На правах рукописи

Емельянов Дмитрий Юрьевич

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научные руководители:
член-корреспондент НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор **КУЛПЕШОВ Бейбут Шайыкович**
доктор физико-математических наук, доцент **СУДОПЛАТОВ Сергей Владимирович**

Официальные оппоненты:
ПЕРЯЗЕВ Николай Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, профессор кафедры вычислительной техники

КОРОВИНА Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск, старший научный сотрудник

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Сибирский федеральный университет

Защита диссертации состоится 26 ноября 2021 года в 15:00 часов на заседании совета Д 003.015.02 при Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: пр. ак. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: пр. ак. Коптюга, 4, 630090, г. Новосибирск, Россия и на сайте http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан “___” октября 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Стукачёв Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными структурами для данной элементарной теории. Эти алгебры отражают бинарные связи между реализациями 1-типов, определяемые формулами исходной теории. Алгебры бинарных формул возникли из потребностей теории моделей и связаны с построением классификации счетных моделей полных теорий [1]. При построении счетных моделей элементарных теорий ключевую роль играют бинарные формульно определимые связи между реализациями полных типов. При описании получаемых бинарных структур и взаимосвязей между бинарными связями естественно возникают подходящие алгебры. Описание таких алгебр дает представление об общей структуре счетной модели теории.

Алгебры бинарных формул являются одними из важных производных объектов данной теории, позволяющих получать структурную информацию о данной теории. Вопросы описания таких свойств и получения классификации являются одними из центральных в теории моделей и связаны с работами А.И. Мальцева, А. Тарского, Е. Лося, С. Фефермана, Р. Воота, М. Морли, Ю.Л. Ершова, Е.А. Палютина, С. Шелаха, С.С. Гончарова, Б. Пуаза, А. Пилая, Т.Г. Мустафина, Б.С. Байжанова и др.

Алгебры бинарных формул тесно связаны с разделами алгебраической логики, с реляционными алгебрами[2], с мультиалгебрами[3] , с полугруппами [4] [5] и моноидами. Следует отметить результаты по мультиалгебрам, полученные Н.А. Перязевым,[6] С.Ф. Винокуровым,[7] В.И. Пантелеевым [8] и другими.

Основным понятием, рассматриваемым в данной работе, является следующее понятие алгебры бинарных изолирующих формул.

---

[1]Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2018.

[2]R. D. Maddux, Relation algebras, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3]Перязев Н. А. Тождества в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 29 (2019), 86–97

[4]Ляпин Е. С. Полугруппы. — М. : Гос. изд-во физ.-мат.лит., 1960.

[5]Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М. : Мир, 1972.

[6]Перязев Н. А. Теория Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций ранга 2, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 28 (2019), 113–122.

[7]Винокуров С. Ф., Францева А. С. Сложность представлений многовыходных функций алгебры логики, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 16 (2016), 30–42.

[8]Пантелеев В. И., Зинченко А. С. О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными мультиклонами, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 21 (2017), 61–76.

Определение [9] [10]. Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\varnothing)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые* формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т. е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$ такие, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т. е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, называются *необращаемыми*.

Определение. [11] Для типов $p(x), q(y) \in S(\varnothing)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество $\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y)$ — главная формула, $\varphi(a,y) \vdash q(y)$, где $\models p(a)\}$.

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Зафиксируем полную теорию T. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого эле-

[9]Судоплатов С. В. Гиперграфы простых моделей и распределения счётных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, No 7. С. 179–203.

[10]Baizhanov B. S., Sudoplatov S. V., Verbovskiy V. V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2012. Vol. 9. P. 161–184.

