На правах рукописи

Ыскак Тимур

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НОВОСИБИРСК — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: **Демиденко Геннадий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», профессор

Чудинов Кирилл Михайлович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», доцент

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук**

Защита диссертации состоится 29 июня 2021 г. в 16 : 30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИМ СО РАН: http://math.nsc.ru

Автореферат разослан “28” мая 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.015.04,
кандидат физико-математических наук М.А. Скворцова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начала интенсивно развиваться в середине прошлого столетия. Основы теории были заложены в работах А.А. Андронова, Р. Беллмана, А.М. Зверкина, В.И. Зубова, Г.А. Каменского, Н.Н. Красовского, Н.Н. Меймана, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Л.С. Понтрягина, Б.С. Разумихина, Я.З. Цыпкина, Н.Г. Чеботарева, Л.Э. Эльсгольца и др. Большой интерес к изучению таких уравнений был связан с необходимостью решения важных прикладных задач при изучении процессов, скорость изменения которых определялась не только настоящим, но и предшествующими состояниями. В последующие годы уравнения такого типа возникали во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей и т. д. Поэтому изучение уравнений с запаздыванием является актуальным как с теоретической, так и с практической точек зрения.

В настоящее время имеется огромное число работ, посвященных исследованиям различных задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием, в частности, изучению проблемы устойчивости решений. Этой проблеме посвящен ряд монографий (см., например, А.Д. Мышкис (1951), Л.Э. Эльсгольц (1955), Н.Н. Красовский (1959), Э. Пинни (1961), Р. Беллман и К. Кук (1967), А. Халанай и Д. Векслер (1971), Л.Э. Эльсгольц и С.Б. Норкин (1971), Ю.А. Митропольский и Д.И. Мартынюк (1979), В.Б. Колмановский и В.Р. Носов (1981), С.Н. Шиманов (1983), Дж. Хейл (1984), Д.Г. Кореневский (1989), Н.В. Азбелев, В.П. Максимов и Л.Ф. Рахматуллина (1991), Ю.Ф. Долгий (1996), В.Б. Колмановский и А.Д. Мышкис (1999), Н.В. Азбелев и П.М. Симонов (2001), R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky (2012), V.L. Kharitonov (2013), M.I. Gil' (2014) и др.). Исследования устойчивости решений проводятся для различных классов дифференциальных уравнений с запаздыванием: уравнения с сосредоточенным запаздыванием, уравнения нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием, уравнения с распределенным запаздыванием и др.

Наиболее изученными в настоящее время являются задачи об устойчивости стационарных решений автономных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием, при этом широкое распространение получили спектральные методы, метод D-разбиений, амплитудно-фазовый метод, метод Меймана – Чеботарева, W-метод Азбелева, а также методы, основанные на использовании аналогов теорем Ляпунова. Одним из наиболее распространенных является метод функционалов Ляпунова – Красовского. Достоинством этого метода является простота формулировок теорем об условиях устойчивости и сведение исследования асимптотической устойчивости к решению хорошо обусловленных задач. Однако в отличие от функции Ляпунова, с помощью которой доказывается оценка Крейна, характеризующая экспоненциальное убывание решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, функционалы Ляпунова – Красовского не всегда позволяют получить точные аналоги этой оценки для решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для этого необходимо использовать некоторые модификации функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, работы [1,2,3,4]). Функционалы, предложенные в данных работах, позволяют получить аналоги оценки Крейна для решений нелинейных автономных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием, а также указать множества притяжения нулевого решения.

В отличие от автономных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием задача об устойчивости решений неавтономных уравнений является менее изученной. Основные исследования в этом направлении проводятся для линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Основы теории устойчивости решений таких уравнений заложены в работах А.М. Зверкина, А. Стокса, А. Халаная, В. Хана,

[1] Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems Control Lett. 2004. V. 53, No. 5. P. 395–405.

[2] Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

[3] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

[4] Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 2. P. 268–273.

Дж. Хейла, С.Н. Шиманова и др. При изучении устойчивости развиваются методы теории Флоке, метод производящих функций, метод монотонных операторов, метод функционалов Ляпунова – Красовского. Отметим, что впервые аналоги оценки Крейна для решений систем уравнений с сосредоточенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах, а также описание областей притяжения нулевого решения были получены в работах [3,5]. При получении этих оценок использовалась некоторая модификация функционала Ляпунова – Красовского.

