На правах рукописи

Мамонтов Андрей Сергеевич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С ПЛОТНЫМ СПЕКТРОМ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Мазуров Виктор Данилович

Официальные оппоненты:
Журтов Арчил Хазешович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»,
профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

Кузнецов Александр Алексеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева»,
директор научно-образовательного центра «Институт космических исследований и высоких технологий»

Лысёнок Игорь Геронтьевич,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник отдела математической логики

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Защита диссертации состоится 25 ноября 2021 года в 14 : 00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан ________________ 2021 г.
Ученый секретарь диссертационного совета
к.ф.–м.н., доцент А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Многие теоремы, доказанные сперва для конечных групп, удаётся перенести на более широкие классы групп, накладывая на рассматриваемые группы те или иные ограничения, более слабые, чем конечность числа элементов [1, с. 337]. Такие ограничения называют *условиями конечности.* Примерами подобных условий являются периодичность и локальная конечность.

Группа называется *периодической*, если все её элементы имеют конечные порядки. *Группой периода n* называется группа, в которой выполняется тождество $x^n = 1$. Наименьший период группы называется её *экспонентой.* Группа называется *локально конечной*, если всякое её конечное подмножество порождает конечную подгруппу.

Вопрос о связи понятий периодичности и локальной конечности поднял У. Бернсайд в 1900–1901 годах [2]. Более точно, говоря современным языком, его интересовали следующие вопросы [3]:

Вопрос 1. Пусть n — натуральное число, и G — группа, порядки элементов которой не превосходят n. Является ли G локально конечной?

Вопрос 2. Пусть n — натуральное число. Является ли группа периода n локально конечной?

В 1902 году У. Бернсайд опубликовал работу [4], в которой обсуждал Вопрос 2. Со временем этот вопрос стал известен как *проблема Бернсайда* о группах периода n. Вопрос 1 упоминался в книге [5] со ссылкой на У. Бернсайда.

Эти вопросы довольно разные: второй является частным случаем первого; однако, например, для $n = 6$ на Вопрос 2 получен положительный ответ [6], а Вопрос 1 — открыт, поскольку содержит нерешённый случай Вопроса 2 для $n = 5$. В связи с этим естественно сформулировать аналогичный вопрос, используя следующее понятие.

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков её элементов. Очевидно, спектр группы конечен тогда и только тогда, когда конечен её период. В таком случае спектр однозначно определяется множеством $\mu(G)$ максимальных элементов из $\omega(G)$ по отношению делимости.

Вопрос 3. Пусть ω — фиксированное конечное множество натуральных чисел, и G — периодическая группа, такая что $\omega(G) = \omega$. Является ли G локально конечной?

Поскольку спектр группы содержит единицу и замкнут относительно делимости, то естественно накладывать такие же ограничения и на множество ω.

Далее основное внимание уделяется вопросу 3, а вопросы 1 и 2 затрагиваются лишь по мере необходимости. Естественно описывать историю исследования этих вопросов и известные результаты вместе.

У. Бернсайд в 1902 году отметил локальную конечность групп периода 2 и доказал локальную конечность групп периода 3 [4]. Вскоре было доказано [7, 8, 9], что если G — группа периода 3, порождённая d элементами, то она нильпотентна ступени ≤ 3 и её порядок ограничен в терминах d.

Первым, кто обратился к Вопросу 3, был Б. Нойман. В 1937 году он доказал [10], что если $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$, то G локально конечна и является расширением элементарной абелевой группы посредством циклической. Заметим, что из результатов Б.Ноймана и У. Бернсайда, следует положительный ответ на Вопрос 1 для $n = 3$.

В 1940 году И. Н. Санов доказал локальную конечность групп периода 4 [11]. Строение таких групп оказалось несколько неожиданным: с ростом числа порождающих ступень разрешимости группы может неограниченно расти [12]. В той же работе И. Н. Санов доказал и локальную конечность групп со спектром $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4\}$. Строение таких групп описано в работе [13]. Идеи И. Н. Санова также формализованы в работе [14].

В 1956 году вышла знаменитая статья Ф. Холла и Г. Хигмена [15], предоставившая математикам новые мощные методы для исследования конечных групп. В частности, она сподвигла М. Холла написать работу [6], где он доказал локальную конечность групп периода 6 и описал их нормальное строение в духе этой статьи.