[11]Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

мента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\varnothing)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \varnothing$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\varnothing)$ и множеств меток $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,y),$$

где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k (\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y)).$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распре-*

делений бинарных изолирующих формул с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\varnothing)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\varnothing)$. Алгебра бинарных изолирующих формул с множеством меток, связывающих 1-типы из семейства R, сводится к частичной мультиалгебре с одной бинарной операцией перемножения меток, при которой для любых меток $y, z \in \rho_{\nu(R)}$ результат умножения yz является подмножеством $\rho_{\nu(R)}$ и для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)})$ имеет место соотношение $Y \cdot Z = \bigcup\{yz \mid y \in Y, z \in Z\}$. Полученный группоид $\langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}), \cdot \rangle$ обозначается через $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$, а если $R = \{p\}$, то эта алгебра обозначается через $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$. При этом при наличии малости теории алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ сводится к своему естественному ограничению на $\mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\varnothing\}$.

В работе речь идет об описании алгебр бинарных изолирующих формул $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$ для ряда естественных классов теорий: теорий отношений эквивалентности, теорий унаров, теорий симплексов и архимедовых тел, полигонометрических теорий [12], различных видов упорядоченных теорий, включая слабо о-минимальные и вполне о-минимальные теории.

Определение.[13] *Слабо о-минимальной структурой называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$.*

В работе Д.Макферсона, Д.Маркера и Ч.Стейнхорна получены первоначальные глубокие структурные результаты о слабо о-минимальных теориях.

В следующих определениях $\mathcal{M}$ — слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, $\mathcal{M}$ является $|A|^+$-насыщенной, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы.

Определение. [14] Говорят, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Определение. [15] Говорят, что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), где $p, q \in S_1(A)$, если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить, что слабо о-минимальная теория

[12] Судоплатов С. В. Полигонометрии групп. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013.

[13] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society **352** (4), 5435–5483 (2000).

[14] Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382–1414.

[15] Кулпешов Б.Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26–31.

является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой ортогональности и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

В работе Б.Ш.Кулпешова показано, что вполне о-минимальные теории, образующие подкласс класса слабо о-минимальных теорий, наследуют многие свойства о-минимальных теорий. В работе Б.Ш.Кулпешова [16] были полностью описаны $\aleph_0$–категоричные вполне о-минимальные теории. Это описание влечет их бинарность, т.е. сведение всех формул теории к булевым комбинациям формул от двух свободных переменных (аналогичный результат верен для $\aleph_0$-категоричных о-минимальных теорий).

Свойство бинарности дает возможность сведения алгебр изолирующих формул к подходящим группоидам и представлениям алгебр таблицами Кэли.

Цель работы. Целью данной работы является: описание алгебр бинарных изолирующих формул для различных естественных классов теорий, их систематизация.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и своевременно опубликованы. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Методология и методы исследования. Для достижения поставленной цели исследования предлагаются методы теории моделей, основанные на использовании классических и новых понятий общей теории моделей, а также алгебраические и теоретико-графовые методы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Описаны алгебры бинарных формул для естественных классов теорий, в частности для теорий унаров, теорий симплексов и архимедовых тел, полигонометрических теорий. Результаты для теорий унаров, теорий симплексов и архимедовых тел получены лично и опубликованы в [1, 5, 14, 15, 21, 22, 26], а для полигонометрических теорий получены в неразделимом соавторстве с Судоплатовым С.В. и опубликованы в [3, 6, 24, 27].

2. Описаны алгебры бинарных формул для различных видов теорий упорядоченных структур, включая счетно категоричные слабо о-минимальные, вполне о-минимальные, циклически упорядоченные. Охарактеризованы условия изоморфизма алгебр над данными типами , а также обобщенной коммутативности алгебр над парой типов теорий упорядоченных структур в терминах ранга выпуклости. Результаты получены в неразделимом соавторстве с Кулпешовым Б.Ш., Судоплатовым С.В. и опубликованы в [2, 4, 11, 13, 18, 23].

3. Описана взаимосвязь алгебр бинарных формул с операциями над ал-

[16] Кулпешов Б.Ш. Счетно-категоричные вполне о-минимальные теории // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 2011, том 11, выпуск 1, С. 45-57.