Однако несмотря на бурное развитие теории устойчивости, существует масса нерешенных вопросов. Особенно это касается дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. Отметим, что впервые уравнения с распределенным запаздыванием появились в 20-е годы в работах В. Вольтерра при описании динамики популяций. Однако работ по проблеме устойчивости для таких уравнений пока не так много. В настоящее время хорошо изученными являются вопросы устойчивости решений скалярных уравнений и автономных линейных систем (М.М. Кипнис, М.Ю. Вагина, В.В. Малыгина, Т.Л. Сабатулина, К.М. Чудинов, М.В. Мулюков, А.В. Егоров, C. Cuvas, S. Mondié, S. Wu, S. Gan, M. Funacubo, T. Hara, S. Sakata, J.C.F. de Oliveira, L.A.V. Carvalho, L. Hatvani и др.). Вопросы устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием практически не исследованы. Исследованию этих вопросов для некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием посвящена настоящая диссертация.

Цели и задачи работы.

1. Нахождение условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

2. Получение оценок решений систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценок на множества притяжения нулевого решения.

[5]Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

3. Нахождение условий на возмущения коэффициентов, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения.

Основные положения, выносимые на защиту: достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием в терминах матричных и интегральных неравенств, оценки решений данных систем, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, а также оценки множеств притяжения нулевого решения классов нелинейных систем.

Методы исследований. Аппаратом исследования послужили методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и теории матриц. При получении результатов были построены и использованы функционалы Ляпунова – Красовского.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены доказательствами.

Достоверность результатов. Достоверность результатов гарантируется строгостью доказательств, а также согласованностью полученных результатов с известными в исследованных ранее частных случаях.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены при исследовании асимптотического поведения решений различных моделей, которые описываются системами дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: профессор Г.В. Демиденко), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений в Новосибирском государственном университете (руководитель: профессор $\boxed{\text{А.М. Блохин}}$), на семинаре по дифференциальным уравнениям, управлению и системному анализу в Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН (руководитель: профессор В.А. Дыхта), на семинаре лаборатории конструктивных методов исследования динамических моделей в Пермском государственном национальном исследовательском университете (руководитель: профессор В.П. Максимов). Результаты работы также докладывались на конференциях: Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2017, 2018), Международная конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), VI Международная конференция «Nonlinear Analysis and Extremal Problems» (Иркутск, 2018), XIX Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения 2019» (Могилев, Республика Беларусь, 2019), Международная конференция «Математика в приложениях» (Новосибирск, 2019), Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 2021).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[13]. Работы [1]–[5] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка цитируемой литературы. Объем работы — 153 страницы. Список цитируемой литературы содержит 94 наименования.

Исследования по теме диссертации поддержаны грантом РФФИ конкурса на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»), код проекта 19-31-90149, проект «Устойчивость решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием» под руководством Г.В. Демиденко (2019–2021).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и помощь в работе, а также к.ф.-м.н. И.И. Матвеевой и к.ф.-м.н. М.А. Скворцовой за ценные советы и полезные дискуссии.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, обосновывается актуальность темы исследования, излагается краткое содержание основных результатов работы.

В **первой главе** исследуется экспоненциальная устойчивость нулевого решения систем линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. В частности, в **первом параграфе** рассматривается следующая система:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где A — матрица размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0, \tau]$. Введем начальные условия

$$y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \tag{2}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1) исследуется с помощью функционала Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta.$$

Теорема 1. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$ такая, что $K(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0, \tau]$, при этом матрица*

$$P = -HA - A^*H - \tau K(0) - H\left[\int\limits_0^{\tau} B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right]H$$

положительно определена. Тогда для решения начальной задачи (1), (2) справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\| v(0, \varphi)}\, e^{-\frac{\gamma_H}{2}t}, \quad t > 0,$$

где $\gamma_H = \min\left\{p_{min}^H, k\right\}$, $p_{min}^H > 0$ — минимальное собственное число матрицы $P_H = H^{-\frac{1}{2}}PH^{-\frac{1}{2}}$, число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau], \tag{3}$$

$$v(0, \varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{-\eta}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle \, ds d\eta.$$

Отметим, что из теоремы 1 вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1).

Во **втором параграфе** рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{4}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $A(t+T) \equiv A(t)$, $B(t+T,s) \equiv B(t,s)$.

Рассмотрим начальную задачу (4), (2), где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. При получении результатов используется функционал Ляпунова – Красовского

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Теорема 2. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t) > 0$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такая, что $K(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0,\tau]$, при этом справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0,$$

где $\gamma_H(t) = \min\left\{p_{min}^H(t), k\right\}$, $p_{min}^H(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t)$,

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \tau K(0)$$

$$-H(t)\left[\int\limits_0^{\tau} B^*(t,s)K^{-1}(s)B(t,s)ds\right]H(t),$$

число $k > 0$ такое, что выполнено (3). Тогда для решения начальной задачи (4), (2) справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}(t)\| v(0,\varphi)} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2} ds\right), \quad t > 0.$$

Заметим, что из теоремы 2 следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (4).

