На правах рукописи

Сторожук Константин Валерьевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП И ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Официальные оппоненты:

Бережной Евгений Иванович, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (г. Ярославль), математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений, заведующий кафедрой),

Шамаров Николай Николаевич, доктор физико-математических наук (ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» (г. Москва), механико-математический факультет, кафедра математического анализа, доцент),

Шульман Виктор Семенович, доктор физико-математических наук, доцент (ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет» (г. Вологда), электроэнергетический факультет, кафедра высшей математики, профессор).

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (г. Воронеж).

Защита диссертации состоится 7 октября 2021 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, расположенного по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан « ___»______ 2021 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

к.ф.-м.н. Егоров Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Теория операторных полугрупп, возникнув, как средство исследования динамических систем и автономных дифференциальных уравнений, стала источником многих новых задач. Эта теория актуальна для функционального анализа и для других областей математики и естествознания. Большое место занимает исследование асимптотических свойств полугрупп, в первую очередь это связано с изучением устойчивости. Полугруппа операторов $\{T_t : X \to X \mid t \geq 0, T_{t+q} = T_t \circ T_q\}$ на банаховом пространстве X называется асимптотически конечномерной, если пространство «исчезающих» векторов $X_0 = \{x \in X \mid T_t x \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$ имеет конечную коразмерность в X. Такое название было введено для ограниченных полугрупп Емельяновым и Вольфом[1],[2]. Для таких полугрупп мы в главе 1 показываем замкнутость X_0 и изучаем (не)стабилизируемость дополняющих X_0 конечномерных подпространств.

Важное место как в теории полугрупп, так и в приложениях занимают вопросы плохого асимптотического поведения эволюционного процесса на конкретных начальных данных. Пример одного из утверждений на эту тему: если $\|T_t\| \not\to 0$, то найдётся $x \in X$ такой, что $\int_0^\infty |T_t(x)| dt = \infty$. Подобная

[1] Emel'yanov, E.U.; Wolff, M. Quasi constricted linear representations of abelian semigroups on Banach spaces. // Math. Nachr. 233/234 (2002), 103–110.

[2] Емельянов Э. Ю. Условия асимптотической конечномерности C_0-полугруппы // Сиб. мат. журн. 2003, т. 44 , №5, с. 1015–1020.

тематика восходит к исследованиям Датко[3],Паци[4],Зябчика[5]и Литтмана[6]. Часть их результатов нетрудно получить из теорем Далецкого и Крейна [7]. Результаты Далецкого и Крейна обобщил Ролевич[8], получив аналог теоремы Датко — Паци для эволюционного семейства операторов. Теоремы типа Ролевича получены, например, в работе Бусе и Драгомира[9] и Чжена[10]. Во второй главе мы обобщаем результаты Ролевича и даем им короткое и простое доказательство. Другой круг вопросов второй главы — реализация «плохого» поведения в слабой топологии. Например, когда можно утверждать, что $\exists x \in X,\ x' \in X'\ \int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\, dt = \infty$? Подобными и более специальными вопросами занимались Притчард и Зябчик[11], Ху-

---

[3] R. Datko. Extending a theorem of A.M.Liapounov to Hilbert space // J.Math.Anal.Appl. 32 (1970), 610 – 616.

[4] A. Pazy. On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert Space // SIAM J. Math.Anal, v.3 (1972), 291-294.

[5] Zabczyk, J. Remarks on the control of discrete-time distributed parameter systems // SIAM J. Control 12 (1974), 721–735.

[6] W.Littman. A generalization of a theorem of Datko and Pazy, in / Lecture Notes in Control and Inform. Sci., v. 130, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 318–323.

[7]Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.:Наука, 1970 г.

[8] S. Rolewicz. On uniform N-equistability // J. Math. Anal. Appl. 115 (1986), 434–441.

[9] Buse, C.; Dragomir, S. New characterizations of asymptotic stability for evolution families on Banach spaces // Electron. J. Differential Equations 2004, 38, 9 pp. (electronic).

[10] Q. Zheng. Exponential stability and perturbation problems for linear evolution systems in Banach spaces (Chinese, english rewiew) // J. Sichuan Univ. 25 (1988), 4, 401–411.

[11] Pritchard, A. J.; Zabczyk, J. Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems // SIAM Rev. 23 (1981), №. 1, 25–52.

