На правах рукописи

Дудкин Федор Анатольевич

ГРУППОВЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ГРУПП БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Романовский Николай Семёнович

Официальные оппоненты:
Азаров Дмитрий Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ивановский государственный университет", профессор кафедры фундаментальной математики

Мясников Алексей Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Технологический институт Стивенса, г. Хобокен, США, выдающийся профессор кафедры математических наук

Тимошенко Евгений Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Новосибирский государственный технический университет", профессор кафедры алгебры и математической логики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"

Защита состоится 19 мая 2022 года в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан ___ _________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент А.И. Стукачёв

Общая характеристика работы

Постановка задачи. Часто интерес к той или иной конечно порождённой группе обусловлен тем, что она вкладывается в группу автоморфизмов некоторой важной системы $\mathscr{A}$ (векторного пространства, графа, другой группы и т.д.). Если удаётся описать такие группы и изучить их свойства, это приводит к более полному пониманию свойств самой системы $\mathscr{A}$.

Конечно порождённая группа, которая действует на дереве так, что все вершинные и рёберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, называется *обобщённой группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). Обобщённые группы Баумслага–Солитера являются основным объектом изучения настоящей диссертации.

По теореме Басса-Серра, всякая GBS группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$ [74], вершинные и рёберные группы которого бесконечные циклические. Вложения рёберных групп в вершинные в этом случае удобно задавать целыми ненулевыми числами — образами порождающих рёберных групп в вершинных группах (последние отождествляем с $\mathbb{Z}$). Такие целые числа называются метками на рёбрах. Поэтому всякой GBS группе G можно сопоставить граф с метками $\mathbb{A}$. Такой граф с метками соответствует действию группы G на дереве и задаёт копредставление группы G.

В диссертации изучаются теоретико групповые и алгоритмические свойства GBS групп и их зависимость от соответствующих графов с метками.

Наряду с классическими алгоритмическими проблемами теории групп — проблемой изоморфизма и проблемой вложения — мы исследуем универсальную эквивалентность GBS групп. Универсально эквивалентные группы имеют одинаковую c-размерность, т. е. максимальную длину цепей строго вложенных централизаторов. Поэтому описание централизаторов элементов и подмножеств весьма полезно для изучения универсальной эквивалентности. Кроме того, такое описание играет важную роль для решения уравнений в группах. В диссертации получено полное описание централизаторов и централизаторной размерности GBS групп.

Оказалось, что GBS группы могут обладать весьма различными свойствами в зависимости от графа с метками. Поэтому естественной представляется следующая задача: для данного класса групп $\mathscr{K}$ описать такие графы с метками, которые задают GBS группы, принадлежащие классу $\mathscr{K}$. В диссертации получены результаты подобного типа для $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых групп и групп n-узлов. В 2015 году Ж.Левитт [61] описал все небольшие GBS группы и поставил вопрос об описании подгрупп конечного индекса в них. Эти подгруппы тоже являются GBS группами, и их полное описание получено в диссертации.

Особую роль в комбинаторной и геометрической теории групп играют группы Баумслага–Солитера. Г. Баумслаг и Д. Солитер [20] впервые предложили серию примеров групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются:

$$BS(m,n) = \langle\ a,\ t \mid t^{-1}a^m t = a^n\ \rangle.$$

Оказалось, что среди этих групп есть бесконечная серия нехопфовых групп. Кроме того, группы Баумслага–Солитера оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д.

Группа $BS(m,n)$ может действовать на дереве левых смежных по подгруппе $\langle a\rangle$ так, что стабилизаторы вершин и рёбер этого действия — бесконечные циклические группы. Поэтому группы Баумслага–Солитера и их подгруппы конечного индекса являются GBS группами. Изучение свойств и структуры групп Баумслага–Солитера и связь этих групп с обобщёнными группами Баумслага–Солитера — одна из задач диссертации.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Обобщённые группы Баумслага–Солитера впервые появляются как самостоятельный класс групп в 1990 году в работе П. Крофоллера [57]. Несмотря на то, что термин «обобщённые группы Баумслага–Солитера» в этой работе ещё не используется, установлены два важных свойства: нециклические GBS группы – в точности такие конечно порождённые группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу; GBS группы когерентны (всякая конечно порождённая подгруппа допускает конечное копредставление). Термин «обобщённые группы Баумслага–Солитера» находит активное употребление (и GBS группы начинают активно изучаться) с начала 2000-х годов.

В работах Д. Робинсона, Д. Дегриса, Н. Петросяна, Дж. Гандини, С. Мейнерта, Х. Рупинга, Н. Браунло, А. Манди, Д. Паска, Дж. Спилберга, А. Томаса, А. Дэльгадо, М. Тимма, К. Гийбо, М. Морана, К. Тиреля, К. Шрива и Ф. Фурнье-Фачио [69, 36, 47, 23, 35, 50, 51, 46] существенное внимание было уделено GBS группам именно с точки зрения их геометрических свойств, действия на различных объектах и гомологических свойств.

Обобщённые группы Баумслага–Солитера, как и группы Баумслага–Солитера, служат источником примеров и контрпримеров. Это отражено в работах М. Форестера, И. Рипса и Ж. Зелы [44, 71].

Существенная часть исследований GBS групп находится в классическом русле теории групп — в работах Ж. Левитта, А. Дэльгадо, Д. Робинсона, М. Тимма, С. Мейнерта, Дж. Баттона, П. Крофоллера и Б. Бикера [60, 61, 32, 33, 64, 27, 34, 21] изучаются структурные и комбинаторные свойства GBS групп $\pi_1(\mathbb{A})$ в зависимости от графа с метками $\mathbb{A}$.

Проблеме изоморфизма GBS групп посвящена серия работ М. Форестера и М. Клэя [43, 45, 28, 29, 30].

Особое место при изучении GBS групп занимает вопрос об их связи с группами Баумслага–Солитера. Такая связь изучается в работах К. Вайта, Ж. Левитта, Д. Кочлуковой [83, 62, 56].

Обобщённые группы Баумслага–Солитера привлекают внимание и более широкого круга исследователей. В 2013 году в Сент-Андрусе прошла конференция «Groups St Andrews», на которой Д. Робинсон сделал часовой доклад о GBS группах. В своем докладе [70] он дал обзор недавних результатов о GBS группах, сформулировал ряд открытых проблем и гипотез. Ещё раньше, в 2010 году, Д. Робинсон [68] опубликовал обзор результатов о GBS группах, в котором отмечал, что эти группы обладают интересными теоретико-групповыми и алгоритмическими свойствами, а также имеют тесную связь с алгебраической топологией.

