На правах рукописи

Мархабатов Нурлан Дарханулы

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВ ТЕОРИЙ

01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент **Судоплатов Сергей Владимирович**
Официальные оппоненты:	**Рыбаков Владимир Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», профессор кафедры алгебры и математической логики;
	Вербовский Виктор Валериевич, кандидат физико-математических наук, г. Алматы, Республика Казахстан, Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева, профессор кафедры инженерной механики и моделирования.
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Защита состоится 26 ноября 2021 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. ак. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, адрес сайта www.math.nsc.ru.

Автореферат разослан «___»__________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.02,
кандидат физико-математических
наук, доцент Стукачев Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Вопросы изучения топологических свойств объектов дискретной математики и теории моделей привлекают внимание широкого круга специалистов. В этой связи следует отметить монографию Ю.Л. Ершова[1], в которой изложен ряд результатов о топологических пространствах, применяемых в дискретной математике. Е. Лось[2] в 1954 г. высказал гипотезу, что если полная теория категорична в некоторой несчетной мощности, то она категорична во всех других несчетных мощностях. В 1965 г. М. Морли[3] подтвердил гипотезу Лося и доказал однородность всех моделей категоричных теорий, одновременно изменив качество исследований в теории моделей, систематически вводя методы работы с типами (локально совместными множествами формул), вводя ранги типов и формул на основе изучения категории топологических пространств n-типов и элементарных вложений.

Классическая теорема Фефермана–Воота[4] для логики первого порядка объясняет, как вычислить значение истинности предложения первого порядка в обобщенном произведении структур первого порядка, сводя это вычисление к вычислению значений истинности других предложений первого порядка в факторах и оценке монадического предложения второго порядка в индексной структуре.

Семейства теорий в общем виде впервые начал исследовать С.В. Судоплатов в 2016 году введя E-операторы и P-операторы[5] на классы структур, порождающих структуры и аппроксимирующие заданные структуры. Эти операторы связаны с естественными топологическими свойствами, относящимися к семействам теорий. Также исследованы комбинации структур, для данных семейств структур, относительно семейств одноместных предикатов и отношений эквивалентности. Охарактеризованы условия сохранения ω-категоричности и эренфойхтовости для этих комбинаций. Введены понятия e-спектров и описаны возможности для e-спектров.

---

[1] *Ершов, Ю. Л.* Топология для дискретной математики / Ю. Л. Ершов. Сибирское отделение Российской академии наук (Новосибирск), 2020. отв. ред. В.Л. Селиванов; Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, 334 с.

[2] *Lo's, J.* On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems / J. Lo's // Colloquium Mathematicum. 1954. No. 3. P. 58—62.

[3] *Morley, M.* Categoricity in Power / M. Morley // Transactions of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 114, no. 2. P. 514—538.

[4] *Feferman, S.* The first order properties of products of algebraic systems / S. Feferman, R. Vaught // Fundam. Math. 1959. Vol. 47. P. 57—103.

[5] *Sudoplatov, S. V.* Combinations of structures / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2018. Vol. 24. P. 82—101.

С.В. Судоплатовым[6] исследованы операторы замыкания и описаны свойства для E-оператора и P-оператора систем и их теорий, включая отрицание конечного характера и свойство замены. Введено понятие сигнатурно однородной теории[7] и изучены топологические свойства, относящиеся к семействам сигнатурно однородных теорий и их E-комбинациям, а также, показано, что семейства сигнатурно однородных теорий задают произвольный ранг Кантора – Бендиксона и произвольную степень относительно этого ранга. Доказано, что решетки для семейств теорий с наименьшими порождающими множествами являются дистрибутивными[8]. Изучены аппроксимации структур конечными в контексте структурных комбинаций. Рассмотрены и охарактеризованы классы конечных и счетно категоричных структур и их теории, сохраняющиеся при E-операторах и P-операторах[9]. Определены понятия относительных e-спектров[10] по отношению к E-операторам, относительным замыканиям и относительным порождающим множествам.

Исследованы аппроксимации теорий[11] как в общем контексте, так и по отношению к некоторым естественным классам теорий. Рассмотрены некоторые виды аппроксимаций, найдены связи с конечно аксиоматизируемыми теориями и минимальными порождающими множествами теорий, а также их спектрами. Поставлена следующая проблема:

Проблема 1. *Описать мощности и виды аппроксимаций для естественных классов теорий.*

Изучение семейств элементарных теорий дает информацию о поведении и взаимосвязях теорий внутри семейств, возможности порождения и их сложности. Эта сложность выражается ранговыми характеристиками как для семейств, так и для их элементов внутри семейств.

В 2019 году продолжено изучение семейств теорий и их аппроксимаций, введением рангов и степеней для семейств теорий[12], аналогичных рангу и степени Морли, а также рангу и степени Кантора-Бендиксона,

---

[6] *Sudoplatov, S. V.* Closures and generating sets related to combinations of structures / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2016. Vol. 16. P. 131—144.

[7] *Sudoplatov, S. V.* Families of language uniform theories and their generating sets / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2016. Vol. 17. P. 62—76.

[8] *Sudoplatov, S. V.* On semilattices and lattices for families of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 980—985.

[9] *Sudoplatov, S. V.* Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 135—150.

[10] *Sudoplatov, S. V.* Relative e-spectra and relative closures for families of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 296—307.

[11] *Sudoplatov, S. V.* Approximations of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 715—725.

[12] *Sudoplatov, S. V.* Ranks for families of theories and their spectra / S. V. Sudoplatov // arXiv:1901.08464v1[math.LO]. 2019.

кроме того введено понятие тотально трансцендентного семейства теорий. Эти ранги и степени играют аналогичную роль для семейств теорий, с иерархиями для определимых семейств теорий, как иерархии Морли для фиксированной теории, хотя они имеют свои особенности. Поставлена следующая проблема:

Проблема 2. *Описать иерархию рангов $RS(\cdot)$ для естественных семейств теорий.*

Ранг для семейств теорий, можно рассматривать как меру сложности или богатства семейств. Таким образом, повышая ранг за счет расширения семейств, можно производить более богатые семейства, получая семейства с бесконечным рангом, который можно считать «достаточно богатым».