анг и Лун[12], Вейсс[13]. Обзор этой темы можно найти в статье ван Нервена[14]. Мы получаем новые оценки снизу на скорость «слабого» убывания орбит полугруппы, не являющейся экспоненциально устойчивой.

Наличие компакта $K \subset X$, притягивающего орбиты полугруппы в том или ином смысле, влечет хорошие асимптотические свойства полугруппы. Например, асимптотическая конечномерность вытекает из наличия такого компакта K, что $\forall x \in B_X\ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0$. Результаты, которые можно изложить на этом языке, имеются у Ласоты, Ли, Йорка и Джеймса[15],[16], Бартожека[17]. Общий случай исследовали Ву[18] и Сайн[19], используя спектральное разложение слабо почти периодической полугруппы — методы, восходящие к работам Джекобса[20] и де Лю и Гликсберга[21]. В главах 3 и 4 мы устанавли-

[12] Huang, Fa Lun. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces // Ann. Differential Equations 1 (1985), №. 1, 43–56.

[13] Weiss, G. Weak L^p-stability of a linear semigroups on a Hilbert space implies exponential stability // J.Differential Equations 76 (1988), 2, 269–285.

[14] Van Neerven, J. M. A. M. The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators / Birkhauser, Basel, 1996.

[15] Lasota A., Li T. Y., Yorke J. A. Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1984 v 286 №2, 751–764.

[16] Lasota, A.; Yorke, James A. Exact dynamical systems and the Frobenius-Perron operator // Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), №1, 375–384.

[17] Bartoszek, W. Asymptotic periodicity of the iterates of positive contractions on Banach lattices // Studia Math. 91 (1988), 3, 179–188.

[18] Ву Куок Фонг. Асимптотическая почти периодичность и компактифицирующие представления полугрупп // Укр. мат. журн., 1986. Т. 38. с. 688–692.

[19] R. Sine. Constricted systems // Rocky Mountain J. Math. 21 (1991) 1373–1383.

[20] Konrad Jacobs. Fastperiodizitatseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Raumen // Math. Z. 67 (1957) 83–92.

[21] K. de Leeuw, I. Glicksberg. The decomposition of certain group

ваем асимптотическую конечномерность полугруппы при условии наличия компакта, который всего лишь *иногда* притягивает, т.е. $\forall x \in B_X \;\; \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0$. Эта теорема содержит в качестве частного случая результаты Ву и Сайна. Наш подход, кроме того, позволяет получить в вещественном случае теорему, для комплексного X полученную Ансари и Бурдоном[22] и Миллером[23]: изометрия $T : X \to X$ не может быть суперциклической.

Более слабые условия притяжения орбит компактом таковы: $\forall x \in B_X \;\; \limsup \;(\text{или} \liminf)_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \le \eta < 1$. Исследование такого условия начато в работе[24]. Отдельные вопросы на эту тему исследовались Коморником и Ласотой[25], Ребигером[26], Емельяновым, Вольфом, Гороховой, Эркурсун[27], [28],[29]. В главе 4 мы устанавливаем, что граница асимптотической конечномерности проходит через $\eta = \frac{1}{2}$. Нам удалось построить даже изометрию с условием «$\liminf \le \frac{1}{2}$». Этим решен

representations // J. Anal. Math. 15 (1965) 135–192.

[22] S. Ansari, P. Bourdon. Some properties of cyclic operators // Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1–2) (1997) 195–207.

[23] V.G. Miller. Remarks on finitely hypercyclic and finitely supercyclic operators // Integral Equations Operator Theory 29 (1) (1997) 110–115.

[24]E.Yu. Emel'yanow; M.P.H. Wolff. Quasi constricted linear operators on Banach spaces // Studia Math. 144 (2001), №2, 169–179.

[25] Komornik, Jozef; Lasota, Andrzej. Asymptotic decomposition of Markov operators // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987), №5-6, 321–327.

[26] Räbiger, F. Attractors and asymptotic periodicity of positive operators on Banach lattices // Forum Math. 7 (1995), №. 6, 665–683.

[27] Emel'yanov, E. Yu.; Wolff, M. Mean ergodicity on Banach lattices and Banach spaces // Arch. Math. (Basel) 72 (1999), №. 3, 214–218.

[28] С. Г. Горохова, Э. Ю. Емельянов. Достаточное условие порядковой ограниченности аттрактора положительного эргодичного оператора, действующего в банаховой решетке // Матем. тр., 2:2 (1999), 3–11.