Абстрактный соизмеритель $Comm(G)$ группы G описывает богатство классов изоморфизмов подгрупп конечного индекса группы G. Несмотря на то, что для конечных групп $Comm(G)$ является тривиальной группой, для бесконечных групп, как правило, она содержит гораздо больше информации о группе G, чем группа $Aut(G)$. Например, $Aut(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Z})$, в то время, как $Comm(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Q})$. Менее очевидный и очень интересный факт заключается в том, что $Comm(G)$ существенно определяет возможные структуры топологических групп, содержащих G как открытую подгруппу.

Абстрактный соизмеритель точно описан лишь для нескольких классов групп. Для группы MCG_g классов отображений поверхностей Н. Иванов [53] нашёл $Comm(MCG_g)$. Б. Фарб и М. Хэндэль [42] доказали, что $Comm(Out(F_n)) \cong Out(F_n)$ для $n \geqslant 4$. К. Лейнингер и Д. Маргалит [58] нашли абстрактный соизмеритель группы кос B_n на $n \geqslant 4$ нитях. Для группы Ноттингема абстрактный соизмеритель подсчитал М. Ершов [40]. О. В. Богопольский [24] описал устройство $Comm(BS(1, n))$.

Для изучения абстрактного соизмерителя групп Баумслга–Солитера необходимо знать описание и свойства подгрупп конечного индекса этих групп. Такое описание было получено в кандидатской диссертации автора [38]. Кроме того, необходимо получить описание групп автоморфизмов этих подгрупп. Описание автоморфизмов самих групп Баумслага–Солитера может быть найдено в [31].

Поиск неприводимых представлений групп – важная задача теории групп. Если для группы G имеется описание неприводимых представлений, то это даёт не только понимание её групповой структуры, но и позволяет эффективнее производить вычисления в группе G. Д. Маклаури [63] описал неприводимые представления группы $BS(m, n)$ с помощью алгебраической геометрии. Пусть $\varphi\colon BS(m, n) \to GL_n(\mathbb{C})$ – произвольное неприводимое представление и $\mathbb{A}$ замыкание группы $\langle\varphi(a)\rangle$ в топологии Зарисского, а $\mathbb{G}$ – замыкание всего образа $\varphi(BS(m, n))$. Решающее значение в работе Д. Маклаури имеет теорема о том, что группа $\mathbb{A}$ является нормальной подгруппой группы $\mathbb{G}$.

Пусть p и q – взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1, группа G является GBS группой и $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$ – модулярный гомоморфизм. Понятно, что если $BS(p, q) \leqslant G$, то $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$. Обратно, если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^p x = y^q$, при $y \neq 1$. Однако, неясно, верно ли, что в этом случае группа $BS(p, q)$ является подгруппой группы G. В 2007 году Ж. Левитт [60] среди прочих замечаний пишет, что, скорее всего, неверно то, что группа G содержит $BS(p, q)$, даже если $\frac{p}{q} \neq \pm 1$ принадлежит $\Delta(G)$. Позже [62], изучая GBS факторгруппы и подгруппы групп Баумслага–Солитера, Ж. Левитт решает этот вопрос. Он доказывает, что если $\pm 1 \neq \frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G есть подгруппа $BS(p, q)$. Основной инструмент доказательства – теория накрытий, предложенная Х. Бассом в 1993 году [19]. Эта проблема одновременно и независимо решена автором представленной диссертации. Кроме того, что работы были опубликованы почти одновременно, о независимости говорит ещё и тот факт, что в рамках диссертации не только доказано наличие вложения, но и предложены конкретные образы порождающих.

Работы [56, 62, 83] показывают, что свойства GBS групп сильно зависят от образа модулярного гомоморфизма. Теперь становится ясно, что образ модулярного гомоморфизма, в свою очередь, соответствует наличию в GBS группах подгрупп, изоморфных группам Баумслага–Солитера. Так проясняется связь GBS групп и их подгрупп Баумслага–Солитера.

Решения проблемы изоморфизма, полученные ранее, были найдены при существенных ограничениях на образ модулярного гомоморфизма или на структуру графа с метками. Такие ограничения, как правило, приводили к тому, что допустимые скольжения поддавались описанию, и это позволяло решить проблему изоморфизма. Тем не менее последовательности скольжений могут быть устроены весьма сложно. До настоящего времени не было ясно, можно ли с помощью скольжения одного ребра получить ту или иную метку на этом ребре. В диссертации без ограничений на структуру графа с метками мы получаем исчерпывающее описание допустимых скольжений одного ребра.

Основная сложность в описании множества всех графов с метками, которые задают данную GBS группу, заключается в том, что в последовательности преобразований, соединяющих два данных графа с метками из этого множества, скольжения различных рёбер могут чередоваться, каждый раз внося существенные изменения в структуру графа с метками. Это создаёт непреодолимые сложности для попыток получить некоторое разумное описание такого множества графов с метками. Тем не менее, если мы предположим, что только на одном ребре метки могут неограничено расти, то с помощью описания меток на таком ребре удаётся получить желаемое описание множества всех графов с метками, представляющих данную GBS группу, которое не только доказывает разрешимость проблемы изоморфизма в этом случае, но и позволяет предложить алгоритм для решения этой проблемы.

Ещё одна классическая алгоритмическая проблема теории групп — проблема вложения. Для GBS групп, представленных графами с метками, её можно сформулировать так: определить алгоритмически, когда два данных графа с метками $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ задают GBS группы G_1 и G_2 так, что G_1 вкладывается в G_2.

Проблема вложения для групп Баумслага–Солитера изучалась с двух позиций. С одной стороны, для простых p и q все графы с метками, фундаментальные группы которых вкладываются в $BS(p,q)$, были описаны в [37]. Более того, для взаимно простых p и q, таких, что $p \neq \pm 1$ и $q \neq \pm 1$, графы с метками, соответствующие подгруппам конечного индекса групп $BS(p,q)$, были описаны в [38]. С другой стороны, для взаимно простых целых p и q, отличных от 0, 1 и -1, было доказано [62], [86], что $BS(p,q)$ вкладывается в GBS группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.