гебраическими системами, включая композиции, декартовы, тензорные и корневые произведения. Результаты о декартовых, тензорных и корневых произведениях получены лично и опубликованы в [22, 33, 35–37], а результаты о композициях получены в неразделимом соавторстве с Кулпешовым Б.Ш., Судоплатовым С.В. и опубликованы в [7, 28–32, 34].

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная научная студенческая конференция, 2016, 2018, Новосибирск, НГУ;
- Традиционная международная конференция “Мальцевские чтения”, Новосибирск, 2014–2020;
- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Алматы, Казахстан, 2015–2021;
- Международная конференция “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, г. Казань, 2019;
- Logic Colloquium, 2015, 2017, 2019;
- Синтаксис и семантика логических систем 2017, 2019;
- 14-я международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», посвященная 75-летию профессора Б. Пуаза, Эрлагол, 2021.
- Семинары “Теория моделей имени Е.А. Палютина”, “Алгебра и логика” ИМ СО РАН.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 37 печатных изданиях, 7 из которых изданы в рекомендованных ВАК российских рецензируемых научных журналах, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрических системах (Scopus, Web of Science и т.д.), 30 — в сборниках статей и тезисах докладов. Работы [3, 6, 17, 19, 20, 24, 25, 27] написаны в неразрывном сотрудничестве с Судоплатовым С.В. Работы [2, 4, 7, 11, 13, 18, 23, 28—32, 34] подготовлены в неразрывном соавторстве с Кулпешовым Б.Ш. и Судоплатовым С.В.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 128 страниц машинописного текста. Библиография содержит 101 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований алгебр бинарных изолирующих формул $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приводятся необходимые определения, относящиеся к алгебрам бинарных изолирующих формул. Даны предварительные сведения и основные понятия.

Во **второй главе** дается описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул для естественных классов теорий теорий.

В разделе 2.1 приводится описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул для теорий с отношениями эквивалентности и для семейств вложенных отношений эквивалентности (теоремы 2.1.10. и 2.1.13).

В разделе 2.2 приводится описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул для теории одноместных предикатов с унарной функцией.

Теорема 2.2.5. *Если T — теория унара f с одноместными предикатами, $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа $p \in S^1(\varnothing)$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается ровно одной из следующих алгебр: группой $\mathbb{Z}$, группой $\mathbb{Z}_n$, алгеброй $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$, алгеброй $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$, алгеброй $\langle \omega^*; +\rangle$, $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}$, $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}}$.*

В разделе 2.3 дается описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов.

В разделе 2.4 приводится описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул для теории архимедовых тел.

В **третьей главе** "Алгебры бинарных изолирующих формул для вариаций o-минимальных структур"описываются алгебры для различных теорий упорядоченных структур.

В разделе 3.1 приводится описание алгебр бинарных формул в счетно категоричных слабо o-минимальных структурах.

Теорема 3.1.9. *Пусть T — счетно категоричная слабо o-минимальная теория. Тогда для любого типа $r \in S^1(\emptyset)$ и натурального числа n следующие условия эквивалентны:*

(1) *алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(r)}$ является $(P, \aleph_0, n)$-wom-моноидом;*

(2) $RC_{bin}(r) = n$.

Теорема 3.1.27. *Пусть T — счетно категоричная слабо o-минимальная теория, $p, q \in S^1(\emptyset)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *алгебра* $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ *— обобщенно коммутативный моноид;*
(2) $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$.

В разделе 3.2 приводится описание алгебр бинарных формул для вполне о-минимальных теорий с немаксимальным числом счетных моделей.