Следует отметить активно развивающуюся в последнее время область исследования *псевдоконечных структур*, связанную с аппроксимациями структур. В 1950-60 годы активно исследованы элементарные теории конечных полей, особенно, поля F, обладающих тем свойством, что *каждое абсолютно неприводимое многообразие над F имеет точку, определенную над F*. В 1967 году Ю.Л. Ершов поле с таким свойством назвал *регулярно замкнутым*[13]. Примерами регулярно замкнутых полей являются сепарабельно замкнутые поля и бесконечные поля, удовлетворяющие всем аксиомам теории конечных полей. Регулярная замкнутость последних является следствием глубокого факта — теоремы Вейля о гипотезе Римана для кривых над конечными полями. Это было также отмечено независимо Дж. Аксом.

Дж. Акс[14] показал, что ультрапроизведения, которые преобразуют классы конечных структур в бесконечные «регулярно замкнутые» структуры наследуют свойства классов и поддаются теоретико-модельным методам с приложениями для конечных структур. Следует отметить, что в разных статьях это понятие называется по-разному (Σ-поля, аксовы поля), позже в зарубежных работах такие поля стали в основном называться *псевдоалгебраически замкнутыми* (PAC)[15,16]. Алгебраические свойства регулярно замкнутых полей (PAC) достаточно полно изучены в работах Ю.Л.

[13] *Ершов, Ю. Л.* О полях с разрешимой теорией / Ю. Л. Ершов // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 1. С. 19—20.

[14] *Ax, J.* Solving diophantine problems modulo every prime / J. Ax // Ann. Math. 1967. Vol. 85, no. 2. P. 161—183.

[15] *Fried, M.* Solving diophantihe problems over all residue class fields / M. Fried, G. Sacerdote // Ann. Math. 1976. Vol. 104. P. 203—233.

[16] *Jarden, M.* An analogue of Chebotarev density theorem for fields of finite corank / M. Jarden // J. Math. Kyoto Univ. 1980. Vol. 20, no. 1. P. 141—147.

Ершова[17,18,19], Г. Черлина, Л. ван ден Дриса и А. Макинтайра[20], З. Шатзидакис[21], А. Пиллэя и Д. Полковска[22], Э. Хрушовского[23].

Интересные классы регулярно замкнутых (PAC) полей более сильными свойствами, а также алгебраические и теоретико-модельные свойства псевдоалгебраически замкнутых полей неявно изучены в работах М. Жардена[24,25,26], М. Жардена совместно С. Шелахом[27], Г. Фрея[28], К. Кифа[29], У.Г. Уиллера[30,31]. Более подробно это изучено в книге М. Фрида и М. Жардена[32].

В 1968 году Дж. Акс впервые ввел понятие *псевдоконечности*[33], чтобы показать разрешимость теории всех конечных полей, обобщая алгоритм[34] и используя теорему Вейля о гипотезе Римана для кривых

---

[17] *Ершов, Ю. Л.* Регулярно замкнутые поля / Ю. Л. Ершов // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 4. С. 783—785.

[18] *Ершов, Ю. Л.* Неразрешимость регулярно замкнутых полей / Ю. Л. Ершов // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 4. С. 389—394.

[19] *Ершов, Ю. Л.* Алгебраические свойства регулярно замкнутых полей / Ю. Л. Ершов // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 158. С. 80—86.

[20] *Cherlin, G.* The elementary theory of regularly closed fields / G. Cherlin, L. van den Dries, A. Macintyre. preprint.

[21] *Chatzidakis, Z.* Perfect pseudo-algebraically closed fields are algebraically bounded / Z. Chatzidakis, E. Hrushovski // Journal of Algebra. 2004. Vol. 271, no. 2. P. 627—637.

[22] *Pillay, A.* On PAC and bounded substructures of a stable structure / A. Pillay, D. Polkowska // The Journal of Symbolic Logic. 2006. Vol. 71, no. 2. P. 460—472.

[23] *Hrushovski, E.* Pseudofinite fields and related structures / E. Hrushovski // In: Bélair, L., Chatzidakis, Z., d'Aquino, P., Marker, D., Otero, M., Point, F., Wilkie, A.J. (eds.) Model Theory and Applications. Quaderni di Matematica, Aracne, Rome (2002). 1991. Vol. 11. P. 151—212.

[24] *Jarden, M.* Elementary statements over large algebraic fields / M. Jarden // Trans. Am. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 67—91.

[25] *Jarden, M.* Algebraic extensions of finite corank of Hilbertian fields / M. Jarden // Israel J. Math. 1974. Vol. 18. P. 279—307.

[26] *Jarden, M.* The elementary theory of ω-free Ax fields / M. Jarden // Invent.Math. 1976. Vol. 38. P. 187—206.

[27] *Jarden, M.* Pseudo-algebraically closed fields over rational function fields / M. Jarden, S. Shelah // Proceedings of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 87, no. 2. P. 223—223.

[28] *Frey, G.* Pseudo algebraically closed fields with non-archimedian real valuations / G. Frey // Journal of Algebra. 1973. Vol. 26. P. 202—207.

[29] *Kiefe, C.* Sets definable over finite fields: their zeta-functions / C. Kiefe // Trans. Am. Math. Soc. 1976. Vol. 223. P. 45—59.

[30] *Wheeler, W. H.* Model-complete theories of e-free Ax fields / W. H. Wheeler, M. Jarden // The Journal of Symbolic Logic. 1983. Vol. 48, no. 4. P. 1125—1129.

[31] *Wheeler, W. H.* Model-complete theories of pseudo-algebrically closed fields / W. H. Wheeler // Ann.Math. Log. 1979. Vol. 17, no. 3. P. 205—226.

[32] *Fried, M.* Field Arithmetic. Vol. 11 / M. Fried, M. Jarden. 3rd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. (Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics).

[33] *Ax, J.* The elementary theory of finite fields / J. Ax // Ann. Math. 1968. Vol. 88. P. 239—271.