Заметим, что позднее в работе [16] М. Ньюмен существенно сократил доказательство М. Холла, сведя его к некоторому утверждению, которое он проверил с помощью компьютера. И. Г. Лысёнок в [17] освободил доказательство Ньюмена от компьютерных вычислений.

В 1959 году П. С. Новиков анонсировал существование бесконечной конечно порождённой группы конечного периода [18]. В 1968 году П. С. Новиков и С. И. Адян написали серию работ [19, 20, 21], в которых доказывалось существование бесконечной m–порождённой группы периода n для нечётного $n \geq 4381$. В 1975 году вышла книга С. И. Адяна [22], где оценка была понижена до нечётного $n \geq 665$. Геометрически наглядный вариант доказательства для нечётных $n > 10^{10}$ был предложен А. Ю. Ольшанским [23, 24], который позднее [25] на основе усовершенствованного им геометрического метода построил примеры бесконечных p-групп (p простое), все собственные подгруппы которых имеют порядок p (так называемые "монстры Тарского"); в [26] предложен другой способ построения таких примеров. Существование не локально конечных групп конечного периода 2^t было анонсировано в 1992 году независимо С. И. Ивановым и И. Г. Лысёнком. Их работы [27] и [28] с доказательствами вышли в 1994 и 1996 годах соответственно. В частности, в работе И. Г. Лысёнка доказывается существование бесконечной m-порождённой группы периода n для любых $m \geq 2$ и $n \geq 8000$.

Из обсуждения выше видна особая роль элементов порядка 2, которые принято называть *инволюциями*. Две инволюции всегда порождают понятно устроенную группу диэдра. В работах Р. Брауэра установлена глубокая взаимосвязь между централизаторами инволюций конечной группы и её строением, например, доказано, что имеется лишь конечное число простых групп с заданным централизатором инволюции [29]. В знаменитой работе У. Фейта и Д. Томпсона [30], доказано, что любая конечная неразрешимая группа содержит инволюцию.

В 1972 году В. П. Шунков [31] доказал замечательную теорему о локальной конечности периодической группы с конечным централизатором инволюции. Появилась надежда, что некоторые результаты о конечных группах с инволюциями могут быть перенесены на периодические группы. Кроме того, появился и метод для подобных исследований, и этот метод используется в диссертации. Отметим работу [32], содержащую другое доказательство теоремы В. П. Шункова.

Работа М. Ньюмена [33] 1979 года вернула в повестку исследований Вопрос 3. Она посвящена 70-летию Б. Ноймана, приводит обзор исследований по этой тематике и в качестве нового результата содержит описание групп G со спектром $\omega(G) = \{1, 2, 5\}$.

Спустя ровно 20 лет, в 1999 году Н. Гупта и В. Д. Мазуров опубликовали работу [34], содержащую существенные продвижения по этому вопросу. Они доказали, что если $\omega(G)$ является собственным подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то либо G локально конечна, либо содержит нильпотентную нормальную подгруппу N, такую что G/N является $5-$группой. Из работ Э. Ябары [35, 36] следует, что в последнем случае G/N конечна, если $N \neq 1$ Таким образом, G локально конечна, или является группой периода 5. Э. Ябара, по сути, доказывает, что группа периода 5, действующая *свободно*, т.е. без нетривиальных неподвижных точек, на абелевой группе, является циклической, — аналог известного утверждения в теории конечных групп. Отметим также работы [37, 38], посвящённые свободному действию, которые используются в диссертации. Работы [39, 40, 41] содержат результаты о $\{2, 3\}-$ группах, действующих свободно на абелевых группах. Свобода действия также естественно возникает в $\{2, 3\}-$группах, не содержащих элементов порядка 6, изучавшихся в работах [42, 43, 44, 45]. Резюмировать результаты этих работ по исследованию Вопроса 3 можно следующим утверждением: если G является группой периода 72 и не содержит элементов порядка 6, то G локально конечна. Заметим, что существуют не локально конечные группы G с $\mu(G) = \{2, 3^n\}$, где $n \geq 7$ [46] и $\mu(G) = \{2^m, 3\}$, где $m \geq 54$ [43].

