

Предложение 4.2. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in M(\mathbf{X})$ и метрика ρ_1 вычислима. Положим $\rho(x,y) = \max(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y))$. Тогда степень $\deg_c(\delta_\rho)$ является точной нижней гранью степеней $\deg_c(\delta_{\rho_1})$ и $\deg_c(\delta_{\rho_2})$ в решётке представлений X. Иными словами, степень любой вычислимой метрики имеет в структуре $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ точную нижнюю грань с любой другой степенью. В частности, структура $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ является нижней полурешёткой.*

Далее мы доказываем серию обобщений результатов главы 2 для c-степеней метрик на произвольном пространстве $\mathbf{X}$.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — польское пространство, а $\rho \in M(\mathbf{X})$ — вычислимая метрика такая, что пространство (X, ρ, W, ν) содержит вычислимую предельную точку. Тогда существует вычислимая метрика $\rho' \in M(\mathbf{X})$ со свойством $\rho' <_c \rho$. В частности, $\deg_c(\rho)$ не является минимальной в $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$. Более того, упорядочение $(P(\omega), \subseteq)$ подмножеств ω изоморфно вложимо в $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ под $\deg_c(\rho)$.*

Следствие 4.4. *Если существует предельная специальная точка $\lambda \in W$ (в частности, если $\mathbf{X}$ не содержит изолированных точек), то $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ не содержит минимальных элементов.*

Релятивизуя предыдущие результаты, получаем следующее.

Теорема 4.5. *Пусть польское пространство $\mathbf{X}$ содержит хотя бы одну предельную точку λ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любой метрики $\rho \in M(\mathbf{X})$ существует другая метрика $\rho' \in M(\mathbf{X})$ со свойством $\rho' <_c \rho$. Более того, если ρ $\mathbf{d}$-вычислима и точка λ имеет $\mathbf{e}$-вычислимое ρ-имя, где $\mathbf{d}$ и $\mathbf{e}$ — тьюринговы степени, то ρ' является $\mathbf{d} \cup \mathbf{e}$-вычислимой.*
2. *$\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ не содержит минимальных элементов.*
3. *$(P(\omega), \subseteq)$ изоморфно вложимо в $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ под любой степенью.*
4. *$|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 2^{\aleph_0}$.*

Если же польское пространство $\mathbf{X}$ не содержит предельных точек, т. е. дискретно, возможны два случая: либо X конечно, либо счётно. В этих случаях справедливы следующие результаты.

Предложение 4.6. *Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, X, \nu)$ — польское пространство, где X — конечное множество, а $\nu\colon \omega \to X$ — его произвольная нумерация. Тогда $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 1$.*

Предложение 4.7. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, \tau, X, \nu)$ *— дискретное польское пространство, где* X *— счётное множество, а* $\nu\colon \omega \to X$ *— его произвольная нумерация. Пусть* ρ *— стандартная дискретная метрика на* X*, определённая правилом* $\rho(x, y) = 1$ *для* $x \neq y$*. Тогда* $\deg_c(\rho)$ *есть наименьшая степень в* $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$*. Мощность структуры* $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ *равна мощности континуума.*

Таким образом, справедлива следующая классификация мощностей структуры $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ степеней произвольных метрик на польском пространстве $\mathbf{X}$.

Предложение 4.8. *Для польского пространства* $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 2^{\aleph_0}$,
2. $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| > 1$,
3. X *бесконечно.*

Основным результатом четвёртой главы, доказательству которого отводится вся оставшаяся часть этой главы, является следующая теорема.

Теорема 4.9. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— польское пространство,* ρ *— метрика на* $\mathbf{X}$ *и* $\lambda \in X$ *— предельная точка, имеющая вычислимое* ρ*-имя. Существует вычислимая метрика* $\widehat{\rho} \in M(\mathbf{X})$*, такая что для любой вычислимой метрики* $d \in M(\mathbf{X})$ *выполнено* $\rho \nleq_c d$ *или* $\widehat{\rho} \nleq_c d$*.*

Перечислим некоторые простые следствия этой теоремы.