[29]Emel'yanov, E.; Erkursun, N. Lotz–Räbiger's nets of Markov operators in L_1-spaces // J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 777–783.

отрицательно вопрос (problem 1.3.33), поставленный в книге[30].

Одна из популярных и важных для приложений тем в теории операторов — инвариантные подпространства. Известен результат, восходящий к Годеману[31]: линейная изометрия комплексного банахова пространства имеет инвариантное подпространство. Вермер[32] показал, что если $T : X \to X$ таков, что $\|T^n\| \underset{n \to \pm\infty}{=} O(|n|^k)$, то инвариантные подпространства есть. Методы построения спектральных подпространств восходят к Данфорду[33] и Лифу[34]). Подробно эта теория разработана Любичем, Мацаевым и Фельдманом[35]. Приложения некоторых спектральных методов к вещественному случаю описаны у Баскакова и Загорского[36]. Основной результат главы 5 — существование у вещественной изометрии инвариантного подпространства. Заметим: теоремы об инвариантных пространствах компактных операторов Аронзайна—Смита[37] и Ломоносова[38] на

[30] Emel'yanov E. Yu. Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups. / Basel, Birkhäuser Verlag (Oper. Theory: Advances and Appl.; V. 173), 2007.

[31] R. Godement. Théorèmes taubériens et théorie spectrale // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 64 (1947), 119-138.

[32] Wermer, J. The existence of invariant subspaces // Duke Math. J. 19, (1952), 615–622.

[33] N. Dunford. Spectral Theory, II. Resolutions of the identity // Pacific J. Math., 2 (1952), 559–614.

[34] Leaf, G.K. A spectral theory for a class of linear operators // Pacific J. Math. 13 (1963), 141–155.

[35] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. Об операторах с отделимым спектром // Функц. анализ и его прил., 7:2 (1973), 52–61.

[36] А. Г. Баскаков, А. С. Загорский. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах // Мат. заметки, 2007, т. 81, вып. 1, 17—31.

[37]Aronszajn, N; Smith, K. Invariant subspaces of completely continuous operators // Annals of Mathematics. Second Series 60 (2), 345–350. (Русский перевод: Математика 2 : 1 (1958), 97-102.)

[38]В. И. Ломоносов. Об инвариантных подпространствах семейства опе-

вещественный случай обобщались, см. Абрамович, Алипрантис, Сироткин и Троицкий[39], а также работы Ломоносова и Шульмана[40],[41]

Многие свойства полугруппы связаны с геометрией пространства, на котором она действует. В главе 6 мы решаем три задачи, проясняющих эту связь. Емельянов и Вольф[42], изучая положительные операторные полугруппы, ввели условие строгой нормальности (понятие нормального конуса ввел Крейн в[43]) , но было неясно, вдруг нормальный конус строго нормален? В § 6.1 мы строим нормальные, но не строго нормальные конусы и характеризуем строгую нормальность конуса в терминах геометрии его гиперплоской базы, используя свойство midpoint locally uniform rotundity (MLUR), введенное Андерсоном[44]. Кадец[45] показал, что сепарабельное банахово

раторов, коммутирующих с вполне непрерывным // Функц. анализ и его прил., 7:3 (1973), 55–56.

[39] Abramovich, Y. A.; Aliprantis, C. D.; Sirotkin, G.; Troitsky, V. G. Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem // Positivity 9 (2005), №. 3, 273–286.

[40]В. И. Ломоносов, В. С. Шульман. Инвариантные подпространства для коммутирующих операторов в вещественном банаховом пространстве.// Функц. анализ и его прил., 52:1 (2018), с. 65–69.

[41]В. И. Ломоносов, В. С. Шульман. Проблемы Халмоша и связанные с ними результаты теории инвариантных подпространств.// УМН, 73:1(439) (2018), с. 35–98.

[42] Emelyanov, E. Yu.; Wolff, M. P. H. Positive operators on Banach spaces ordered by strongly normal cones // Positivity 7 (2003), №. 1-2, p. 3–22.

[43] Krein, M. Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach // (French) C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 28, (1940), 13–17.

[44] K. W. Anderson. Midpoint local uniform convexity, and other geometric properties of Banach spaces / Ph.D. dissert., Univ. Illinois, Urbana, IL, 1960.

[45] Кадец, М. И. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам//Изв. вузов, математика, 1959, №6(13), 51—57.