В **третьем параграфе** исследуется задача о робастной устойчивости систем (1), (4). Для системы (1) рассматривается случай наличия постоянных возмущений коэффициентов, для системы (4) — случай наличия периодических возмущений. Для примера, приведем результат для системы (4). Рассмотрим систему следующего вида при $t > 0$:

$$\frac{d}{dt} y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds, \quad (5)$$

где $A(t)$, $A_1(t)$ — матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$, $B_1(t,s)$ — матрицы с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений $A_1(s)$, $B_1(t,s)$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|A_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_1(t,s)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0, \quad s \in [0, \tau],$$

нулевое решение системы (5) экспоненциально устойчиво.

Величина ε указана в явном виде. Также указаны оценки решений возмущенной системы (5), характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости решений линейных систем нейтрального типа с распределенным запаздыванием. В **первом параграфе** рассматриваются автономные системы вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \quad (6)$$

где D, A — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами. При постановке начальной задачи (6), (2) предполагается, что начальные данные $\varphi(s)$ из класса $C^1([-\tau, 0])$.

При получении результатов используется функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big), \big(y(t) + Dy(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+ \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta + \int_{t-\tau}^t \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds.$$

Сформулируем теорему, в которой получим оценки на этот функционал, рассматриваемый на решении задачи (6), (2).

Теорема 4. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \qquad (7)$$

и предположим, что выполнены условия

$$R = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D^*M(0)D) - D^*K(0)D > 0, \qquad (8)$$

$$P = \tau Q_{11} - \tau Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^* - \int_0^\tau Q_{13}(s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(s)ds > 0,$$

где

$$Q_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(HA + A^*H + M(0)\right) - K(0),$$

$$Q_{12} = \frac{1}{\tau}(HA + M(0))D + K(0)D, \quad Q_{22} = R,$$

$$Q_{13}(s) = -HB(s), \quad Q_{33}(s) = K(s), \quad s \in [0,\tau].$$

Тогда для решения задачи (6), (2) справедлива следующая оценка:

$$v(t,y) \le e^{-\gamma_H t} v(0,\varphi), \quad t > 0,$$

где $\gamma_H = \min\left\{p^H_{min}, k\right\}$, $p^H_{min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P_H = H^{-\frac{1}{2}}PH^{-\frac{1}{2}}$, число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + kM(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Заметим, что из условия положительной определенности матрицы R из (8) следует, что спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Следовательно, $\|D^i\| \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда существует число $l \in \mathbb{N}$ такое, что $\|D^i\| < 1$ при всех $i \geq l$.

Введем обозначения:

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \left(2\|H\|(1 + \|D\|^2) + \int\limits_0^{\tau} \int\limits_0^{\eta} \|K(s)\| \, ds d\eta + \int\limits_0^{\tau} \|M(s)\| \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 5. *Пусть*

а) выполнены условия теоремы 4,

б) l — минимальное натуральное число такое, что $\|D^l\| < 1$.

1. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} < 1$, то для решения начальной задачи (6), (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2} t}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\| e^{\frac{l\gamma_H \tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{\|D\| e^{\frac{\gamma_H}{2}\tau}, \ldots, \|D^l\| e^{\frac{\gamma_H}{2} l\tau}\} \right).$$

2. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} = 1$, то для решения начальной задачи (6), (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2} t}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 + \frac{t}{l\tau} \right) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{1, \|D\| e^{\frac{\gamma_H \tau}{2}}, \ldots, \|D^{l-1}\| e^{\frac{(l-1)\gamma_H \tau}{2}}\} \right).$$

3. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} > 1$, то для решения начальной задачи (6), (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau} - 1}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma_H \tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{1, \|D\|, \ldots, \|D^{l-1}\|\} \right).$$

Заметим, что из теоремы 5 следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (6).

Аналогичные результаты во **втором параграфе** получены в случае периодических коэффициентов:

$$\frac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds, \quad t>0, \quad (9)$$

где $D(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными по совокупности переменных и T-периодическими по первой переменной элементами. При исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения используется следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)\big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t)+D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (9) и указаны оценки решений данной системы.

Третий параграф посвящен исследованию робастной устойчивости систем (6) и (9). Для системы (6) рассматривается случай постоянных возмущений коэффициентов, для системы (9) — случай T-периодических возмущений коэффициентов. Предполагается, что для систем без возмущений выполнены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения. Найдены условия на возмущения, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения систем с возмущениями. Также указаны оценки решений возмущенных систем, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

В **третьей главе** исследуется устойчивость нулевого решения классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. **Первый параграф** посвящен автономному случаю. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds + F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t>0, \tag{10}$$