Следствие 4.10. *В условиях предыдущей теоремы,* $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ *не является направленным вверх частичным порядком, не является верхней полурешёткой и не содержит наибольшего элемента.*

Следствие 4.11. *Если существует предельная специальная точка* $\lambda \in W$ *(в частности, если* $\mathbf{X}$ *не содержит изолированных точек), то*

$$\mathcal{CM}_c(\mathbf{X}) \models \forall \mathbf{a}\, \exists \mathbf{b}\, \forall \mathbf{c}\, (\mathbf{a} \nleq \mathbf{c} \vee \mathbf{b} \nleq \mathbf{c}).$$

В некотором смысле, конструкция теоремы 4.9 обобщает конструкцию теоремы 3.1, т. к. свойство метрики $\widehat{\rho}$ можно переформулировать следующим образом: если $\rho \leq_c d$, то $\widehat{\rho} \nleq_c d$ для любой вычислимой метрики d на $\mathbf{X}$. Таким образом, мы должны выполнять негативные требования избегания нижнего конуса для $\widehat{\rho}$, похожие на требования теоремы 3.1.

Стратегия для этих требований также основывается на похожих идеях: мы сближаем точки пространства $\mathbf{X}$ с помощью непрерывных локальных деформаций пространства (X, ρ). Чтобы формально определить такие деформации, мы вкладываем пространство (X, ρ) в банахово пространство ℓ^∞ с помощью классического вложения Фреше [13, 16]. Теперь искомую деформацию легко определить с помощью линейной структуры на ℓ^∞, и мы получаем деформированную метрику ρ_1, удовлетворяющую одному негативному требованию в изоляции. Вложение Фреше оказывается весьма удобным, т. к. оно позволяет получить явные формулы для метрики ρ_1, из чего следует, что ρ_1 вычислима. Необходимо доказать следующее техническое утверждение.

Предложение 4.12. *ρ_1 полна и совместима с топологией* $\mathbf{X}$.

Чтобы присоединить к деформированной метрике ρ_1 деформацию для другого требования, вкладываем пространство (X, ρ_1) в ℓ^∞ с помощью вложения Фреше и определяем новую деформацию. Локальный характер деформаций и хорошие свойства вложения Фреше позволяют нам проводить процесс так, чтобы новая деформация не затрагивала область действия старой деформации, поэтому диагонализация проходит без нарушений и с сохранением исходной топологии. Получаем последовательность деформированных метрик ρ_i, $i \in \omega$. Теперь искомую метрику $\widehat{\rho}$, удовлетворяющую всем требованиям, можно определить как поточечный предел метрик ρ_i. Здесь нам снова требуется доказать техническую лемму о свойствах метрики $\widehat{\rho}$.

Предложение 4.13. *$\widehat{\rho}$ полна и совместима с топологией* $\mathbf{X}$.

В последнем параграфе четвёртой главы мы завершаем доказательство теоремы 4.9, проводим формальную конструкцию метрики $\widehat{\rho}$ и верификацию.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, д. ф.-м. н., профессору Андрею Сергеевичу Морозову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М. : Наука, 1977.

[2] Заславский И. Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 385–457.

[3] Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М. : Наука, 1973.

[4] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М. : Наука, 1965.

[5] Марков А. А. О конструктивных функциях // Проблемы конструктивного направления в математике. 1, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1958. Т. 52. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 315–348.

[6] Цейтин Г. С. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 295–361.

[7] Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 15–294.

[8] Aberth O. Computable analysis. New York : McGraw-Hill, 1980.

[9] Ambos-Spies K., Weihrauch K., Zheng X. Weakly computable real numbers // Journal of Complexity. 2000. V. 16, N 4. P. 676–690.

[10] Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1922. V. 3. P. 133–181.

[11] Borel É. Le calcul des intégrales définies // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1912. Série 6, tome 8. P. 159–210.

[12] Dillhage R. Computable Functional Analysis: Compact Operators on Computable Banach Spaces and Computable Best Approximation. Dissertation. Fakultät für Mathematik und Informatik, FernUniversität in Hagen, 2012.

[13] Fréchet M. Les dimensions d'un ensemble abstrait // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 145–168.

[14] Grzegorczyk A. Computable functionals // Fund. Math. 1955. V. 42, N 1. P. 168–202.

[15] Grzegorczyk A. On the definitions of computable real continuous functions // Fund. Math. 1957. V. 44, N 1. P. 61–71.

[16] Heinonen J. Geometric embeddings of metric spaces. Jyväskylä : University of Jyväskylä, 2003.

[17] Hertling P. A Banach-Mazur computable but not Markov computable function on the computable real numbers // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 132, N 2–3. P. 227–246.

[18] Iljazović Z. Isometries and Computability Structures // Journal of Universal Computer Science. 2010. V. 16, N 18. P. 2569–2596.