[34] *Ax, J.* Solving diophantine problems modulo every prime / J. Ax // Ann. Math. 1967. Vol. 85, no. 2. P. 161—183.

над конечными полями, а также теорему плотности Чеботарева. Он назвал поле F *псевдоконечным*, если оно является *квазиконечным*[35], и *псевдоалгебраически замкнутым* (PAC). Свойство *псевдоалгебраической замкнутости* или *регулярной замкнутости* выражается конъюнкцией предложений первого порядка, каждое из которых, по оценкам Ленга-Вейля[36], имеет место в достаточно больших конечных полях, и поэтому каждое из них должно выполнятся в любом псевдоконечном поле. Важным фактом является обратное: любое поле, удовлетворяющее этим двум условиям, удовлетворяет каждому предложению, истинному для всех конечных полей. Дж. Акс установил, что псевдоконечное поле элементарно эквивалентно бесконечному ультрапроизведению конечных полей. Также показал, что существует алгоритм, позволяющий решить, выполняется ли данное предложение для всех конечных полей. После этого появилась новая область исследования — бесконечные структуры, удовлетворяющие аксиомам теории конечных структур. Такие структуры называются *псевдоконечными.*

Псевдоконечные структуры в явном виде после Дж. Акса долгое время не изучались. До 1990-х годов получены лишь несколько результатов по этой тематике и самым первым результатом является результат Б.И. Зильбера[37,38] утверждающий, что тотально категоричные структуры псевдоконечны.

Теорема Ж. Дюре[39] гласит, что теория любого псевдоалгебраически замкнутого (PAC) поля, не являющегося сепарабельно замкнутым, обладает свойством независимости, то есть, Ж. Дюре показал, что теория псевдоконечных полей нестабильна.

Одним из первых результатов в теории классификации псевдоконечных структур является знаменитая теорема Г. Черлина, Л. Харрингтона и А. Лахлана[40], обобщающая теорему Зильбера на класс $\aleph_0$-стабильных $\aleph_0$-категоричных структур, о том, что тотально категоричные теории (а в более общем случае ω-категоричные ω-стабильные теории) являются

---

[35] *Artin, E.* Class Field Theory / E. Artin, J. Tate. 2nd ed. Harvard University, Department of Mathematics, 2009. Notes from the Artin-Tate seminar on class field theory given a Princeton University 1951–1952, Reprinted as 1968c, 1990b.

[36] *Lang, S.* Number of points of varieties in finite fields / S. Lang, A. Weil // American Journal of Mathematics. 1954. Vol. 76. P. 819—827.

[37] *Zilber, B.* Totally categorical theories; structural properties and non-finite axiomatizability / B. Zilber // Proceedings of Conference held at Karpacz Poland: Model Theory of Algebra and Arithmetic (L. Pacholski et al., editors), Lecture Notes in Math. 834 (Springer, Berlin, 1980). 1979. P. 381—410.

[38] *Zilber, B.* On the problem of finite axiomatizability for theories categorical in all infinite powers (Russian) / B. Zilber // in: B. Baijanov, ed., Investigations in Theoretical Programming (Alma Ata 1981). 1981. P. 69—75.

[39] *Duret, J.* Les corps pseudo-finis ont la propriété d'indépendance / J. Duret // C. R. Acad. Sei. Paris Sér. 1980. Vol. 290. P. 981—903.

[40] *Cherlin, G.* $\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable structures / G. Cherlin, L. Harrington, A. H. Lachlan // Ann. Pure Appl. Logic. 1985. Vol. 28. P. 103—135.

псевдоконечными. Также они доказали, что такие структуры гладко аппроксимируются конечными структурами.

Гладко аппроксимируемые структуры являются естественным обобщением $\aleph_0$-категоричных $\aleph_0$-стабильных структур. В 1989 году У. М. Кантором, М. У. Либеком и Д. Макферсоном[41] дана классификация примитивных $\aleph_0$-категоричных структур, которые гладко аппроксимируются цепочкой конечных однородных подструктур. А в 1991 году Д. Макферсон[42] предположил, что конечно аксиоматизируемая $\aleph_0$-категоричная теория обладает свойством строгого порядка, что в дальнейшем обобщит часть результата Г. Черлина, Л. Харрингтона и А. Лахлана.

Измеримая структура[43] — это структура, снабженная функцией, которая присваивает размерность и меру каждому определимому множеству, которое является равномерно определимым в терминах своих параметров и удовлетворяет определенным условиям, аналогичным тем, которым удовлетворяют ультрапроизведения конечных полей. Некоторые измеримые структуры могут быть построены как ультрапроизведения структур в одномерном асимптотическом классе и являются псевдоконечными SU-ранга 1. Изучение асимптотических классов проистекает из глубокого применения З. Шатзидакис, Л. ван ден Дрисом и А. Макинтайром[44] оценок Ленга – Вейля и работы Дж. Акса. Существует интересный пример Р. Элвеса[45] измеримой структуры, состоящей из структуры с двумя различными псевдоконечными полевыми структурами (на непересекающихся языках) с разными простыми характеристиками, которая не элементарно эквивалентна никакому ультрапроизведению асимптотического класса. Асимптотические классы конечных структур и измеримых структур были введены Д. Макферсоном и Ч. Стэйнхорном[46] с целью разработки теории моделей для классов конечных структур, которая отражает современные теоретические разделы бесконечных моделей. Более подробно это представлено в обзоре[47] Р. Элвеса, Д. Макферсона, З. Шатзидакис, А. Пиллэя, А. Уилки.

---

[41] *Kantor, W. M.* $\aleph_0$-categorical structures smoothly approximable by finite substructures / W. M. Kantor, M. W. Liebeck, H. D. Macpherson // Proc. London Math. Soc. 1989. Vol. 59. P. 439—463.

[42] *Macpherson, H. D.* Finite axiomatizability and theories with trivial algebraic closure / H. D. Macpherson // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1991. Vol. 32. P. 188—192.

[43] *Macpherson, D.* Definability in the classes of finite structures / D. Macpherson, C. Steinhorn // London Matheematical Society Lecture Notes Series. 2011. Vol. 379. P. 140—176.