Теорема 3.2.13. *Пусть* T *— вполне о-минимальная теория с малым числом счетных моделей,* $p \in S_1(\emptyset)$ *— неалгебраический тип. Тогда существует* $n < \omega$ *такой, что:*

(1) *если* p *— изолированный тип, то алгебра* $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ *является* $(P, \aleph_0, n)$*-wom-моноидом, состоящим из* $2n + 1$ *метки;*

(2) *если* p *квазирациональный вправо (влево), то алгебра* $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ *является* (P, QR, n)*-wom-моноидом* ((P, QL, n)*-wom-моноидом), состоящим из* $2n$ *меток;*

(3) *если* p *иррациональный, то алгебра* $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ *является* (P, I, n)*-wom-моноидом, состоящим из* $2n - 1$ *метки.*

Квазирациональному вправо типу p соответствует алгебра $\mathfrak{A}_n^{QR}$ изолирующих формул, состоящая из $2n$ меток, перемножение которых задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$	-1
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\{-1\}$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$	$\{-1\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{-1\}$
-1	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\ldots$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\{-1\}$

Заменив в структуре M' и в формулах θ знак $<$ на $>$, получаем задаваемую той же самой таблицей алгебру $\mathfrak{A}_n^{QL}$ для квазирационального влево типа $p(x) := \{x < d_k \wedge \neg E_{n-1}(d_k, x) \mid k \in \omega\}$.

Если p — иррациональный тип, то ему соответствует алгебра $\mathfrak{A}_n^I$ изолирующих формул, состоящая из $2n - 1$ меток, перемножение которых задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$2n-3$	$2n-2$
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{4\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{2n-2\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2n-3$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\{2n-3\}$	$\ldots$	$\{2n-3\}$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$
$2n-2$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\{2n-2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,2n-2\}$	$\{2n-2\}$

В разделе 3.3 приводится описание алгебр бинарных формул для вполне о-минимальных теорий с немаксимальным числом счетных моделей.

Следствие 3.2.15. *Пусть* T *— вполне о-минимальная теория с малым числом счетных моделей,* $p, q \in S_1(\emptyset)$ *— неалгебраические типы. Тогда алгебры* $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ *и* $\mathfrak{P}_{\nu(q)}$ *изоморфны, если и только если* $RC(p) = RC(q)$ *и типы* p *и* q *одновременно являются изолированными, либо квазирациональными, либо иррациональными.*

Теорема 3.2.21. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с малым числом счетных моделей, $p, q \in S^1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативным моноидом.*

В **четвертой главе** дается описание алгебр бинарных формул для полигонометрических теорий, включая детерминированные и почти (n-почти) детерминированные алгебры. Описаны алгебры для расширения псевдоплоскостей полигонометрий с условием симметрии до плоскостей, а также псевдоевклидовы и интервальные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий.

Определение. [17] Система $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ называется (*почти*) *детерминированной*, если множество u_1u_2 одноэлементно (непусто и конечно) для любых $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$.

Любая детерминированная система $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ порождается моноидом $\mathfrak{P}'_{\nu(p)} = \langle \rho_{\nu(p)}; \odot \rangle$, где $uv = \{u \odot v\}$ при $u, v \in \rho_{\nu(p)}$, и сама, будучи почти детерминированной системой, является моноидом.

Теорема 4.2.2. *Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$, где $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, детерминирована тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:*

(1) $|G_1| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) \leq 2$;

(2) $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) = 1$;

(3) $|G_1| \geq \omega$ *и* $|G_2| = 1$.

При этом в случае (1) алгебра $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ изоморфна единичной группе или группе $\mathbb{Z}_2$, а в случаях (2) и (3) эта алгебра изоморфна группе G_1.

Теорема 4.2.4. *Алгебра бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$ почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа G_1 одноэлементна или группа G_2 конечна.*

В противовес детерминированным алгебрам рассматриваются n-поглощающие алгебры, которые при перемножении n нетривиальных меток захватывают все метки данной алгебры.