Периодическую группу G назовём *группой с плотным спектром*, или *OC_n-группой*, если её спектр состоит из всех натуральных чисел от 1 до некоторого натурального числа n, т.е. $\omega(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$. В 1991 году Р. Брандл и В. Ши опубликовали работу [47], которая содержит классификацию всех *конечных* OC_n-групп. В частности, они доказали, что при $n > 8$ конечных OC_n-групп не существует. Из написанного выше и работы [48] следует, что при $n \leq 5$ периодические OC_n группы локально конечны. В диссертации решён Вопрос 3 для периодических OC_6 и OC_7 групп: доказано, что такие группы являются локально конечными. Тем самым, решены вопросы 16.56 В. Д. Мазурова и 19.80 В. Ши из Коуровской тетради [73], являющиеся также частью вопроса 13.64 В.Ши от 1995 года.

В конце 1980-х годов появилось целое направление исследований в теории конечных групп, посвящённое вопросам распознавания неабелевых конечных простых групп по спектру. Среди первых исследователей были В. Ши и В.Д.Мазуров, этому направлению по сути принадлежит и упомянутая выше работа [47].

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество периодических групп и $G \in \mathfrak{M}$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры равны. Говорят, что G *распознаваема по спектру в* $\mathfrak{M}$, если любая группа, изоспектральная G и лежащая в $\mathfrak{M}$, изоморфна G. К настоящему времени показано, что многие конечные простые группы распознаваемы по спектру в классе конечных групп: обзор текущего состояния исследований в этом направлении можно найти, например, в [49]. Отметим, что вопрос распознавания неабелевых конечных простых групп по спектру в классе всех групп, является частным случаем Вопроса 3.

В 1999 А.Х.Журтов и В.Д.Мазуров доказали [50], что проективные специальные линейные группы $L_2(2^m)$ распознаваемы по спектру в классе всех групп для любого $m > 1$. Эта работа подчеркивает важную связь между устройством централизатора инволюции, который в данном случае является элементарной абелевой 2-группой, и строением периодической группы. В работе [51] получен аналогичный результат для группы $L_2(7)$, спектр которой состоит из делителей чисел $\{3, 4, 7\}$. Поскольку знакопеременная группа A_7 является единственной конечной OC_7 группой [47], то из локальной конечности OC_7 групп, доказанной в диссертации, следует распознаваемость группы A_7 по спектру в классе периодических групп. В диссертации также доказывается, что группы Матьё M_{10} и $M_{21} \simeq L_3(4)$ распознаваемы по спектру в классе периодических групп.

Известны примеры конечных простых групп, которые распознаваемы по спектру в классе конечных групп, но не распознаваемы в классе периодических групп [52]. Они связаны с не локально конечными группами большого чётного периода, обеспечивающими отрицательное решение проблемы Бернсайда.

Заметим, что если G — это OC_6 или OC_7 группа, то G содержит инволюцию i и централизатор инволюции $H = C_G(i)$ является группой периода 12 без элементов порядка 12, т.е. $\mu(H) = \{4, 6\}$. В связи с проблемой Бернсайда для групп периода 12 в нескольких работах получены так называемые редукционные результаты. Так 2-длина [53] и 3-длина [15] группы периода 12 не превосходит двух и эта граница точная. В [54] доказано, что группа периода 12 локально конечна, если конечна любая её подгруппа, порождённая тремя элементами порядка 3. Вопрос о локальной конечности групп периода 12 открыт. Отметим также работу [55], где доказано, что наибольшая конечная группа периода 12, порождённая инволюцией и элементом порядка 3, имеет порядок $2^{66} \cdot 3^7$. В диссертации доказывается, что группа периода 12 без элементов порядка 12 локально конечна. Этот результат обобщает теоремы И. Н. Санова [11] и М. Холла [6]. Кроме того, он проясняет строение централизаторов инволюций в OC_6 и OC_7 группах. В диссертации также доказывается, что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий:
а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;
б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Отметим, что подобные условия хорошо известны в теории конечных групп. Конечная группа называется группой *n-транспозиций*, если она порождается классом сопряжённых инволюций D и порядок произведения любых двух элементов из D не превосходит n.

Конечные группы 3-транспозиций начал изучать Б.Фишер [56, 57], они полностью классифицированы [58]. Кроме того, любая группа 3-транспозиций является локально конечной [59]. Спорадические группы Фишера, Бэби монстр и Монстр [60] являются группами 3, 4 и 6-транспозиций соответственно. Используя наработанные в диссертации методы, были классифицированы *минимальные 3-порождённые группы 6-транспозиций*, т.е. группы G, для которых выполнены следующие условия:
(1) G порождается тремя элементами из класса сопряжённости D, состоящим из 6-транспозиций;
(2) если $H \leq G$ и $H = \langle H \cap D \rangle$, то либо $H = G$ либо H может быть порождена двумя элементами из D.