Теория накрытий Х. Басса [19] является удобным инструментом для изучения подгрупп GBS групп. Даже несмотря на технические сложности, связанные с применением основных результатов этой теории, она помогает изучать алгоритмическую разрешимость проблемы вложения для графов групп. Более того, теория позволяет не только доказывать наличие вложения, но и строить конкретные отображения.

А. Мясников и П. Шумяцкий [67] в 2004 году предложили называть централизаторной размерностью группы G максимальную длину цепочки вложенных централизаторов в группе G (обозн. $cdim(G)$). Если такого числа не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$. В [39] А. Дункан, И. Казачков и В. Н. Ремесленников доказывают, что для каждого $m \geqslant 1$ класс групп данной централизаторной размерности m аксиоматизируется универсальной формулой логики первого порядка. Поэтому описание централизаторной размерности GBS групп может способствовать изучению универсальной теории GBS групп и решению вопроса об их универсальной эквивалентности.

Более того, в [39] А. Дункан, И. Казачков и В. Н. Ремесленников отмечают, что понятие централизаторной размерности совпадает с понятием высоты решётки централизаторов, предложенным Р. Шмидтом в 1970 году [72]. Решётки централизаторов изучались для различных групп большим числом авторов, например [10, 17, 22, 25, 41, 52, 55, 59, 73, 80, 81, 82].

Группа G называется аппроксимируемой группами из некоторого класса $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента g относительно которого отличен от единицы. В случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, такая группа называется финитно аппроксимируемой. Если π –

непустое множество простых чисел, и $\mathcal{K} = \mathcal{F}_\pi$ – класс всех конечных π-групп, то группа G называется $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой.

В 1957 году К. Грюнберг [49], обсуждая идею аппроксимируемости различными классами групп (классом конечных, разрешимых, нильпотентных, p-групп и т.д.), предложил к рассмотрению понятие корневого класса групп $\mathscr{K}$. Это понятие выделяет общие важные свойства рассматриваемых классов и является довольно широким. В частности, классы всех конечных групп, конечных p-групп, разрешимых групп и всех групп без кручения являются корневыми. В 2021 году Е. В. Соколов [78] изучает аппроксимируемость GBS групп корневыми классами групп и получает критерии аппроксимируемости GBS групп нильпотентными, нильпотентыми без кручения и свободными группами.

Для группы $BS(m, n)$ доказано в 1972 году [65], что такая группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m = \pm 1$, или $n = \pm 1$, или $m = \pm n$. В [83] доказано, что квазиизометричные GBS группы одновременно финитно аппроксимируемы или нет.

В 2008 году Д. Молдаванский и О. Иванова установили [7] критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости разрешимых групп Баумслага–Солитера.

Так как $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемые группы являются финитно аппроксимируемыми, то для описания $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых GBS групп надо знать, какие из них финитно аппроксимируемы. В 2015 году Ж. Левитт описал [62] все финитно аппроксимируемые GBS группы. Оказалось, что GBS группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна $BS(1, n)$ или $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$. В диссертации изучается вопрос $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости GBS групп.

Вообще, вопросами аппроксимируемости свободных конструкций занималось большое число алгебраистов. Особое место в этой деятельности занимают работы специалистов из Иваново, например [1, 2, 3, 4, 18, 66, 75, 76, 77, 79].

Группа n-узла — это фундаментальная группа $\pi_1(S^{n+2} - K^n, a)$ дополнения n-узла K^n в $n+2$-мерной сфере S^{n+2}. Начиная с 1-узла, можно построить копредставление Виртингера группы узла с соотношениями вида $x_i^w = x_j$, где x_i, x_j – порождающие, а w – некоторое слово. Базовые свойства групп узлов можно найти в монографиях А. Каваучи и Ю. Кузьмина [11, 54].

Обратно, если группа G задана копредставлением, как ответить на вопрос: будет ли это группа подходящего n-узла? В общем случае ответ неизвестен. Однако, можно использовать некоторые свойства групп узлов для того, чтобы найти необходимые условия. Например, всякая группа узла является нормальным замыканием одного элемента потому, что в копредставлении Виртингера все порождающие сопряжены. Аналогично можно понять, что абелианизация G/G' является бесконечной циклической группой. Кроме того, $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ [57].

М. Кервер доказал, что если конечно порождённая группа G удовлетворяет всем этим условиям, то G является группой n-узла для всякого $n \geq 3$. Эти замечания оказываются чрезвычайно полезны для изучения GBS групп, которые являются группами n-узлов для $n = 1$ и $n \geq 3$.

Особое направление в теории групп на стыке с математической логикой — изучение универсальных и экзистенциальных свойств групп. Напомним, что универсальная (экзистенциальная) теория группы G — это множество $\forall$ ($\exists$)-формул, истинных на группе G, обозначается $Th_\forall(G)$ ($Th_\exists(G)$). Две группы называются универсально (экзистенциально) эквивалентными, если их универсальные (экзистенциальные) теории совпадают. Заметим, что универсальная эквивалентность равносильна экзистенциальной эквивалентности. Понятие универсальной (экзистенциальной) эквивалентности является ослаблением понятия изоморфизма.

Для групп универсальную эквивалентность исследовали: Ю. Гуревич, А. Кокорин в 1963 году [6] — для абелевых упорядоченных групп; Е. Тимошенко в 1968 году [15] — для сплетений групп и в 2010 году [16] — для частично коммутативных метабелевых групп; М. Касальс-Руис и И. Казачков в 2012 году [9] — для групп Баумслага–Солитера; А. Мищенко, Е. И. Тимошенко в 2011 году [12] — для частично коммутативных нильпотентных групп; А. Г. Мясников, Н. С. Романовский в 2011 году [13] — для жёстких разрешимых групп; Е. Бунина, Г. Калеева в 2016 году [5] — для линейных групп над полями и Г. Калеева в 2019 году [8] — для линейных групп над локальными кольцами с 1/2. В диссертации представлены первые результаты об универсальной эквивалентности обобщённых групп Баумслага–Солитера.

Таким образом, мы видим, что несмотря на то, что класс GBS групп был определён не так давно, большое количество специалистов изучают эти группы с разных сторон. Это показывает, что обобщённые группы Баумслага–Солитера представляют существенный интерес для современных исследователей. Несмотря на это, много актуальных вопросов для GBS групп остаются открытыми. Поэтому стоит уделять больше усилий изучению GBS групп и их свойств.