[44] *Chatzidakis, Z.* Definable sets over finite fields / Z. Chatzidakis, L. van den Dries, A. Macintyre // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. 1992. Vol. 427. P. 107—136.

[45] *Elwes, R.* Asymptotic classes of finite structures / R. Elwes // The Journal of Symbolic Logic. 2007. Vol. 72, no. 02. P. 418—438.

[46] *Macpherson, D.* One-dimensional asymptotic classes of finite structures / D. Macpherson, C. Steinhorn // Transactions of the American Mathematical Society. 2008. Vol. 360. P. 411—448.

[47] A survey of asymptotic classes and measurable structures / R. Elwes [et al.] // Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Zoe Chatzidakis, Dugald Macpherson,

Теория геометрической стабильности родилась на основе псевдоконечных структур. Основным инструментом Б. Зильбера была теория размерности, основанная на ранге Морли и старшем коэффициенте полинома Зильбера, подсчитывающем точки в конечных аппроксимациях[48]. Э. Хрушовский[49] исследует понятие *псевдоконечной размерности*, введенное вместе с Ф. Вагнером[50], которое формирует точку входа в связь теории моделей и комбинаторики. Также обновляются открытые проблемы псевдоконечных (квазиконечных) структур[51] в контексте теории геометрической стабильности. В 2015 году Д. Макферсон, Д. Гарсия и Ч. Стейнхорн[52] исследует понятие псевдоконечной размерности (называемое *квазиконечной размерностью*[53]), примененное Э. Хрушовским[54] для аппроксимации подгрупп с перспективными дальнейшими направлениями[55]. А. Пиллэй доказал[56], что сильно минимальная псевдоконечная структура унимодулярна, следовательно, по теореме Хрушовского[57] локально модулярна. А. Пиллэем[58] введены понятия *слабо, строго и сильно псевдоконечной* структуры. Значительный обзор в теорию моделей конечных структур дан в работе Э. Росена[59]. В работе Ю. Вяанянена[60] утверждается, что псевдоконечные структуры являются хорошей основой для изучения логики первого порядка на конечных структурах. Б.Ш. Кулпешов и С.В.

Anand Pillay, Alex Wilkie (eds.) 2008. Vol. 2. P. 125—160. (London Mathematical Society Lecture Note Series 350).

[48] *Zilber, B.* Perfect infinities and finite approximations / B. Zilber // Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore. 2013. P. 199—223.

[49] *Hrushovski, E.* On pseudofinite dimensions / E. Hrushovski // Notre Dame J. Formal Logic. 2013. Vol. 54, no. 3/4. P. 463—495.

[50] *Hrushovski, E.* Counting and dimensions / E. Hrushovski, F. Wagner // Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Eds. Z. Chatzidakis, H.D. Macpherson, A. Pillay, A.J. Wilkie, Cambridge University Press, Cambridge. 2008. Vol. 2. P. 161—176.

[51] *Cherlin, G.* Finite Structures with Few Types / G. Cherlin, E. Hrushovski // Annals of Math. Studies, Princeton University Press. 2003. Vol. 152.

[52] *Macpherson, H.* Pseudofinite structures and simplicity / H. Macpherson, D. Garcia, C. Steinhorn // J. Math. Logic. 2015. Vol. 15, no. 1.

[53] *Hrushovski, E.* Stable group theory and approximate subgroups / E. Hrushovski // J. Amer. Math. Soc. 2012. Vol. 25. P. 189—243.

[54] *Hrushovski, E.* Stable group theory and approximate subgroups / E. Hrushovski // J. Amer. Math. Soc. 2012. Vol. 25. P. 189—243.

[55] *Hrushovski, E.* On pseudofinite dimensions / E. Hrushovski // Notre Dame J. Formal Logic. 2013. Vol. 54, no. 3/4. P. 463—495.

[56] *Pillay, A.* Strongly minimal pseudofinite structures / A. Pillay // Preprint, Available at http://arxiv.org/pdf/1411.5008v2.pdf. 2014.

[57] *Hrushovski, E.* Unimodular minimal structures / E. Hrushovski // Journal London Math. Soc. 1992. Vol. 46. P. 385—396.

[58] *Pillay, A.* Lecture notes on pseudofinite Model Theory / A. Pillay, (friends) // Available at `https://www3.nd.edu/ apillay/notes_greg-final.pdf`.

[59] *Rosen, E.* Some Aspects of Model Theory and Finite Structures / E. Rosen // The Bulletin of Symbolic Logic. 2002. Vol. 8, no. 3. P. 380—403.

[60] *Vaananen, J.* Pseudo-finite model theory / J. Vaananen // Matematica Contemporanea. 2003. Vol. 24. P. 169—183.

Судоплатов[61] доказали, что теория T бесконечной линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}; < \rangle$ псевдоконечна тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не имеет плотных частей и $\mathcal{M}$ имеет как наибольшие, так и наименьшие элементы.

Работа Дж. Акса привела к важным достижениям в теории моделей полей и в арифметике полей. Фактически в псевдоконечных полях размерность соответствует SU-рангу. Это было по существу известно Хрушовскому, который разработал анализ псевдоконечных полей в стиле стабильности[62]. З. Шатзидакис, Э. Хрушовский и Я. Петерзил[63] показали, что псевдоконечное поле имеет SU-ранг 1. Э. Хрушовский и Г. Черлин изучают псевдоконечные структуры как гладко аппроксимируемые структуры, которые аппроксимируются конечными структурами[64,65]. В 1997 году З. Шатзидакис[66] дала полный обзор полученных результатов в теории моделей конечных и псевдоконечных полей. В последние годы теоретико-модельные и алгебраические свойства конечных и псевдоконечных полей активно изучаются М. Райтеном[67], В. С. Лопесом и Л. ван ден Дрисом[68], О. Бейарсланом и Э. Хрушовским[69], Тинсян Цзоу[70], Э. Хрушовским[71] и А. Крюкманом[72].