где A — матрица размера $n\times n$, $B(s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами при $s\in[0,\tau]$, $F(u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке:

$$\|F(u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \tag{11}$$

где q_1, $q_2\ge 0$, ω_1, $\omega_2>0$ — const. При получении результатов используется функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Теорема 6. *Пусть существуют матрицы $H=H^*>0$, $K(s)=K^*(s)\in C^1([0,\tau])$, $M(s)=M^*(s)\in C^1([0,\tau])$ такие, что выполнены неравенства (7), при этом матрица*

$$P = -HA - A^*H - M(0) - \tau K(0) - H\left[\int\limits_0^{\tau} B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right]H$$

является положительно определенной. Выберем число $\alpha>0$ так, что

$$\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H\| < \gamma_H h_{min}, \tag{12}$$

где $\gamma_H=\min\{p^H_{min},k\}$, $h_{min}>0$, $p^H_{min}>0$ — минимальные собственные значения матриц H и $P_H=H^{-\frac12}PH^{-\frac12}$ соответственно, число $k>0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s)+kK(s)\le 0, \quad \frac{d}{ds}M(s)+2kM(s)\le 0.$$

Тогда для решения задачи (10), (2) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C([-\tau,0]) : v(0,\varphi) < r^{-2/\omega_1},$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{k}{2}\langle M(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle - \frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H\|}{\alpha}\|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2}\right) ds \geq 0,$$

$$\left(h_{min}^{-1}\left[1 - rv^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-2/\omega_1} v(0,\varphi)\right)^{\omega_2} < \frac{\alpha k\|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2\tau^{\omega_2}\|H\|}\Bigg\}$$

справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{h_{min}^{-1}v(0,\varphi)}\, e^{-\frac{\delta}{2}t}\left[1 - rv^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-1/\omega_1}, \quad t > 0,$$

где

$$r = \frac{2q_1\|H\|}{\delta h_{min}^{1+\omega_1/2}}, \quad \delta = \min\left\{p_{min}^H - \frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H\|}{h_{min}}, k\right\}.$$

Отметим, что полученная оценка характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности с начальными данными из $\mathbf{E}$, т. к. показатель экспоненты — отрицательный в силу (12). Следовательно, условия теоремы 6 являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (10). Множество $\mathbf{E}$ является множеством притяжения нулевого решения.

Во **втором параграфе** изучается экспоненциальная устойчивость нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах при $t > 0$:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad (13)$$

где $F(t,u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \leq q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где q_1, $q_2 \geq 0$, ω_1, $\omega_2 > 0$ — const.

В данном параграфе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (13). Также указаны оценки решений системы (13), характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности и оценка на множество притяжения нулевого решения.

Четвертая глава посвящена исследованию экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием нейтрального типа. В **первом параграфе** изучается автономная система

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \tag{15}$$

где $F(u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и оценке (11).

Показано, что при выполнении условий теоремы 4 нулевое решение системы (15) является экспоненциально устойчивым. Для системы (15) получены также оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценка на множество притяжения нулевого решения. Таким образом, доказана теорема об устойчивости по первому приближению.

Во **втором параграфе** аналогичные результаты получены для систем с периодическими коэффициентами в линейной части

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0,$$

где $F(t, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и оценке (14).

В **заключении** кратко формулируются полученные в диссертации результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для рассматриваемых классов систем получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения в терминах матричных и интегральных неравенств.

2. Указаны конструктивные оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценки на множества притяжения в нелинейном случае.

3. Для линейных систем исследована робастная устойчивость. В случае выполнения достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения найдены условия на возмущения, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения возмущенных систем. Указаны оценки решений возмущенных систем, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ыскак Т.К. Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах // Динамические системы. 2017. Т. 7(35), № 4. С. 373–385.

2. Ыскак Т.К. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. 2018. Т. 25. С. 159–169.

3. Ыскак Т. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 118–127.

4. Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 416–427.

5. Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.

6. Yskak T. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. V. 25, No. 1–2. P. 97–108.

7. Ыскак Т.К. Асимптотическая устойчивость решений одного класса линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Соболевские чтения. Международная школа-конференция: тезисы докладов. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. С. 169.

8. Ыскак Т.К. Об асимптотической устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева: тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 272.

9. Ыскак Т.К. Экспоненциальная устойчивость дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Соболевские чтения. Международная школа-конференция: тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 110.

10. Yskak T. On stability of the zero solution to systems of differential equations with distributed delay // Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA–2018). Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. P. 147–148.

11. Ыскак Т.К. К устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Международная школа-конференция “Соболевские чтения”, посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева: тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2018. С. 198.

12. Ыскак Т.К. О робастной устойчивости систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // XIX Международная научная конференция по дифференциальным

уравнениям (Еругинские чтения – 2019): материалы Международной научной конференции. Могилев, 14–17 мая 2019 г. Часть 1. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2019. С. 132–133.

13. Ыскак Т.К. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Математика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова (4–10 августа 2019, Новосибирск): Тез. докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2019. С. 241.