Этот результат был использован в теории Майорана, предложенной А. А. Ивановым [61] в качестве аксиоматизации некоторых свойств алгебры

Грайса [62]. Напомним, что группа Монстр $\mathbb{M}$ — наибольшая из двадцати шести спорадических групп — была впервые построена, как группа автоморфизмов 196884-мерной коммутативной неассоциативной вещественной алгебры Грайса [62].

Другим направлением исследований, предварявшим изучение групп с плотным спектром, были попытки распространить известные в теории конечных групп результаты Бэра-Сузуки на периодические группы.

Обозначим через $O_p(G)$ максимальную нормальную p-подгруппу периодической группы G. Следующее утверждение известно как теорема Бэра-Сузуки. Пусть x — p-элемент конечной группы G, тогда $x \in O_p(G)$ в том и только в том случае, если $\langle x^g, x^h \rangle$ — p-группа для всех $g, h \in G$ [63, 64, 65]. Существует и несколько других эквивалентных формулировок.

Эта теорема применялась в теории конечных разрешимых групп [66] и при классификации конечных простых групп [67]. Важным практическим следствием теоремы Бэра-Сузуки является утверждение о том, что в простой группе G любая инволюция инвертирует некоторый неединичный элемент нечётного порядка [65].

Различные обобщения и аналоги теоремы Бэра–Сузуки исследовались многими авторами (см., например, [69, 70, 71, 68]). В работе [72], вошедшей в кандидатскую диссертацию соискателя, был доказан аналог теоремы Бэра-Сузуки для групп с условием максимальности для нильпотентных подгрупп.

В 1990 году А. В. Боровик записал в Коуровскую тетрадь [73] вопрос 11.11.a) о том, справедлива ли теорема Бэра-Сузуки в классе периодических групп, отметив, что особый интерес вызывает случай $p = 2$.

В диссертации теорема Бэра-Сузуки для $p = 2$ обобщается на группы периода $4k$, где k нечётно. Отметим, что в этом случае 2-радикал $O_2(G)$ является группой периода 4 и потому локально конечен. Последнее наблюдение показывает, как этот результат можно использовать для исследований групп с заданным спектром, обсуждавшихся выше. В работе [52] доказывается существование группы периода, делящегося на 2^{48}, в которой любые две инволюции порождают 2-группу, но 2 - радикал равен 1.

В диссертационной работе используются компьютерные вычисления в GAP [74] по алгоритму перечисления смежных классов. Отметим, что идея использовать машинные вычисления в этой области исследований появилась практически сразу же с распространением компьютеров. Она активно обсуждалась уже на конференции по бернсайдовым группам в Билфелде в 1977 году, и в последующих публикациях [75, 76]. Например, компьютеры использовались для изучения свойств групп периода 8 [77] и для сравнения их со свойствами бесконечных бернсайдовых групп [78].

Пусть $B(m,n)$ обозначает свободную m-порождённую группу периода n, а $B_0(m,n)$ — наибольшую конечную m-порождённую группу периода n [79, 80]. В работе [81] изучалась природа соотношений, необходимых для доказательства конечности $B(2,6)$. Показано, что требуется от 22 до 2^{124} соотношений, использующих шестую степень, для определения группы $B(2,6)$. Авторы работы отмечают ограниченность возможностей компьютера, считая, что непосредственным перечислением смежных классов не удастся ни доказать конечность $B(2,6)$, ни найти небольшое множество порождающих, поскольку $|B(2,6)| = 2^{28}3^{25}$. Таким образом, в вопросах бернсайдового типа компьютерные вычисления могут играть только вспомогательную роль. Приведём также несколько известных оценок, которые показывают специфику работы с элементами порядка 5 и 7, в том числе при компьютерных вычислениях. Группа $B_0(2,5)$ имеет порядок 5^{34} и ступень нильпотентности 12 [82]. Группа $B_0(2,7)$ имеет порядок 7^{20416} и ступень нильпотентности 28 [83].

Наконец, отметим, что рассматриваемым в диссертации вопросам посвящено несколько обзоров [3, 84].

Цель и основные результаты диссертации.

Цель диссертации состоит в разработке методов и доказательстве локальной конечности групп с плотным спектром. Основные результаты диссертации таковы.