---

[61] *Kulpeshov, B. S.* Ranks and approximations for families of ordered theories / B. S. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 12. Collection of papers // eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk: NSTU. 2019. P. 32—40.

[62] *Hrushovski, E.* Pseudofinite fields and related structures / E. Hrushovski // In: Bélair, L., Chatzidakis, Z., d'Aquino, P., Marker, D., Otero, M., Point, F., Wilkie, A.J. (eds.) Model Theory and Applications. Quaderni di Matematica, Aracne, Rome (2002). 1991. Vol. 11. P. 151—212.

[63] *Chatzidakis, Z.* Model theory of difference fields II. Periodic ideals and the trichotomy in all characteristics / Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, Y. Peterzil // Proc. Lond. Math. Soc. 1997. Vol. 85, no. 3. P. 257—311.

[64] *Cherlin, G.* Smoothly approximable structures / G. Cherlin, E. Hrushovski // manuscript. 1994.

[65] *Cherlin, G.* Finite Structures with Few Types / G. Cherlin, E. Hrushovski // Annals of Math. Studies, Princeton University Press. 2003. Vol. 152.

[66] *Chatzidakis, Z.* Model theory of finite fields and pseudofinite fields / Z. Chatzidakis // Ann. Pure Appl. Logic. 1997. Vol. 88. P. 95—108.

[67] *Ryten, M.* Model Theory of Finite Difference Fields and Simple Groups : PhD thesis / Ryten M. PhD Thesis : University of Leeds, 2007. http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pmthdm/ryten1.pdf.

[68] *Lopes, V. C.* Division rings whose vector spaces are pseudofinite / V. C. Lopes, L. van den Dries // J. Symbolic Logic. 2010. Vol. 75, no. 3. P. 1087—1090.

[69] *Beyarslan, Ö.* On algebraic closure in pseudofinite fields / Ö. Beyarslan, E. Hrushovski // The Journal of Symbolic Logic. 2012. Vol. 77, no. 4. P. 1057—1066.

[70] *Tingxiang, Z.* Pseudofinite Difference Fields / Z. Tingxiang. 2018. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01831524.

[71] *Hrushovski, E.* Ax's theorem with an additive character / E. Hrushovski. 2019. https://arxiv.org/pdf/1911.01096.pdf.

[72] *Kruckman, A.* Disjoint n-Amalgamation and Pseudofinite Countably Categorical Theories / A. Kruckman // Notre Dame J. Formal Logic. 2019. Vol. 60, no. 1. P. 139—160.

Теория моделей конечных и псевдоконечных полей изучается достаточно. В своей диссертации Р. Белло-Агирре[73] представляет результаты, способствующие началу изучения теории моделей конечных и псевдоконечных колец.

В следующих работах обнаружена тесная связь между алгебраическими и теоретико-модельными свойствами псевдоконечных полей и псевдоконечных групп: в 1993 году Дж. Вильсон[74] показал, что существует тесная связь между простыми псевдоконечными группами и псевдоконечными полями. В частности, он доказал, что всякая простая псевдоконечная группа элементарно эквивалентна группе Шевалле над псевдоконечным полем. Результаты, полученные Ф. Пуан[75] в 1999 году, могут быть использованы для классификации простых псевдоконечных групп. Алгебраические и теоретико-модельные свойства конечных и псевдоконечных групп исследованы Э. Хрушовским с А. Пиллэем[76], Д. Макферсоном и К. Тент[77,78], Д. Макферсоном, Р. Элвесом, Э. Жалигот и М. Райтеном[79]. В 2018 году Д. Макферсон делает большой обзор[80] по теории моделей конечных и псевдоконечных групп с открытыми вопросами и дополнительными направлениями по этой тематике. Ин.И. Павлюк и С.В. Судоплатов[81] охарактеризовали псевдоконечные абелевы группы в терминах шмелёвских инвариантов.

Целью данной работы является исследование теоретико-модельных и топологических свойств семейств теорий.

Научная новизна: Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и своевременно опубликованы.

Методология и методы исследования. Для достижения поставленной цели исследования предлагаются методы теории моделей, основанные на использовании классических и новых понятий общей теории

[73] *Bello-Aguirre, R.* Model Theory of Finite and Pseudofinite Rings : PhD thesis / Bello-Aguirre R. University of Leeds, 2016. Ph.D. thesis.

[74] *Wilson, J.* On pseudofinite simple groups / J. Wilson // J. Lond. Math. Soc. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 471—490.

[75] *Point, F.* Ultraproducts and Chevalley groups / F. Point // Arch. Math. Logic. 1999. Vol. 38. P. 355—372.

[76] *Hrushovski, E.* Groups definable in local fields and pseudofinite fields / E. Hrushovski, A. Pillay // Israel Journal of Mathematics. 1994. Vol. 85, no. 1—3. P. 203—262.

[77] *Macpherson, H.* Stable pseudofinite groups / H. Macpherson, K. Tent // J. Algebra. 2007. Vol. 312. P. 550—561.

[78] *Macpherson, H.* Pseudofinite groups with NIP theory and definability in finite simple groups / H. Macpherson, K. Tent // In: Strüngmann L., Droste M., Fuchs L., Tent K. (eds.) Groups and Model Theory. Contemp. Math. Soc., American Mathematical Society, Providence (2012). 2012. Vol. 576. P. 255—267.

[79] Groups in supersimple and pseudofinite theories / R. Elwes [et al.] // Proc. Lond. Math. Soc. 2011. Vol. 103, no. 3. P. 1049—1082.

[80] *Macpherson, D.* Model theory of finite and pseudofinite groups / D. Macpherson // Arch. Math. Logic. 2018. Vol. 57. P. 159—184.

[81] *Pavlyuk, I. I.* Approximations for Theories of Abelian Groups / I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov // Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 8, no. 2. P. 220—224.