Цель и основные результаты диссертации. Цель диссертации состоит в разработке методов изучения теоретико групповых и алгоритмических свойств обобщённых групп Баумслага–Солитера. Основные результаты диссертации таковы:

1. Описана структура абстрактного соизмерителя групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами. Описаны неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами. Найден критерий вложимости групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами в GBS группу. Вложения построены явно. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2007 года [84, 85, 86].

2. Для произвольной GBS группы описана централизаторная размерность. Указан алгоритм для вычисления c-размерности GBS групп. Найден критерий универсальной эквивалентности GBS групп, представленных деревьями с метками. Построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких GBS групп [87, 89, 90, 93].

3. Указан критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости GBS групп. Описаны все группы n-узлов, которые действуют на деревьях с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и рёбер. Явно описаны подгруппы конечного индекса небольших GBS групп и изучены их свойства. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2015 года [94, 95, 96].

4. Указан критерий вложения произвольной GBS группы в GBS группу, представленную конечным числом редуцированных графов с метками. Описан алгоритм проверки вложимости и построения вложения. Для GBS групп G, заданных графом с метками с одним мобильным ребром, указан алгоритм проверки изоморфизма произвольной GBS группы и группы G [88, 91, 92].

Результаты диссертации опубликованы в работах [84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Все основные результаты, кроме третьего, получены автором лично. Результат работы [95] получен в неразделимом соавторстве с А. С. Мамонтовым с решающим вкладом автора диссертации.

Новизна, теоретическая и практическая значимость результатов. Из работы П. С. Новикова [14] 1952 года следует, что в классе конечно определенных групп проблема изоморфизма алгоритмически неразрешима. Поэтому особый интерес представляет задача поиска интересных больших классов конечно определенных групп, для которых проблема изоморфизма разрешима. В последнее время были предприняты существенные усилия для решения проблемы изоморфизма GBS групп, однако, пока они не увенчались успехом. По определению всякая GBS группа может быть получена с помощью свободных конструкций из бесконечных циклических групп. Поэтому интуитивно GBS группы воспринимаются как вполне понятный объект для изучения. Эти соображения показывают, что класс GBS групп является значимым объектом в теории групп, и важно изучать алгоритмические и групповые свойства групп этого класса.

В диссертации получены результаты о структуре и свойствах GBS групп и их связи с группами Баумслага–Солитера. Все основные результаты диссертации являются новыми, что подтверждается публикациями автора в рецензируемых научных журналах и докладами на конференциях.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны в первую очередь специалистам по теории групп, теории алгоритмов и алгоритмической сложности. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические алгебраические методы и некоторые специальные методы комбинаторной и геометрической теории групп: задание групп с помощью копредставлений и преобразования Титце; элементы теории Басса–Серра; теория накрытий Х. Басса – для описания подгрупп данной GBS группы; специальные преобразования графов с метками; базовые факты матричной алгебры – для описания решения возникающих систем линейных уравнений; некоторые базовые свойства универсальных теорий.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на секционных докладах следующих конференций: международная конференция «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2012, 2014 гг.), международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция» (г. Минск, Республика Беларусь, 5–9 ноября 2012 г.), международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В. Д. Мазурова (г. Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (б.о. Эрлагол, Республика Алтай, 2013, 2017, 2019 гг.), международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (г. Минск, Республика Беларусь, 14–18 сентября 2015 г.), международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (г. Тула, 25–30 мая 2015 г.), международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (п. Эльбрус, Кабардино-Балкарская Республика, 17–22 мая 2017 г.), школа-конференция по теории групп, посвящённая 65-летию А. А. Махнева (г. Геленджик, 13-20 мая 2018 г.), международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (г. Москва, 28–31 мая 2019 г.).

Кроме того, по результатам диссертации были подготовлены следующие пленарные доклады: «Некоторые алгоритмические вопросы для групп, действующих на деревьях» на международной научной конференции «Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости» (г. Иваново, 2–5 декабря 2015 г.), «Алгоритмические проблемы для обобщённых групп Баумслага–Солитера» на международной конференции «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 21–25 ноября 2016 г.), «Централизаторная размерность обобщённых групп Баумслага–Солитера» на всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов» (г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.), «Обобщённые группы Баумслага–Солитера: свойства, результаты, проблемы» на международной конференции «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 20–24 сентября 2021 г.).

Результаты работы были доложены на семинарах «Геометрическая теория групп», «Эварист Галуа», «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и НГУ.

Содержание диссертации

Структура и объем диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь состоят из параграфов. Основные результаты диссертации называются теоремами. Все утверждения — предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы – имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер параграфа, третье – номер утверждения. Рисунки и формулы имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер рисунка или формулы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 173 страницах, библиография содержит 105 наименований. В диссертации имеется 37 рисунков.

Во **введении** содержится постановка задачи, обосновывается актуальность темы исследования, освещается степень ее разработки; изложены цели, задачи, методы исследования и основные результаты диссертации; отражены новизна и научная значимость работы и данные об апробации. Также приведены сведения о публикации результатов диссертации.

В **первой главе** формулируются основные определения, использующиеся на протяжении всей диссертации, вводятся обозначения и устанавливаются соглашения. Приводятся формулировки некоторых известных результатов, которые используются в доказательствах. Глава состоит из трёх параграфов.

Вторая глава содержит описание структуры абстрактного соизмерителя групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами. В главе получено описание неприводимых представлений подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами, найден критерий вложимости групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами в GBS группу, вложения построены явно. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2007 года. Глава состоит из трёх параграфов.

В первом параграфе получено описание структуры абстрактного соизмерителя групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами. Пусть B_m — граф-цикл с вершинами $c_1, c_2, \ldots, c_m$ и ребрами $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Поставим в соответствие вершинам и ребрам графа B_m бесконечные циклические группы $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и $E_1, E_2, \ldots, E_m$ соответственно. Пусть $\alpha_{e_i} \colon b_i \mapsto c_i^q$ и $\omega_{e_i} \colon b_i \mapsto c_{i+1}^p$ — вложения рёберной группы $E_i = \langle b_i \rangle$ в вершинные группы $C_{i+1} = \langle c_{i+1} \rangle$ и $C_i = \langle c_i \rangle$ вершин c_{i+1} и c_i, инцидентных ребру e_i. Эти вложения обозначены на рис. 1 метками p и q на началах и концах рёбер e_i. Построен граф групп $\mathbb{B}_m$. Обозначим через $H_m = \pi_1(\mathbb{B}_m)$ фундаментальную группу графа групп $\mathbb{B}_m$.