Теорема 4.4.1. *Для любой группы G_1 существует тригонометрия $\mathrm{trm} = \mathrm{trm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ такая, что теория $T(\mathrm{trm})$ обладает 2-поглощающей алгеброй бинарных изолирующих формул.*

В **пятой главе** описаны алгебры бинарных изолирующих формул для операций над теориями, приведены примеры с таблицами Кэли.

---

[17] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

В разделе 5.1 приводится описание алгебр бинарных изолирующих формул для теорий произведения графов, таких как декартово, корневое и тензорное произведение.

В разделе 5.2 приводится описание алгебр бинарных изолтрующих формул для композиций теорий.

Определение. *Композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется E-*определимой*, если $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ имеет $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности E, у которого E-классы являются носителями копий структуры $\mathcal{N}$, образующих $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$.*

Теорема 5.1.17. *Если композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ является E-определимой, то алгебра $\mathfrak{P}_T$ бинарных изолирующих формул теории $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ изоморфна композиции $\mathfrak{P}_{T_1}[\mathfrak{P}_{T_2}]$ алгебр $\mathfrak{P}_{T_1}$ и $\mathfrak{P}_{T_2}$ бинарных изолирующих формул теорий $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ и $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.*

Следствие 5.1.18. *Если композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ является E-определимой, $T_1 = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, $T_2 = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, и T_1, T_2 — транзитивные теории с алгебрами $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ и $\mathfrak{P}_{\nu'(p')}$ соответственно, то теория $T_1[T_2]$ имеет алгебру $\mathfrak{P}_{\nu''(p'')}$ с единственным 1-типом p'', изоморфную композиции $\mathfrak{P}_{\nu(p)}[\mathfrak{P}_{\nu'(p')}]$.*

Теорема 5.2.21. *Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_0[\mathfrak{P}]$, где $\mathfrak{P}_0$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории плотного линейного порядка без концевых элементов.*

Теорема 5.2.22. *Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \widehat{\mathfrak{P}}_0[\mathfrak{P}]$, где $\widehat{\mathfrak{P}}_0$ — алгебра бинарных изолирующих формул неглавного 1-типа теории Эренфойхта.*

Теорема 5.2.24. *Для любого I-группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ так, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\mathbb{Z}}[\mathfrak{P}]$.*

Теорема 5.2.28. *Для любого натурального $n \geq 1$ существует $\aleph_0$-категоричная слабо циклически минимальная структура $\mathbb{Q}_n$ с примитивной группой автоморфизмов и такая, что соответствующая алгебра $\mathfrak{P}_{\mathbb{Q}_n}$ бинарных изолирующих формул имеет ровно $n+1$ метку.*

Теорема 5.2.29. *Алгебра $\mathfrak{P}_{\mathbb{Q}_n}$ бинарных изолирующих формул обладает следующими правилами умножения:*

(1) *для любой метки k с условием $0 \leq k \leq n$ выполняется $0 \cdot k = k \cdot 0 = \{k\}$;*

(2) *для любых меток k_1, k_2 с условиями $1 \leq k_1, k_2 \leq n$ справедливо:*

(2a) *если $k_1 + k_2 \leq n$, то $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{k_1 + k_2 - 1, k_1 + k_2\}$;*

(2b) *если* $k_1 + k_2 - n = 1$, *то* $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{0, 1, n\}$;

(2c) *если* $k_1 + k_2 - n = m$ *для некоторого* $m \geq 2$, *то* $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{m - 1, m\}$.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе.