моделей, таких как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, стабильность, тотально трансцендентность, псевдоконечность; различные теоретико-модельные конструкции, такие как прямые произведения, ультрапроизведения, элементарные расширения; методы общей топологии.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построены семейства теорий подстановок, имеющее данный счетный ранг и данную степень n. Доказано, что в семействе теорий подстановок любая теория является теорией конечной структуры или аппроксимируется теориями конечных структур. Получен критерий псевдоконечности локально свободных алгебр. Результаты получены лично и опубликованы в [1; 2].
2. Получены характеристики и динамика относительно ранга и степени определимых предложениями и определимых диаграммами подсемейств заданных семейств теорий, а также исчисления для этих подсемейств. Охарактеризованы топологические свойства и ранги алгебр, связанные с определимыми предложениями и диаграммами подсемейств семейств теорий. Результаты получены в неразделимом соавторстве с Судоплатовым С.В. и опубликованы в [3; 4].
3. Описаны топологические свойства, ранги, замыкания и их динамика для семейств теорий. Дана характеризация видов топологий семейств теорий. Установлена связь рангов с топологиями для семейств теорий. Рассмотрены булевы комбинации s-определимых семейств теорий, определены ранги и степени относительно этих семейств, описаны значения этих характеристик. Изучены замыкания семейств теорий относительно s-определимых подсемейств и их булевых комбинаций, описаны свойства операторов замыкания, а также охарактеризовано условие существования наименьшего порождающего множества. Описаны ранги и степени для семейств всех теорий произвольно заданных сигнатур. Результаты получены в неразделимом соавторстве с Судоплатовым С.В. и опубликованы в [5—7].

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах «Теория моделей» имени Е.А. Палютина Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, на семинарах «Алгебра и Логика» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Результаты работы также докладывались на конференциях: Традиционная международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018-2020 гг.)[8—10], Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, (Алматы, 2019-2020 гг.)[11; 12], Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.)[13], 16-я Азиатская логическая конференция (Нур-султан, Казахстан, 2019 г.)[14], 13-я Международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Эрлагол-2019, Алтай), 14-я Международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», посвященная 75-летию профессора Б. Пуаза (Эрлагол-2021, Алтай), 16-й Международный конгресс по логике, методологии и философии науки и технологий, г. Прага, 5–10 августа 2019 г. [15].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в работах [1—7] и[8—15]. Работы [1] и [3—6] изданы в журналах, рекомендованных ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрических системах (Scopus, Web of Science и т.д.), работа [2] — в сборнике Эрлаголской конференции «Algebra and Model Theory 12», работа [7] — в журнале, индексируемый базами Scopus и Web of Science не из списка ВАК РФ. Работы [3—7], [8—13] и [15] написаны в неразрывном сотрудничестве с Судоплатовым С.В.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приводятся необходимые определения, относящиеся к полным и псевдоконечным теориям моделей. Даны предварительные сведения и основные теоретико-модельные конструкции полных теорий.

Вторая глава посвящена описанию рангов и степеней семейств всех теорий произвольных заданных языков и исследованию определимых подсемейств полных теорий. Определяется исчисления для семейств теорий, аналогичные исчислениям для предложений первого порядка, а также обсуждается свойства и связи для этих исчислений.

Пусть Σ — язык. Через $\mathcal{T}_\Sigma$ обозначим семейство всех теорий языка Σ.

Теорема 2.1. *Для любого языка Σ семейство $\mathcal{T}_\Sigma$ является e-минимальным тогда и только тогда, когда $\Sigma = \emptyset$ или Σ состоит из одного константного символа.*

Теорема 2.2. *Для любого языка Σ либо ранг $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ конечен, если Σ состоит из конечного числа 0-арных и унарных предикатов, и константных символов или $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, в противном случае.*

Техника подсчета рангов $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ может быть применена для семейств $\mathcal{T}_{\Sigma,n}$ всех теорий в языках Σ и имеющих n-элементных моделей $n \in \omega$, а также для семейств $\mathcal{T}_{\Sigma,\infty}$ всех теорий в языках Σ и имеющих бесконечные модели.

Теорема 2.3. *Для любого языка Σ либо $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = 0$, если Σ конечен или $n = 1$ и Σ имеет конечное число предикатных символов, или $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$, в противном случае.*

Теорема 2.4. *Для любого языка Σ либо $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,\infty})$ конечен, если Σ конечен и не имеет предикатных символов арности $m \geq 2$, а также без функциональных символов арности $n \geq 1$ или $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$, в противном случае.*

Пусть $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий первого порядка на языке Σ, $\mathcal{T}_\Sigma$ — семейство всех полных теорий первого порядка языка Σ. Для множества Φ Σ-предложений положим $\mathcal{T}_\Phi = \{T \in \mathcal{T} \mid T \models \Phi\}$. Семейство вида $\mathcal{T}_\Phi$ называется *d-определимым* (в $\mathcal{T}$). Если Φ является одноэлементным $\{\varphi\}$, то $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_\Phi$ называется *s-определимым.*

Рассматриваем свойства исчислений для семейств $\mathcal{T}$ относительно отношений $\vdash_\mathcal{T}$, где $\Phi \vdash_\mathcal{T} \Psi \Leftrightarrow \mathcal{T}_\Phi \subseteq \mathcal{T}_\Psi$.

Предложение 2.5. *Для любых множеств предложений Φ и Ψ и семейства теорий $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash_\mathcal{T} \Psi$;

(2) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}_0} \Psi$ *для любого конечного $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$;*

(3) $\Phi \vdash_{\{T\}} \Psi$ *для любого одноэлементного $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$;*

(4) $\Phi \vdash_{Cl_E(\mathcal{T})} \Psi$.

Теорема 2.6. (теорема о компактности) *Для любого непустого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ каждое локально $\mathcal{T}$-совместное d-определимое множество $\mathcal{T}_\Phi$ является $\mathcal{T}$-совместным.*

Следующая теорема дает критерий существования d-определимого семейства, которое не является s-определимым.

Теорема 2.7. *Для любого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ существует d-определимое семейство $\mathcal{T}_\Phi$, которое не является s-определимым тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ бесконечно.*

Следующая теорема дает характеристику для d-определимости подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Теорема 2.8. *Подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ является d-определимым в $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}'$ E-замкнуто в $\mathcal{T}$, т.е. $\mathcal{T}' = Cl_E(\mathcal{T}') \cap \mathcal{T}$.*

Третья глава посвящена исследованию структурных и топологических свойств семейств теорий, возможно неполных. Обобщаются понятия ранга и степени, которые были определены ранее для семейств полных теорий.