По определению фундаментальной группы графа групп,

$$H_m \cong \left\langle c_1, c_2, \ldots, c_m, d \mid d^{-1} c_1^p d = c_m^q, c_i^q = c_{i+1}^p, i = 1, 2, \ldots, m-1 \right\rangle. \quad (1)$$

Заметим, что группа $BS(p, q)$ изоморфна H_1. В [38] доказано, что

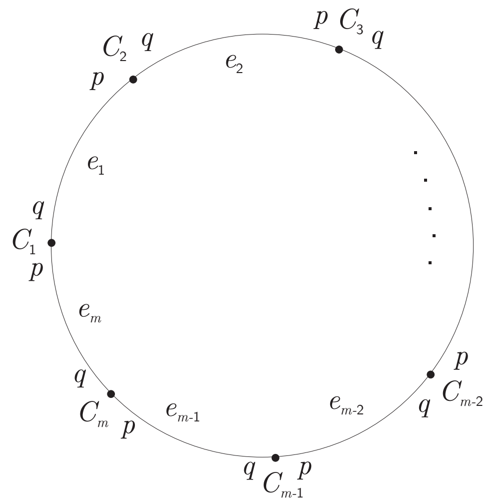

Рис. 1: Граф групп $\mathbb{B}_m$.

всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$ изоморфна некоторой группе H_m. Так как автоморфизм подгруппы конечного индекса является изоморфизмом, то для описания $Comm(BS(p,q))$ нужно знать $Aut(H_m)$. Группу $Aut(H_1) = Aut(BS(p,q))$ описал Д. Коллинз [31].

Теорема 2.1.1. *Группа* $Aut(H_m)$ *имеет копредставление*

$$\Big\langle S, A, I \mid I^2 = 1, [S, I] = 1, A^I = A^{-1}, A^q = S^{-1}A^pS,$$

$$[S^m, A]^q = S^{-1}[S^m, A]^pS, [[S^m, A], S^{-k}AS^k] = 1, k = 0, 1, \ldots, m-1\Big\rangle.$$

Обозначим через $\mathbb{Q}_{p,q}$ подгруппу рациональных чисел $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}, mn \perp pq\}$ относительно умножения. В группе $Aut(H_m)$ есть подгруппа индекса 2, порождённая элементами A и S, обозначим её через L_m. Мы докажем, что если $m \mid n$, то группа L_m вкладывается в L_n. Кроме того, будет задано действие группы $\mathbb{Q}_{p,q}$ автоморфизмами на прямом пределе групп L_m и доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.2. $Comm(BS(p,q)) \cong \underrightarrow{lim} L_m \rtimes \mathbb{Q}_{p,q}$.

Во втором параграфе найдены все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ (теорема 2.2.1) и установлен критерий их эквивалентности (замечание 2.2.2). При этом использованы только стандартные факты линейной алгебры и теории чисел.

В третьем параграфе найден критерий вложимости групп Баумслага-Солитера с взаимно простыми параметрами в GBS группу, вложения построены явно.

Теорема 2.3.1. *Группа Баумслага–Солитера $BS(p,q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.*

Эта теорема даёт ответ на вопрос Ж. Левитта 2007 г.

Третья глава посвящена описанию централизаторной размерности произвольной GBS группы. Получен алгоритм для вычисления централизаторной размерности, найден критерий универсальной эквивалентности GBS групп, представленных деревьями с метками и построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких GBS групп. Глава содержит четыре параграфа.

В первом параграфе описана централизаторная размерность всех GBS групп, у которых $\Delta(G) \nsubseteq \{\pm 1\}$. В этом случае либо $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, и тогда, по теореме 3.1.1, $cdim(G) = \infty$, либо $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. В последнем случае описание централизаторной размерности даёт теорема 3.1.2.

Теорема 3.1.1. *Если в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^px = y^q$ при $y \neq 1$, то централизаторная размерность группы G бесконечна.*

Теорема 3.1.2. *Пусть $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. Если $G \ncong BS(1,n)$, то централизаторная размерность группы G бесконечна. Централизаторная размерность группы $BS(1,n)$ равна 3.*

Во втором параграфе изучается централизаторная размерность GBS групп, представленных деревьями с метками. Если $\mathbb{A}$ — дерево с метками, то теорема 3.2.1 полностью описывает возможные значения централизаторной размерности $\pi_1(\mathbb{A})$. Это дает возможность получить описание решетки централизаторов в таких группах (замечание 3.2.27).

Теорема 3.2.1. *Пусть $\mathbb{A}$ — редуцированное дерево с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$, тогда $cdim(G) \leqslant 2 \cdot |V(A)| - 1$, число $cdim(G)$ нечётное. Для любого нечётного числа l от 3 до $2 \cdot n - 1$ найдется редуцированное дерево с* *метками* $\mathbb{B}$ *на* n *вершинах такое, что* $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = l$.

В третьем параграфе мы завершаем полное описание централизаторной размерности GBS групп и предлагаем способ её вычисления.

Утверждение 3.3.22. *Пусть* $\mathbb{A}$ *– редуцированный граф с метками,* $\pi_1(\mathbb{A})$ *неабелева,* $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) = \{1\}$, *и* $b_1(A) = n$. *Тогда* $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$ *нечётна, и*

$$3 \leqslant cdim(\pi_1(\mathbb{A})) \leqslant 2 \cdot |E(A)| + 1.$$

Кроме того, для всякого нечётного $k, 3 \leqslant k \leqslant 2 \cdot m + 1$ *найдется граф с метками* $\mathbb{B}_{m,n}$ *с* m *ребрами такой, что* $b_1(B_{m,n}) = n \leqslant m$, $\Delta(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = \{1\}$ *и* $cdim(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = k$.