Автор благодарит своих научных руководителей Судоплатова С.В. и Кулпешова Б.Ш. за постановку задач исследования и за оказанное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК, а также входящих в наукометрические базы:

[1] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика", 2016, Т. 17, С. 23–36. (РИНЦ, Scopus, ВАК)

[2] *Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В.* Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 1. С. 20–54. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)

[3] *Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В.* О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 20. С. 32-44. (РИНЦ, Scopus, ВАК)

[4] *Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В.* Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, N 6. С. 662–683. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)

[5] *Емельянов Д.Ю.* Алгебры распределений бинарных формул для теорий архимедовых тел // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 36—52. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)

[6] *Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В.* Структура алгебр бинарных формул полигонометрических теорий с условием симметрии // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 1-20. (РИНЦ, WoS, Scopus)

[7] *Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В.* Алгебры бинарных формул для композиций теорий // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, N 4. С. 432–457. (РИНЦ, WoS, Scopus, ВАК)

Другие публикации:

[8] *Емельянов Д.Ю.* Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с подстановкой // Международная конференция "Мальцевские чтения", 10-13 ноября 2014 г. Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2014. — С. 126.

[9] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с унарной функцией // Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 75-летию Ю. Л. Ершова, 3–7 мая 2015 г. Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, 2015. – С. 183.

[10] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с унарной функцией. II // Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», посвященная 50-летию создания Института математики и механики АН КазССР, Алматы, 1-5 июня 2015 г. Тезисы докладов. Алматы: ИМММ, 2015. С. 173-174.

[11] *Yemelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.* On algebras of distributions for binary formulas of countably categorical weakly o-minimal theories // Book of Abstracts. 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Logic Colloquium 2015, LC 2015, Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Helsinki 3-8 August 2015. University of Helsinki, 2015. — P. 663.

[12] *Емельянов Д. Ю.* Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности // Algebra and Model Theory 10: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. — P. 59–70.

[13] *Yemelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.* On algebras of distributions for binary formulas of countably categorical weakly o-minimal theories // The Bulletin of Symbolic Logic. 2016. V. 22, N 2. 2015 European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Logic Colloquium '15, Helsinki, Finland, August 3–8, 2015. P. 366-435. — P. 407–408.

[14] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах бинарных полуизолирующих формул для теорий решеточно упорядоченных отношений эквивалентности // Международная научная конференция «Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения», посвященная 60-летию академика НАН РК А.С.Джумадильдаева. Алматы, 8-9 апреля 2016

г. Тезисы докладов. - Алматы: Изд-во Института математики и математического моделирования МОН РК, 2016. С. 22-23.

[15] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий решеточно упорядоченных отношений эквивалентности — Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. 236 с. – С. 7.

[16] *Емельянов Д.Ю.* О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующих формул // Международная конференция "Мальцевские чтения", 21-25 ноября 2016 г. Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2016. — С. 182.

[17] *Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В.* О поглощающих алгебрах бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий // Тез. докл. Ежегодная научная апрельская Института математики и математического моделирования, посвященная Дню науки, Алматы, 7-8 апреля 2017 года. Алматы: ИМММ, 2017, с. 23–24.

[18] *Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On algebras of distributions for binary formulas of quite o-minimal theories with non-maximum many countable models // Logic Colloquium 2017. Stockholm, August 14-20, 2017 Programme and abstracts. Stockholm: Edition of Stockholm University, 2017, p. 105–106.

[19] *Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В.* О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий // Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 14-19 августа 2017 г. Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО РАН, НГУ, 2017, с. 77.

[20] *Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В.* Об интервальных алгебрах бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий // Международная конференция "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики", посвященная 100-летию со дня рождения академика Тайманова Асана Дабсовича, Алматы, 22-25 августа 2017 г. Тез. докл. Алматы: ИМММ, 2017, с. 23–24.

[21] *Емельянов Д. Ю.* Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Междунар. конф. Мальцевские чтения: Тез. докл. Новосибирск, 2017. С. 146.

[22] *Емельянов Д.Ю.* Algebras of binary isolating formulas for simplex theories // Algebra and Model Theory, Novosibirsk, 2017, pp. 66–74.