Предложение 3.1. *Любое семейство $\mathcal{T}$ образует T_0-пространство.*

Предложение 3.2. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{T}$ *является* T_1*-пространством;*

(2) $\mathcal{T}$ *не содержит теории* T, T', *для которых* $T \subsetneq T'$.

Предложение 3.3. T_1*-пространство* $\mathcal{T}$ *является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда для любых различных теорий* $T,T' \in \mathcal{T}$ *существуют предложения* $\varphi \in T$, $\psi \in T'$ *такие, что* $\varphi \wedge \psi$ *является* $\mathcal{T}$*-несовместным.*

Следующее предложение показывает, что можно построить неограниченно большое семейство без нетривиальных T_1-подсемейств:

Предложение 3.4. *Для любой мощности* λ *существует семейство* $\mathcal{T}$ *без нетривиальных* T_1*-подсемейств.*

Теорема 3.5. *Для любого семейства* $\mathcal{T}$ *и* $n \in \omega \setminus \{0\}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$;

(2) $\mathcal{T}$ *имеет* n*-элементное хаусдорфово подсемейство* $\{T^1,\ldots,T^n\}$ *такое, что каждый элемент* $T \in \mathcal{T} \setminus \{T^1,\ldots,T^n\}$ *не является* T_2*-отделимым от* $T^1,\ldots,T^n$ *в семействе* $\mathcal{T}$*;*

(3) $\mathcal{T}$ *содержит цепи* $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_n$ *такие, что их некоторые представители* $T^1 \in \mathcal{C}_1,\ldots,T^n \in \mathcal{C}_n$ *образуют* n*-элементное хаусдорфово подсемейство и каждый элемент* $T \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n)$ *не является* T_2*-отделимым от* $T^1,\ldots,T^n$ *в* $\mathcal{T}$*;*

(4) $\mathcal{T}$ *делится на* n *дизъюнктных непустых частей* $\mathcal{T}_{\varphi_1},\ldots,\mathcal{T}_{\varphi_n}$ *так, что каждая часть* $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ *содержит некоторую цепь* $\mathcal{C}_i$ *и каждый элемент* $T \in \mathcal{T}_{\varphi_i} \setminus \mathcal{C}_i$ *не является* T_2*-отделимым от элементов из* $\mathcal{C}_i$.

Теорема 3.6. *Для любого ординала* α *и натурального числа* $m \in \omega \setminus \{0\}$ *существует семейство* $\mathcal{T}$ *и его ограничение* $\mathcal{T}'$, *для которых* $RS(\mathcal{T}) = \alpha$, $ds(\mathcal{T}) = m$, $RS(\mathcal{T}') = \infty$.

Следующее утверждение дает оценки числа T_2-отделимых теорий в семействах полных теорий.

Предложение 3.7. (1) *Если* $\mathcal{T}$ *— семейство полных теорий с* $RS(\mathcal{T}) = 0$ *и* $ds(\mathcal{T}) = n$, *то* $\mathcal{T}$ *имеет* n T_2*-отделимых теорий.*

(2) *Если* $\mathcal{T}$ *— семейство полных теорий с* $RS(\mathcal{T}) = \alpha > 0$, *для некоторого ординала* α, *то* $\mathcal{T}$ *имеет по крайней мере* $\alpha \cdot \omega$ T_2*-отделимых теорий.*

Для семейства $\mathcal{T}$ обозначим через $Bs_{\mathcal{T}}$ множество всех Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}$.

Ясно, что, $Bs_{\mathcal{T}}$ образует булеву алгебру. Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.8. *Для любого семейства* $\mathcal{T}$ *пара* $(\mathcal{T}, Bs_{\mathcal{T}})$ *хаусдорфова.*

Далее определим ранг $\overline{RS}$ и степень $\overline{ds}$, обобщающие RS и ds и задающие более адекватную меру сложности для семейств $\mathcal{T}$ неполных теорий.

Предложение 3.9. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ имеет место $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ представляется в виде дизъюнктного объединения Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}_1,\ldots,\mathcal{T}_n$ таких, что каждое $\mathcal{T}_i$ $\overline{\alpha}$-минимально.*

Теорема 3.10. *Для любого ординала α и натурального числа $n \neq 0$ существует семейство $\mathcal{T}$ позитивных теорий такое, что $(\overline{RS}(\mathcal{T}), \overline{ds}(\mathcal{T})) = (\alpha,n)$.*

Теорема 3.11. *Если $\mathcal{T}'$ — порождающее подсемейство для специального Bs-замкнутого семейства $\mathcal{T}$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}'$ — наименьшее порождающее множество для $\mathcal{T}$;*

(2) *$\mathcal{T}'$ — минимальное порождающее множество для $\mathcal{T}$;*

(3) *любая теория из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым Bs-определимым подмножеством X семейства $\mathcal{T}'$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует Bs-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}'$ вида $(\mathcal{T}')_\varphi \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\psi_n}}$ такое, что $X = \{T\}$;*

(4) *любая теория из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым Bs-определимым подмножеством X семейства $\mathcal{T}$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует Bs-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $X = \{T\}$.*

(5) *любая теория из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым s-определимым подмножеством X семейства $\mathcal{T}'$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует s-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}'$ вида $(\mathcal{T}')_\varphi$ такое, что $X = \{T\}$;*

(6) *любая теория из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым s-определимым подмножеством X семейства $\mathcal{T}$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует s-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $X = \{T\}$.*

Теорема 3.12. *Для любого непустого Bs-замкнутого специального семейства $\mathcal{T}$, ординала $\alpha \geq 1$ и натурального числа $n \in \omega \setminus \{0\}$, следующие условия эквивалентны:*

(1) $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$, каждая из которых порождается элементами рангов $< \alpha$ так, что каждая алгебра $\mathcal{B}_n$ содержит бесконечное число элементов каждого ранга $\beta < \alpha$;*