Теорема 3.3.28. *Пусть* $\mathbb{A}$ *– редуцированный граф с метками, группа* $\pi_1(\mathbb{A})$ *неабелева,* $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) = \{\pm 1\}$ *и* $b_1(A) = n$. *Тогда* $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$ *нечётна, и*

$$3 \leqslant cdim(\pi_1(\mathbb{A})) \leqslant 2 \cdot |E(A)| + 3.$$

Кроме того, для всякого нечётного $k, 3 \leqslant k \leqslant 2 \cdot m + 3$ *найдется граф с метками* $\mathbb{B}_{m,n}$ *с* m *ребрами такой, что* $1 \leqslant b_1(B_{m,n}) = n \leqslant m$, $\Delta(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = \{1\}$, *и* $cdim(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = k$.

В четвертом параграфе мы описываем эквивалентность GBS групп, представленных деревьями с метками, с точки зрения их универсальных (экзистенциальных) теорий.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— деревья с метками, и соответствующие* GBS *группы* $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $H = \pi_1(\mathbb{B})$ *неабелевы. Тогда группы* G *и* H *универсально (экзистенциально) эквивалентны тогда и только тогда, когда* G *вкладывается в* H, *и* H *вкладывается в* G.

Кроме того, получен легко проверяемый критерий универсальной (экзистенциальной) эквивалентности для GBS групп централизаторной размерности 3, представленных деревьями с метками (теорема 3.4.3).

В **четвертой главе** указан критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости GBS групп, описаны все группы n-узлов, которые действуют на деревьях с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и рёбер, явно описаны подгруппы конечного индекса небольших GBS групп и изучены их свойства. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2015 года. Глава содержит три параграфа.

В первом параграфе мы докажем критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\mathbb{A}$ – граф с метками, представляющий GBS группу G. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $G \cong BS(1, n)$ и n удовлетворяет условиям утверждения 1.3.2;

2) $\Delta(G) = \{1\}$ и все метки $\mathbb{A}$ – π-числа;

3) $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, все метки $\mathbb{A}$ – π-числа и $2 \in \pi$.

Во втором параграфе описаны GBS группы, которые являются группами n-узлов при $n \neq 2$.

Теорема 4.2.1. *Пусть G — GBS группа. Тогда G является группой 1-узла тогда и только тогда, когда $G \cong T(p, q)$ для некоторых взаимно простых p, q.*

Теорема 4.2.2. *Пусть G — GBS группа, $G \ncong \mathbb{Z}$. Тогда G является группой n-узла для $n \geq 3$ тогда и только тогда, когда G изоморфна факторгруппе либо группы $BS(m, m+1)$, где $m \geq 1$, либо группы $T(p, q)$ для некоторых взаимно простых p, q.*

После теоремы 6.7 в [61] Ж. Левитт пишет, что было бы интересно получить обобщение результатов работ [26, 38, 48] для небольших GBS групп. В третьем параграфе получено такое обобщение (теорема 4.3.1).

Пятая глава содержит критерий вложения произвольной GBS группы в GBS группу, представленную конечным числом редуцированных графов с метками. В данной главе описан алгоритм проверки вложимости и построения вложения, для GBS групп G, заданных графом с метками с одним мобильным ребром, указан алгоритм проверки изоморфизма произвольной GBS группы и группы G. Глава содержит три параграфа.

В первом параграфе мы изучаем проблему вложения GBS групп: определить алгоритмически, когда два графа с метками $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ задают такие GBS группы G_1 и G_2, что G_1 изоморфно вкладывается в G_2. Наш основной инструмент — теория накрытий для графов групп Х. Басса [19]. Для графа с метками $\mathbb{A}$, обозначим множество редуцированных графов с метками, фундаментальная группа которых изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$, через $R(\mathbb{A})$.

Теорема 5.1.2. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — графы с метками. Если $|R(\mathbb{A})| < \infty$, то проблема вложения $\pi_1(\mathbb{A})$ в $\pi_1(\mathbb{B})$ алгоритмически разрешима.*

Алгоритм и вложение из теоремы 5.1.2 указаны явно.

Второй параграф содержит описание возможных меток на ребре, которые можно получить с помощью скольжений (теорема 5.2.1).

Ребро e графа с метками $\mathbb{A}$ называется *мобильным*, если существует $t \in \pi_1(\mathbb{A})$ такой, что G_e^t строго содержится в G_e. Здесь G_e – реберная циклическая группа, соответствующая ребру e.

В третьем параграфе представлен алгоритм, решающий проблему изоморфизма в случае, когда у одного из графов с метками мобильное ребро одно.

Теорема 5.3.1. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — графы с метками, и число мобильных рёбер $\mathbb{A}$ не более 1. Тогда существует алгоритм, решающий проблему изоморфизма групп $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$. Если $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$, то изоморфизм можно найти алгоритмически.*

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному консультанту Николаю Семёновичу Романовскому за интерес к результатам диссертации и за тот пример высокой математической культуры и эффективности, которым он являлся для автора на протяжении многих лет; своему наставнику и учителю Валерию Авдеевичу Чуркину за постоянное плодотворное обсуждение идей и результатов диссертации; своему соавтору Андрею Сергеевичу Мамонтову за содействие в исследованиях; сотрудникам лаборатории алгебры Института математики им. С. Л. Соболева и кафедры алгебры и математической логики НГУ за прекрасную творческую атмосферу, в которой стала возможна подготовка диссертации. Отдельную благодарность автор выражает своей ученице Елизавете Алексеевне Шапориной за неизменную поддержку и сотрудничество.

Список литературы

[1] Д. Н. Азаров, О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением, Матем. заметки, 64, 1(1998), 3–13.

[2] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщённых свободных произведений групп конечного ранга, Сиб. матем. журн., 54, 6(2013), 1203–1215.

[3] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп, Матем. заметки, 96, 2(2014), 163–169.

[4] Д. Н. Азаров, Критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединённой циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов, Сиб. матем. журнал, 57, 3 (2016), 483–494.

[5] Е. И. Бунина, Г. А. Калеева, Универсальная эквивалентность общих и специальных линейных групп над полями, Фундамент. и прикл. матем., 21, 3(2016), 73–106.

[6] Ю. Ш. Гуревич, А. И. Кокорин, Универсальная эквивалентность упроядоченных абелевых групп, Алгебра и логика, 2, 1(1963), 37–39.

[7] О. А. Иванова, Д. И. Молдаванский, Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением, Науч. труды ИвГУ, Математика, 6(2008), 51–58.

[8] Г. А. Калеева, Универсальная эквивалентность линейных групп над локальными коммутативными кольцами с $1/2$, Алгебра и логика, 58, 4(2019), 467–478.