1. Доказана локальная конечность OC_6 и OC_7 групп. Результат опубликован в статьях [93, 85, 86, 87].

2. Доказана локальная конечность групп периода 12 без элементов порядка 12. Результат опубликован в статье [96].

3. Доказана распознаваемость групп M_{10} и $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп. Результат опубликован в статьях [92, 91].

4. Доказано, что теорема Бэра-Сузуки для $p=2$ справедлива в группах периода $4k$, где k нечётно. Результат опубликован в статье [94].

5. Классифицированы минимальные 3-порождённые группы 6-транспозиций. Результат опубликован в статье [88].

6. Доказано, что если $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{5, 7\}$, то G локально конечна; а если $\mu(G) = \{6, 7\}$, то G является расширением локально конечной группы с помощью группы без инволюций. Результат опубликован в статьях [90, 89].

7. Доказано, что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий:
а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;
б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.
Результат опубликован в статьях [97, 95].

Результаты диссертации опубликованы в [97, 95, 96, 92, 93, 94, 91, 90, 89, 88, 85, 86, 87] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты 2 и 4 получены автором лично, остальные результаты получены в неразделимом соавторстве: [97] с Д. В. Лыткиной и В. Д. Мазуровым; [95] с В. Д. Мазуровым; [92] с Д. В. Лыткиной и Э. Ябарой; [93] с Д. В. Лыткиной, В. Д. Мазуровым и Э. Ябарой; [91, 90, 86, 87] с Э. Ябарой; [89] с В. Го; [88] с М. Виброу и А. М. Старолетовым.

Новизна и научная значимость работы.

В диссертации изучаются периодические группы с заданным спектром. Наиболее значительный результат диссертации — доказательство локальной конечности OC_6 и OC_7 групп, и получение новых примеров простых групп распознаваемых по спектру в классе всех групп. Важным инструментом этой работы стал результат о локальной конечности групп периода 12 без элементов порядка 12, обобщающий результаты И. Н. Санова и М. Холла, и описывающий строение централизаторов инволюций в OC_6 и OC_7 группах, а также доказательство налога теоремы Бэра-Сузуки для групп 2-периода 4. Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, методы локального анализа, теория периодических групп, а также вычисления в системе компьютерной алгебры GAP, использующие алгоритм перечисления смежных классов. Кроме того, в работе используются оригинальные методы, разработанные автором.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на конференциях в Новосибирске, Москве, Санкт-Петербурге, Екатеринбурге, Нальчике, Минске (Беларусь), Сент-Андрусе, Уорике, Бирмингеме (Англия), Искье (Италия). Результаты работы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и НГУ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы. Она изложена на 131 страницах, библиография содержит 119 наименований.

Перейдём к более подробному изложению работы.

Основное содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на разделы. Основные результаты диссертации называются теоремами. Точные формулировки всех теорем приведены в соответствующих главах. Вспомогательные утверждения — предложения и леммы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер раздела в текущей главе, третье — номер утверждения в текущем разделе.

Глава 1. Глава посвящена основным определениям, обозначениям и используемым результатам и содержит три соответствующих раздела. Формулируются основные определения, использующиеся на протяжении всей диссертации. Вводятся обозначения, в том числе для некоторых групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями. Приводятся формулировки некоторых известных результатов, которые используются в доказательствах, и их непосредственные следствия.

Глава 2. Первый раздел содержит доказательство аналога теоремы Бэра-Сузуки для групп 2-периода 4. В последующих разделах рассматриваются группы с элементами небольших порядков: как правило, не больше 7. В разделе 2.2 доказывается конечность подгрупп, порождённых инволюцией и элементом порядка 3. В разделе 2.3 приводятся результаты, связанные с подгруппами, порождёнными инволюцией и элементом порядка 4. В разделах 2.4-2.5 описываются свойства соответствующих подгрупп: F_{42} и A_4. Результаты главы 2 используются при доказательстве результатов главы 3 и 4.

Глава 3. В данной главе доказываются следующие основные результаты диссертации. В первом разделе главы доказывается локальная конечность групп периода 12 без элементов порядка 12. В разделах 3.2 и 3.3 доказывается распознаваемость групп M_{10} и $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп, соответственно. В разделе 3.4 доказывается, что если $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{5, 7\}$, то G локально конечна. В разделах 3.5 и 3.6 доказывается что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий, соответственно:
а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;
б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Глава 4. В данной главе доказывается локальная конечность OC_6 и OC_7-групп. Разделы соответствуют этапам доказательства. В разделе 4.5 доказывается также, что если $\mu(G) = \{6, 7\}$, то G является расширением локально конечной группы с помощью группы без инволюций.