[23] *Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On algebras of distributions for binary formulas of quite o-minimal theories with non-maximum many countable models // The Bulletin of Symbolic Logic. 2018. V. 24, N 2. 2017 European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Logic Colloquium '17, Stockholm, August 14-20, 2017. P. 211-277. – P. 241-242.DOI: http://dx.doi.org/10.1017/bsl.2018.13

[24] *Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В.* О структуре алгебр бинарных формул полигонометрических теорий с условием симметрии // Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан 10 апреля 2018, Алматы, Казахстан: тез. докл. - Алматы: ИМММ, 2018. С. 16-18.

[25] *Emelyanov D. Yu., Sudoplatov S. V.* On almost deterministic algebras of binary isolating formulas for polygonometrical theories // Handbook of the 6th World Congress and School on Universal Logic June 16–26, 2018 Vichy, France. – Vichy: Vichy University, 2018. – P. 232-233.

[26] *Емельянов Д. Ю.* Об алгебрах бинарных изолирующих формул для архимедовых тел // Междунар. конф. "Мальцевские чтения" 2018: Тез. докл. Новосибирск, 2018. С. 190.

[27] *Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В.* О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий с условием симметрии // Междунар. конф. "Мальцевские чтения" 2018: Тез. докл. Новосибирск, 2018. С. 191.

[28] *Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On compositions of dense linear orders with structures and their algebras of binary formulas // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, 3-5 апреля 2019, Алматы, Казахстан. Тез. докл. Алматы: ИМММ, 2019. С. 16-17.

[29] *Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On compositions of discrete linear orders with structures and their algebras of binary formulas // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.). - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2019. С. 35-37.

[30] *Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On compositions of structures and compositions of theories // Logic Colloquium 2019. Book of abstracts. D. Chodounsky, S. Stejskalova, J. Verner (eds.) Published by AMCA, spol. s r.o., 2019 Printed MatfyzPress, Publishing House of the Faculty of Mathematics and Physics Charles University Sokolovska 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic. P.94-95. ISBN 978-80-88214-19-9

[31] *Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* О композициях циклических плотных порядков со структурами и их алгебрах бинарных формул // Синтаксис и семантика логических систем [Электронный ресурс] : материалы 6-й Междунар. школы-семинара. Монголия, Ханх, 11-16 авг. 2019 г. / [редкол.: С. С. Гончаров [и др.]]; ФГБОУ ВО "ИГУ". — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — Загл. с этикетки диска. — С. 44-47. ISBN 978-5-9624-1734-9

[32] *Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On compositions of circular discrete orders with structures and their algebras of binary formulas // Международная конференция "Мальцевские чтения", 19-23 августа 2019 г. Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2019. С. 195-196.

[33] *Емельянов Д.Ю.* Algebras of binary isolating formulas for theories of Cartesian products of graphs // Algebra and Model Theory, Novosibirsk, 2019, pp. 21–31.

[34] *Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* On compositions of structures and compositions of theories // The Bulletin of Symbolic Logic. 2019. V. 25, N 4. 2019 European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Logic Colloquium 2019, Prague, Czech Republic, August 11-16, 2019. P. 481-530. - P. 508-509. DOI: https://doi.org/10.1017/bsl.2019.56

[35] *Емельянов Д.Ю.* Алгебры распределений бинарных формул для декартовых произведений графов // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке: Материалы IX Международной научно-методической конференции, посвященной 75-летию профессора Е.Ы. Бидайбекова и 35-летию школьной информатики, 1-3 октября 2020 г. - Алматы, КазНПУ имени Абая, издательство "Улагат", 2020. С. 26-27. ISBN 978-601-298-715-7

[36] *Емельянов Д.Ю.* Об алгебрах бинарных изолирующих формул для корневых произведений графов // Международная конференция "Мальцевские чтения". Тезисы докладов. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2020. С. 218.

[37] *Емельянов Д.Ю.* Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий тензорных произведений графов // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Казахстанского дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика Кальменова Тынысбека Шариповича. Алматы, Казахстан. Тез. докл. Алматы: ИМММ, 2021. С. 113–114.