(3) *алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ состоит из бесконечного числа атомных элементов каждого ранга $\beta < \alpha$ для $\beta \geq 0$ и ровно n атомных элементов ранга α, эти n атомных элементов соответствуют неглавным ультрафильтрам по отношению к элементам рангов $< \alpha$.*

Определение. Для семейства теорий $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ и теории T полагаем $T \in Cl_1(\mathcal{T})$, если $T \in \mathcal{T}$, или T непусто и

$$T = \{\varphi \in Sent(\Sigma) \mid (\mathcal{T}')_\varphi \text{ бесконечно}\} \tag{1}$$

для некоторого $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}'$ фиксировано, мы говорим, что T *принадлежит* Cl_1*-замыканию семейства* $\mathcal{T}$ *относительно* $\mathcal{T}'$, а T является *точкой накопления* $\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}'$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется Cl_1*-замкнутым* или просто *замкнутым*, если $\mathcal{T} = Cl_1(\mathcal{T})$.

Предложение 3.13. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ полных теорий не более чем счетного языка Σ имеет место равенство $Cl_1(\mathcal{T}) = Cl_E(\mathcal{T})$.*

Теорема 3.14. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ не более чем счетного языка Σ оператор замыкания Cl_1 транзитивен.*

Теорема 3.15. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ теорий счетной сигнатуры следующие условия эквивалентны:*
(1) $|Cl_1(\mathcal{T})| = 2^\omega$;
(2) $e_1\text{-}Sp(\mathcal{T}) = 2^\omega$;
(3) $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

Теорема 3.16. *Для любого линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из объединений подсемейств $\mathcal{T}$ и пересечений счетных подсемейств $\mathcal{T}$, упорядоченных по типу ω^*.*

Предложение 3.17. *Для любого линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) = Cl_1(\mathcal{T})$.*

В **четвертой главе** исследовано семейство теорий подстановок, семейство кубических теорий, семейство локально свободных алгебр, семейство ациклических теорий.

Пусть язык Σ состоит из подстановки f. Обозначим через $\mathcal{T}_\Sigma$ семейство всех теорий подстановок языка Σ.

Следующая теорема показывает, что существует семейство теории подстановок, имеющее счетный ранг.

Теорема 4.1. *Для любого счетного ординала α и натурального $k \geq 1$ существует семейство $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, что $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = k$.*

Теорема 4.2. *Любая теория T подстановки на бесконечном множестве является псевдоконечной.*

Пусть T — полная теория первого порядка локально свободных алгебр языка $\Sigma = \{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots; c_1, \ldots, c_k, \ldots,\}$.

Предложение 4.3. *Если язык Σ состоит из константных символов или из константных символов и одного унарного функционального символа, то локально свободная алгебра A псевдоконечна.*

Теорема 4.4 *Бесконечная локально свободная алгебра A псевдоконечна тогда и только тогда, когда язык Σ содержит не более одного унарного символа и не содержит символов арности $n > 1$.*

Следствие 4.5. *Локально свободный группоид не является псевдоконечным.*

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., доценту Судоплатову Сергею Владимировичу за ценные советы и замечания при планировании исследования и всестороннюю помощь при работе над диссертацией. Автор выражает признательность всем участникам семинара «Теория моделей» им. Е.А. Палютина за множество ценных замечаний и предложений.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Markhabatov, N. D.* Ranks for families of permutation theories / N. D. Markhabatov // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2019. — Т. 28. — С. 85—94. — (Scopus, WoS(ESCI), РИНЦ, ВАК).
2. *Markhabatov, N. D.* Pseudofiniteness of locally free algebras / N. D. Markhabatov // Algebra and model theory 12 : coll. of papers. – Novosibirsk : NSTU publ. — 2019. — Т. 12. — С. 41—46. — (РИНЦ).
3. *Markhabatov, N. D.* Algebras for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Т. 16. — С. 600—608. — (Scopus, WoS, РИНЦ).
4. *Markhabatov, N. D.* Definable families of theories, related calculi and ranks / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Т. 17. — С. 700—714. — (Scopus, WoS, РИНЦ).
5. *Мархабатов, Н. Д.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. I / Н. Д. Мархабатов, С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 6. — С. 649—679. — (переведенная версия(Scopus, WoS), РИНЦ, ВАК).
6. *Мархабатов, Н. Д.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. II / Н. Д. Мархабатов, С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. — 2021. — Т. 60, № 1. — С. 57—80. — (переведенная версия(Scopus, WoS), РИНЦ, ВАК).
7. *Markhabatov, N. D.* Ranks for families of all theories of given languages / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Eurasian Mathematical Journal. — 2021. — Т. 12, № 2. — С. 52—58. — (Scopus, WoS, РИНЦ).
8. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of all theories of given languages / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 19–22 нояб. — 2018. — С. 213.

9. *Markhabatov, N. D.* On algebras for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 19–23 авг. — 2019. — С. 200.
10. *Markhabatov, N. D.* On closures for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 16–20 нояб. — 2020. — С. 244.
11. *Markhabatov, N. D.* On compactness for closed families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», Казахстан, Алматы, 3–5 апреля : тез. докл. – Алматы: ИМММ. — 2019. — С. 18—19.
12. *Markhabatov, N. D.* On topologies and ranks for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования : тез. докл., Республики Казахстан, Алматы. — 2020. — С. 15—17.
13. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Алгебра и математическая логика: теория и приложения : материалы междунар. конф. : тез. докл., Казань: Изд-во КФУ, 24–28 июня. — 2019. — С. 50—51.
14. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of permutation theories / N. D. Markhabatov // 16 Asian logic conference, 14 international conference on computability and randomness (CCR 2019) : progr. and abstr., Kazakhstan, Nur-Sultan, 17–21 June. — 2019. — С. 40—41.
15. *Markhabatov, N. D.* On calculi and ranks for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // 16 International congress on logic, methodology and philosophy of science and technology (CLMPST) : book of abstr., Czech Technical, Prague, 5–10 Aug. — 2019. — С. 311.