Глава 5. В данной главе доказывается теорема, содержащая классификацию минимальных 3-порождённых групп 6-транспозиций.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту чл.–корр. РАН Виктору Даниловичу Мазурову. Автор также выражает свою признательность к.ф.–м.н. Алексею Михайловичу Старолетову за поддержку в процессе работы над диссертацией.

Список литературы

[1] А. Г. Курош, Теория групп. М.:Наука, 1967.

[2] C. Adelmann, E. H.-A. Gerbracht, “Letters from William Burnside to Robert Fricke: automorphic functions, and the emergence of the Burnside Problem”, Arch. Hist. Exact Sci., 63:1 (2009), 33–50.

[3] D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, “Groups with given element orders”, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 7:2 (2014), 191–203.

[4] W. Burnside, “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups”, Quart. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238.

[5] M. A. Hilton, “An introduction to the theory of groups of finite order”, Clarendon Press, Oxford, 1908.

[6] M. Hall, “Solution of the Burnside problem for exponent six”, Illinois J. Math., 2 (1958), 764–786.

[7] C. Hopkins, “Finite groups in which conjugate operations are commutative”, Amer. J. Math., 51 (1929), 35–41.

[8] F. Levi, “Groups in which the commutator operations satisfy certain algebraic conditions”, J. Indian Math. Soc., 6 (1942), 166–170.

[9] F. Levi, B. van der Waerden, “Uber eine besondere Klasse von Gruppen”, Abh. Math. Semin., Hamburg Univ., 9 (1932), 157–158.

[10] B. H. Neumann, “Groups whose elements have bounded orders”, J. London Math. Soc., 12 (1937), 195–198.

[11] И. Н. Санов, “Решение проблемы Бернсайда для показателя 4”, Учен. зап. Ленингр.гос. ун-та, сер. матем., 55 (1940), 166–170.

[12] Ю. П. Размыслов, "О проблеме Холла–Хигмена", Изв. АН СССР. Сер. матем., 42:4 (1978), 833–847.

[13] Д. В. Лыткина, "Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4", Сиб. матем. журн., 48:2 (2007), 353–358.

[14] M. L. Newell, "On Sanov 4th-compounds of a group", Illinois J. Math. 47:1/2 (2003), 453–459.

[15] P. Hall, G. Higman, "On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem", Proc. London Math. Soc., 6:3 (1956), 1–42.

[16] M. F. Newman, "Groups of exponent six", Computational group theory (Durham, 1982), Academic Press, London, 1984, 39–41.

[17] И. Г. Лысёнок, "Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m, 6)$", Матем. заметки, 41:3 (1987), 422–428.

[18] П. С. Новиков, "О периодических группах", ДАН СССР 127 (1959), 749–752.

[19] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. I", Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[20] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. II", Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[21] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. III", Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[22] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.:Наука, 1975.

[23] А. Ю. Ольшанский, "О теореме Новикова–Адяна", Матем. сб., 118:2 (1982), 203–235.

[24] А. Ю. Ольшанский, Геометрия определяющих соотношений в группах, Наука, М., 1989.

[25] А. Ю. Ольшанский, "Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка", Алгебра и логика, 21:5 (1982), 553–618.

[26] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, "О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические", Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:5 (1991), 933–990.

[27] S. V. Ivanov, “The free Burnside groups of sufficiently large exponents”, Internat. J. Algebra Comput., 4 (1994), 3–308.

[28] И. Г. Лысёнок, “Бесконечные бернсайдовы группы четного периода”, Изв. РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3–224.

[29] R. Brauer, K. A. Fowler, “On groups of even order”. Ann. Math., 62:3 (1955), 565–583.

[30] W. Feit, J. G. Thompson, “Solvability of groups of odd order”, Pacific Journal of Mathematics, 13 (1963), 775–1029.

[31] В. П. Шунков, “О периодических группах с почти регулярной инволюцией”, Алгебра и логика, 11:4 (1972), 470–493.

[32] В. В. Беляев, “Группы с почти регулярной инволюцией”, Алгебра и логика, 26:5 (1987), 531–535.

[33] M. F. Newman, “Groups of exponent dividing seventy”, Math. Sci., 4 (1979), 149–157.