[19] Ko K. Reducibilities on real numbers // Theoret. Comput. Sci. 1984. V. 31, N 1–2. P. 101–123.

[20] Ko K. On the continued fraction representation of computable real numbers // Theoret. Comput. Sci. 1986. V. 47. P. 299–313.

[21] Kreitz Ch., Weihrauch K. Theory of representations // Theoret. Comput. Sci. 1985. V. 38. P. 35–53.

[22] Kreitz Ch., Weihrauch K. Representations of the real numbers and of the open subsets of the set of real numbers // Ann. Pure Appl. Logic. 1987. V. 35. P. 247–260.

[23] Lacombe D. Les ensembles récursivement ouverts ou fermés, et leurs applications à l'analyse récursive // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris). 1957. vol. 245. P. 1040–1043.

[24] Lacombe D. Quelques procédés de définition en topologie récursive // Constructivity in mathematics. Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1959. P. 129–158.

[25] Mazur S. Computable Analysis. Rozprawy Matematyczne, vol. 33. Warsaw, 1963.

[26] McNicholl T. Computable copies of ℓ^p // Computability. 2017. V. 6, N 4. P. 391–408.

[27] Melnikov A. G. Computably Isometric Spaces // J. Symb. Log. 2013. V. 78, N 4. P. 1055–1085.

[28] Melnikov A. G., Ng K. M. Computable structures and operations on the space of continuous functions // Fund. Math. 2016. V. 233. P. 101–141.

[29] Miller J. Degrees of unsolvability of continuous functions // J. Symb. Log. 2004. V. 69, N 2. P. 555–584.

[30] Mori T., Tsujii Y., Yasugi M. Computability structures on metric spaces // Combinatorics, Complexity and Logic. Proc. DMTCS'96. Berlin : Springer, 1996. P. 351–362.

[31] Moschovakis Y. N. Recursive metric spaces // Fund. Math. 1964. V. 55. P. 215–238.

[32] Pour-El M. B., Richards J. I. Computability in Analysis and Physics. Berlin : Springer-Verlag, 1989.

[33] Robinson R. Review of R. Peter's book, 'Rekursive Funktionen' // J. Symbolic Logic. 1951. V. 16. P. 280–282.

[34] Specker E. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis // J. Symb. Log. 1949. V. 14, N 3. P. 145–158.

[35] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem" // Proc. London Math. Soc. 1936. V. 42, N 2. P. 230–265.

[36] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem". A correction // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43, N 2. P. 544–546.

[37] Weihrauch K. Type 2 recursion theory // Theor. Comput. Sci. 1985. V. 38. P. 17–33.

[38] Weihrauch K. Computability on Computable Metric Spaces // Theor. Comput. Sci. 1993. V. 113, N 2. P. 191-210.

[39] Weihrauch K. Computable Analysis. An Introduction. Berlin/Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

[40] Yasugi M., Mori T., Tsujii Y. Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 219, N 1–2. P. 467–486.

[41] Zheng X. Recursive approximability of real numbers // Mathematical Logic Quarterly. 2002. V. 48, S1. P. 131–156.

[42] Zheng X. A computability theory of real numbers // Proceedings of the Second conference on Computability in Europe: Logical approaches to computational barriers (CiE'06). Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. P. 584–594.

Работы автора по теме диссертации

[43] Корнев Р. Сводимость вычислимых метрик на вещественной прямой // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 4. С. 453–476.

[44] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. V. 18. P. 377–392.

[45] Корнев Р. А. Полурешетка степеней вычислимых метрик // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, N 5. С. 1013–1038.

[46] Корнев Р. А. О вычислимых представлениях Коши стандартной топологии на **R** // Материалы 53-й международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск : НГУ, 2015. С. 9.

[47] Kornev R. Reducibilities of computable metrics on the real line // Мальцевские чтения 2016. Тезисы докладов. Новосибирск, 2016. С. 62.

[48] Kornev R. Reducibilities of computable metrics on the real line // Bull. Symb. Logic. 2017. V. 23, N 2. P. 247.

[49] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Logic Colloquium 2018. Programme and abstracts. Udine, 2018. P. 97-98.

[50] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Fifteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2018. Program and abstracts. 2018. P. 49.

[51] Kornev R. Embeddings of partial orderings into reducibility of real metrics // Мальцевские чтения 2019. Тезисы докладов. Новосибирск, 2019. С. 93.

[52] Kornev R. On a semilattice of degrees of computable metrics // Мальцевские чтения 2020. Тезисы докладов. Новосибирск, 2020. С. 130.