[9] М. Касальс-Руис, И. В. Казачков, Два замечания о теориях первого порядка групп Баумслага–Солитэра, Сиб. матем. журн., 53, 5(2012), 1007–1012.

[10] Л. Ф. Косвинцев, Конечные группы с максимальными централизаторами элементов, Мат. заметки, 13, 4(1973), 577–580.

[11] Ю. В. Кузьмин, Гомологическая теория групп, М.: Факториал Пресс, 2006, 352 с.

[12] А. А. Мищенко, Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 52, 5(2011), 1113–1122.

[13] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Об универсальных теориях жёстких разрешимых групп, Алгебра и логика, 50, 6(2011), 802–821.

[14] П. С. Новиков, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества теории групп, Докл. АН СССР., 85, 4(1952), 709–712.

[15] Е. И. Тимошенко, О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении, Алгебра и логика, 7, 4(1968), 114–119.

[16] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 49, 2(2010), 263–290.

[17] F. A. M. Aldosray and I. Stewart, Lie algebras with the minimal condition on centralizer ideals. Hiroshima Math. J., 19, 2(1989), 397–40.

[18] D. Azarov, Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation, Commun. in Algebra., 43, 4(2015), 1464–1471.

[19] H. Bass, Covering theory for graphs of groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 89, 1(1993), 3–47.

[20] G. Baumslag, D. Solitar, Some two-generator one-relator non-hopfian groups, Bull. AMS, 68, 3(1962), 199–201.

[21] B. Beeker, Multiple conjugacy problem in graphs of free abelian groups, Groups Geom. Dyn., 9, 1(2015), 1–27.

[22] V. Bludov, On locally nilpotent groups with the minimal condition on centralizers. In Groups St. Andrews 1997 in Bath, I, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 260, 81–84, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[23] N. Brownlowe, A. Mundey, D. Pask, J. Spielberg, A. Thomas, $\mathcal{C}^*$-algebras associated to graphs of groups, Advances in Math., 316(2017), 114–186.

[24] O. Bogopolski, Abstract commensurators of solvable Baumslag–Solitar groups, Commun. Algebra, 40, 7(2012), 2494–2502.

[25] R. M. Bryant, B. Hartley, Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralisers, J. Algebra, 61(1979), 326–334.

[26] J. O. Button, A formula for the normal subgroup growth of Baumslag-Solitar groups, J. Group Theory, 11, 6(2008), 879–884.

[27] J. O. Button, R. P. Kropholler, Nonhyperbolic free-by-cyclic and one-relator groups, New York J. Math., 22(2016), 755–774.

[28] M. Clay, M. Forester, On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups, Algebraic & Geometric Topology, 8(2008), 2289-–2322.

[29] M. Clay, Deformation spaces of G–trees and automorphisms of Baumslag–Solitar groups, Groups Geom. Dyn., 3(2009), 39–69.

[30] M. Clay, M. Forester, Whitehead moves for G-trees, Bull. Lond. Math. Soc., 2, 41(2009), 205–212.

[31] D. J. Collins, The automorphism towers of some one-relator groups, J. London Math. Soc., 3, 36(1978), 480–493.

[32] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Generalized Baumslag-Solitar groups and geometric homomorphisms, J. Pure Appl. Alg., 215, 4(2011), 398–410.

[33] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Generalized Baumslag-Solitar graphs with soluble fundamental groups, Alg. Coll., 21, 1(2014), 53–58.

[34] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Cyclic normal subgroups of generalized Baumslag–Solitar groups, Comm. Alg., 45, 4(2017), 1808–1818.

[35] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, 3-manifolds and generalized Baumslag–Solitar groups, Comm. Anal. Geom., 26, 3(2018), 571–584.

[36] D. Dieter, N. Petrosyan, Bredon cohomological dimensions for groups acting on CAT(0)-spaces. Groups Geom. Dyn., 9, 4(2015), 1231–1265.

[37] F. A. Dudkin, Subgroups of Baumslag-Solitar groups, Algebra and Logic, 48, 1(2009), 1–19.

[38] F. A. Dudkin, Subgroups of finite index in Baumslag-Solitar groups, Algebra and Logic, 49, 3(2010), 221–232.

[39] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Centralizer dimension and universal classes of group, Sib. Electron. Math. Rep., 3(2006), 197–215.

[40] M. Ershov, On the commensurator of the Nottingham group, Trans. Amer. Math. Soc., 362(2010), 6663–6678.

[41] E. S. Esyp, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov, Divisibility theory and complexity of algorithms for free partially commutative groups, Contemporary Math., Groups, Languages, Algorithms, 378(2005), 319—348.

[42] B. Farb, M. Handel, Commensurations of $Out(F_n)$, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 105(2007), 1–48.

[43] M. Forester, Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees, Geom. & Topol., 6(2002), 219–267.

[44] M. Forester, On uniquenes of JSJ decomposition of finitely generated groups, Comm. Math. Helv., 78(2003), 740–751.

[45] M. Forester, Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups, Geometriae Dedicata, 121, 1(2006), 43–59.

[46] F. Fournier-Facio, Ultrametric analogues of Ulam stability of groups, arXiv:2105.00516, preprint, 2021.

[47] G. Gandini, S. Meinert, H. Rüping, The Farrell–Jones conjecture for fundamental groups of graphs of abelian groups, Groups Geom. Dyn., 9, 3(2015), 783–792.

[48] E. Gelman, Subgroup growth of Baumslag-Solitar groups, J. Group Theory, 8, 6(2005), 801–806.

[49] K. W. Gruenberg, Residual properties of infinite soluble groups, Proc. Lond. Math. Soc., 7(1957), 29–62.

[50] C. Guilbault, M. Moran, C. Tirel, Boundaries of Baumslag–Solitar groups, Algebr. Geom. Topol., 19, 4(2019), 2077–2097.

[51] C. Guilbault, M. Moran, K. Schreve, Compressible spaces and $\mathcal{EZ}$-structures, arXiv:2007.07764, preprint, 2020.

[52] N. Ito, On finite groups with given conjugate types, Nagoya Math. J., 6(1953), 17–28.

[53] N. Ivanov, Automorphisms of complexes of Curves and of Teichmuller spaces, Inter. Math. Res. Not., 14(1997), 651–666.