[34] N. D. Gupta, V. D. Mazurov, “On groups with small orders of elements”, Bull. Aust. Math. Soc., 60:2 (1999), 197–205.

[35] E. Jabara, “Fixed point free actions of groups of exponent 5”, J. Aust. Math. Soc., 77:3 (2004), 297–304.

[36] Э. Ябара, “Свободное действие групп периода 5”, Алгебра и логика, 50:5 (2011), 685–688.

[37] B. H. Neumann, “Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed”, Arch. Math., 7 (1956), 1–5.

[38] А. Х. Журтов, “О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса”, Сиб. матем. журн., 41:2 (2000), 329–338.

[39] E. Jabara, P. Mayr, “Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$”, Forum Mathematicum, 21:1 (2009), 217–220.

[40] Д. В. Лыткина, “О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе”, Алгебра и логика, 49:3 (2010), 379–387.

[41] А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. И. Созутов, “О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах”, Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 3, 2013, 136–143.

[42] А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров, “Локальная конечность некоторых групп с заданными порядками элементов”, Владикавк. матем. журн., 11:4 (2009), 11–15.

[43] В. Д. Мазуров, “О группах периода 24”, Алгебра и логика, 49:6 (2010), 766–781.

[44] Э. Джабара, Д. В. Лыткина, “О группах периода 36”, Сиб. матем. журн., 54:1 (2013), 44–48.

[45] E. Jabara, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, “Some groups of exponent 72”, J. Group Theory, 17:6 (2014), 947–955.

[46] А. И. Созутов, “О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса”, Сиб. матем. журн., 35:4 (1994), 893–901.

[47] R. Brandl, W. Shi, “Finite groups whose element orders are consecutive integers”, J. Algebra 143:2 (1991), 388–400.

[48] В. Д. Мазуров, “О группах периода 60 с заданными порядками элементов”, Алгебра и логика, 39:3 (2000), 329–346.

[49] A.V. Vasil’ev, “On finite groups isospectral to simple classical groups”, J. Algebra, 423 (2015), 318–374.

[50] А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров, “О распознавании конечных простых групп $L_2(2^m)$ в классе всех групп”, Сиб. матем. журн., 40:1 (1999), 75–78.

[51] D. V. Lytkina, A. A. Kuznetsov, “Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$”, Сиб. электрон. матем. изв., 4 (2007), 136–140.

[52] В. Д. Мазуров, А. Ю. Ольшанский, А. И. Созутов, “О бесконечных группах конечного периода”, Алгебра и логика, 54:2 (2015), 243–251.

[53] Е. Г. Брюханова. “О 2-длине и 2-периоде конечной разрешимой группы”, Алгебра и логика, 18:1 (1979), 5–20.

[54] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, “О группах периода 12”, Сиб. матем. журн., 56:3 (2015), 594–599.

[55] A. V. Zavarnitsine, “On a finite $2,3$-generated group of period 12”, Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), 548–556.

[56] B. Fischer, “Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung”, Math. Z., 83 (1964), 267–303.

[57] B. Fischer, "Finite groups generated by 3-transpositions", Invent. Math., 13 (1971), 232–246.

[58] M. Aschbacher, 3-transposition groups. (English summary) Cambridge Tracts in Mathematics, 124. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. viii+260 pp.

[59] H. Cuypers, J. I. Hall, "The 3-transposition groups with trivial center", Journal of Algebra, 178 (1995), 149–193.

[60] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press (1985).

[61] A. A. Ivanov, "The Monster Group and Majorana Involutions", Number 176 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[62] R. L. Griess, "The friendly giant", Invent. Math., 69:1 (1982), 1–102.

[63] R. Baer, "Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen", Math. Ann., 133 (1957), 256–270.

[64] M. Suzuki, "Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed", Ann. Math., 82:2 (1968), 191–212.

[65] J. Alperin, R. Lyons, "On conjugacy classes of p-elements", J. Algebra, 19:2 (1971), 536–537.

[66] K. Doerk, T. Hawkes, Finite Soluble Groups. Berlin: de Gruyter, 1992.

[67] Д. Горенстейн, Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

[68] А. И. Созутов, "Об одном обобщении теоремы Бэра–Судзуки", Сиб. мат. журн., 41:3 (2000), 674–675.

[69] S. Guest, "A solvable version of the Baer–Suzuki theorem", Trans. Amer. Math. Soc., 362:11 (2010), 5909–5946.

[70] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskii, E. Plotkin, "From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical", J. Algebra, 323:10 (2010), 2888–2904.

[71] Д. О. Ревин, "О π-теоремах Бэра–Судзуки", Сиб. матем. журн., 52:2 (2011), 430–440.

[72] А. С. Мамонтов, “Аналог теоремы Бэра–Сузуки для бесконечных групп”, Сиб. мат. журн., 45:2 (2004), 394—398.

[73] Unsolved Problems in Group Theory: the Kourovka Notebook. eds. E. I. Khukhro and V. D. Mazurov, 19th edition, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. 2018.

[74] The GAP Group, Gap: groups, algorithms, and programming, vers. 4.10.2 (2019), http:// www.gap-system.org

[75] G. Havas, M. F. Newman, “Application of computers to questions like those of Burnside”, Lecture Notes in Math., 806 (1980), 211–230.

[76] M. F. Newman, E. A. O'Brien, “Application of computers to questions like those of Burnside, II”, Int. J. of Algebra and Computation, 6:5 (1996), 593–605.

[77] F. J. Grünewald, G. Havas, L. Mennicke, M. F. Newman, “Groups of Exponent Eight”, Lecture Notes in Math., 806 (1980), 49–188.

[78] M. F. Newman, “Groups of exponent eight are different”, Bul. of the London Math. Soc., 25:3 (1993), 263–264.

[79] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 42–59.

[80] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп”, Матем. сб., 182:4 (1991), 568–592.

[81] G. Havas, M. F. Newman, A. C. Niemeyer, C. C. Sims, “Groups with exponent six”, Comm. Algebra, 27:8 (1999), 3619–3638.

[82] А. И. Кострикин, Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.

[83] E. A. O'Brien, M. Vaughan-Lee, “The 2-generator restricted burnside group of exponent 7”, Int. J. of Algebra and Computation, 12:4 (2002), 575–592.

[84] M. Herzog, P. Longobardi, M. Patrizia, “Properties of finite and periodic groups determined by their element of orders (a survey)”, Group theory and computation, 59–90, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore, 2018.

Публикации автора по теме диссертации

[85] А. С. Мамонтов, “О периодических группах, изоспектральных A_7”, Сиб. матем. журн., 61:1 (2020), 137–147.

[86] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “О периодических группах, изоспектральных A_7. II”, Сиб. матем. журн., 61:6 (2020), 1366–1376.

[87] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Распознавание A_7 по множеству порядков элементов”, Сиб. матем. журн., 62:1 (2021), 117–130.

[88] A. Mamontov, A. Staroletov, M. Whybrow, “Minimal 3-generated Majorana algebras”, Journal of Algebra, 524 (2019), 367–394.

[89] В. Го, А. С. Мамонтов, “О группах, порядки элементов которых делят 6 и 7”, Сиб. матем. журн., 58:1 (2017), 88–94.

[90] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “О периодических группах с узким спектром”, Сиб. матем. журн., 57:3 (2016), 683–687.

[91] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Распознавание группы $L_3(4)$ по множеству порядков элементов в классе всех групп”, Алгебра и логика, 54:4 (2015), 439–443.

[92] E. Jabara, D. Lytkina, A. Mamontov, “Recognizing M_{10} by spectrum in the class of all groups”, Int. J. of Algebra and Computation, 24:2 (2014), 113–119.

[93] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Группы, порядки элементов которых не превосходят 6”, Алгебра и логика, 53:5 (2014), 570–586.

[94] А. С. Мамонтов, “О теореме Бэра–Сузуки для групп 2-периода 4”, Алгебра и логика, 53:5 (2014), 649–652.

[95] В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, “Инволюции в группах периода 12”, Алгебра и логика, 52:1 (2013), 92–98.

[96] А. С. Мамонтов, “Группы периода 12 без элементов порядка 12”, Сиб. матем. журн., 54:1 (2013), 150–156.

[97] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, “Локальная конечность некоторых групп периода 12”, Сиб. матем. журн., 53:6 (2012), 1373–1378.

Мамонтов Андрей Сергеевич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С ПЛОТНЫМ СПЕКТРОМ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктор физико-математических наук

Подписано в печать 23.08.2021	Формат 60 x 84 1/16
Усл. печ. л. 1.0. Уг.-изд.п. 1,0.	
Заказ N 100	Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6