[54] A. Kawauchi, A survey of knot theory, Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, and Berlin, 1996, 420 pp.

[55] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, Locally finite groups, Amsterdam-London, 1973.

[56] D. Kochloukova, Injective endomorphisms of the Baumslag-Solitar group, Algebra Colloq., 13, 3(2006), 525–534.

[57] P. H. Kropholler, Baumslag–Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two, Comment. Math. Helv. J., 65 (1990), 547–558.

[58] C. J. Leininger, D. Margalit, Abstract commensurators of braid groups, J. Algebra, 299, 2(2006), 447–455.

[59] J. C. Lennox, J. E. Roseblade, Centrality in Finitely Generated Soluble Groups, J. Algebra, 16(1970), 399–435.

[60] G. Levitt, On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups, Geom. & Topol., 11(2007), 473–515.

[61] G. Levitt, Generalized Baumslag-Solitar groups: rank and finite index subgroups, Annales de l'institut Fourier, 65, 2(2015), 725–762.

[62] G. Levitt, Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups, Journal of Group Theory, 18, 1(2015), 1–43.

[63] D. McLaury, Irreducible Representations of Baumslag-Solitar Groups, Journal of Group Theory, 15, 4(2012), 543-–552.

[64] S. Meinert, The Lipschitz metric on deformation spaces of G–trees, Algebraic & Geometric Topology, 15(2015), 987-–1029.

[65] S. Meskin, Nonresidually finite one-relator groups, Trans. Amer. Math. Soc., 164(1972), 105–114.

[66] D. I. Moldavanskii, Residual nilpotence of groups with one defining relation, Math. Notes, 107, 5(2020), 820–825.

[67] A. Myasnikov, P. Shumayatsky, Discriminating groups and c-dimension, J. Group Theory, 7, 1(2004), 135-–142.

[68] D. J. S. Robinson, Recent results on generalized Baumslag-Solitar groups, Note di Matematica, 30(2010), 37–54.

[69] D. J. S. Robinson, The Schur Multiplier of a Generalized Baumslag-Solitar Group, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 125(2011), 207–215.

[70] D. J. S. Robinson, Generalized Baumslag-Solitar groups: a survey of recent progress, Groups St Andrews 2013, LMS, Lecture Note Series 422, 2016, 457–469.

[71] E. Rips, Z. Sela, Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition, Ann. of Math. 146 (1997), 53–109.

[72] R. Schmidt, Zentralisatorverbande endlicher Gruppen, Rend. Dem. Math. Univ. Padova, 44(1970), 97–131.

[73] R. Schmidt, Characterisierung der einfachen Gruppe der Ordnung 175560 duch ihren Zentralisatorverbande, Math. Z., 116, 4(1970), 299–306.

[74] J. P. Serre, Trees. Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1980.

[75] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, Generalized direct products of groups and their application to the study of residuality of free constructions of groups, Algebra Logic, 58, 6(2020), 480–493.

[76] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, The root-class residuality of tree products with central amalgamated subgroups, Sib. Math. J., 61, 3(2020), 545–551.

[77] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, To the question of the root-class residuality of free constructions of groups, Lobachevskii J. Math., 41(2020), 260–272.

[78] E. V. Sokolov, Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups, Journal of Algebra, 582(2021), 1–25.

[79] E. A. Tumanova, The root class residuality of Baumslag–Solitar groups, Sib. Math. J., 58, 3(2017), 546–552.

[80] P. Vassiliou, Eine Bemerkung Ëuber die von dem Zentralisator bestimmte Abbildung, Prakt. Akad. Athenon, 42 (1967), 286–289.

[81] F. O. Wagner, Nilpotency in groups with the minimal conditionon centralizers, J. Algebra, 217, 2(1999), 448–460.

[82] B. A. F. Wehrfritz, Remarks on centrality and cyclicity in linear groups, J. Algebra 18(1971), 229–236.

[83] K. Whyte, The large scale geometry of the higher Baumslag-Solitar groups, Geom. & Func. Anal., 11(2001), 1327–1343.

Работы автора по теме диссертации

[84] Ф. А. Дудкин, Об абстрактном соизмерителе групп Баумслага—Солитера, Алгебра и логика, 52, 1(2013), 64–83.

[85] Ф. А. Дудкин, Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера, Сиб. матем. журн., 54, 6(2013), 1273–1279.

[86] Ф. А. Дудкин, О вложении групп Баумслага–Солитера в обобщённые группы Баумслага–Солитера, Сиб. матем. журн., 55, 1(2014), 90–96.

[87] Ф. А. Дудкин, О централизаторной размерности обобщённых групп Баумслага-Солитера, Алгебра и логика, 55, 5(2016), 611–615.

[88] Ф. А. Дудкин, О проблеме изоморфизма обобщённых групп Баумслага–Солитера с одним мобильным ребром, Алгебра и логика, 56, 3(2017), 300–316.

[89] Ф. А. Дудкин, О решётке централизаторов и централизаторной размерности обобщённых групп Баумслага–Солитера, Сиб. матем. журн., 59, 3(2018), 514–528.

[90] Ф. А. Дудкин, Об универсальной эквивалентности обобщённых групп Баумслага–Солитера, Алгебра и логика, 59, 5(2020), 529–541.

[91] F. A. Dudkin, On the embedding problem for generalized Baumslag–Solitar groups, Journal of Group Theory, 18, 4(2015), 655–684.

[92] F. A. Dudkin, Admissible slides for generalized Baumslag-Solitar groups, Siberian Electronic Mathematical Reports, 12(2015), 552–561.

[93] F. A. Dudkin, Computation of the centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15(2018), 1823–1841.

[94] F. A. Dudkin, $\mathcal{F}_\pi$-residuality of generalized Baumslag–Solitar groups, Archiv der Mathematik, 114, 2(2020), 129–134.

[95] F. A. Dudkin, A. S. Mamontov, On knot groups acting on trees, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 29, 9(2020), 2050062.

[96] F. A. Dudkin, Finite index subgroups in not large generalized Baumslag–Solitar groups, Comm. in Alg., 49, 9(2021), 3736–3742.

Дудкин Федор Анатольевич

ГРУППОВЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ГРУПП БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктор физико-математических наук

Подписано в печать 16.02.2022 Формат 60 x 84 1/16
Усл. печ. л. 1.0. Уг.-изд.п. 1,0.
Заказ N 100 Тираж 120 экз.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6