пространство изоморфно MLUR-пространству. См. Смит[46], где имеется много примеров. В § 6.2 мы изучаем связь между замкнутостью и архимедовой замкнутостью конусов в топологическом векторном пространстве и показываем, как построить архимедово замкнутый, но не замкнутый конус в почти максимальной топологии τ счетномерного пространства. Наиболее близки к этой тематике вопросы, изучавшиеся в работе Гутмана, Емельянова и Матюхина[47], где, в частности, установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых, а если пространство W счетномерно, то максимальная топология двойственности $\langle W \mid W^{\#} \rangle$ не допускает таких конусов. В § 6.3 мы изучаем асимптотические свойства семейства гиперплоскостей или подпространств конечной коразмерности, которые можно сформулировать в терминах верхнего топологического предела семейства множеств (такое понятие появилось в работах Хаусдорфа[48] и Куратовского[49]. Наши результаты являются продолжением исследований, проведённых Арутюновым[50], где он установил, что если в банаховом пространстве X имеется последовательность замкнутых подпространств X_n, коразмерность каждого из которых не больше числа k, то множество $Ls\{X_n\}$

[46] Smith, Mark A. Some examples concerning rotundity in Banach spaces // Math. Ann. 233 (1978), №. 2, 155–161.

[47] А.Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов, А. В. Матюхин. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах. Владикавк. матем. журн., 17:3 (2015), 36–43.

[48] Хаусдорф Ф. Теория множеств.М.- Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

[49] К. Куратовский. Топология. Т.2. / М.:Мир. 1969.

[50] А.В. Арутюнов. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Изв. РАН. Сер. матем., 60:1 (1996), с. 37–62.

содержит замкнутое подпространство $X_0 \subset X$, коразмерность которого также не больше k. Этот факт используется для доказательства компактности множества множителей Лагранжа, которые соответствуют «большим» подпространствам положительной определённости функционала Лагранжа.

Степень разработанности. Направление, развитию которого посвящена диссертация, активно разрабатывается на протяжении нескольких десятилетий. Часть затронутых задач имеет недолгую историю, однако к ним за короткое время было привлечено большое количество специалистов. Данная тема является достаточно разработанной в мире и активно развивается. В то же время, по мнению автора, в России этой тематике уделяется недостаточно внимания.

Цели и задачи исследования. Исследовать пространство уходящих в нуль векторов у асимптотически конечномерных полугрупп операторов и устойчивость дополнительных к нему подпространств. Получить новые асимптотические нижние оценки на скорость роста полугруппы в зависимости от её спектральных свойств. Изучить, как компакт, в том или ином смысле притягивающий орбиты векторов, влияет на асимптотические свойства полугруппы. Показать наличие инвариантных подпространств у линейных изометрий вещественного пространства. Построить примеры упорядоченных пространств с новыми свойствами упорядочивающих конусов, опираясь на геометрические свойства сфер в нормированном пространстве.

Положения, выносимые на защиту, таковы:

1. Доказано, что у асимптотически счетномерных полугрупп пространство X_0 уходящих в нуль векторов всегда замкнуто, а соответствующая полугруппа асимптотически конечномерна.

Доказано, что в асимптотически конечномерной полугруппе, рост которой удовлетворяет оценке $\|T_t\| \underset{t\to\infty}{=} o(t)$, любое n-мерное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0 в X, почти стабилизируемо. Построен пример асимптотически двумерной полугруппы, у которой X_0 имеет как инвариантное дополнение, так и дополнение, не являющееся почти стабилизируемым.

2. Предложено элементарное короткое доказательство теоремы Ролевича для полугрупп и для эволюционных семейств операторов. Установлены новые асимптотические нижние оценки на скорость роста полугруппы в слабой топологии.

3. Доказано, что если T ограничен со степенями и суперциклический, то $X_0 = 0$. Введено понятие компактной суперцикличности и доказано, что в бесконечномерном банаховом пространстве (как в вещественном, так и в комплексном) нет компактно-суперциклических изометрий.

4. Доказана асимптотическая конечномерность и расщепляемость ограниченной полугруппы при наличии компакта, к которому достаточно близко проходят орбиты единичных векторов(достаточно, чтобы орбиты пересекались с η-окрестностью компакта при $\eta < \frac{1}{2}$ (в рефлексивном случае и при $\eta < 1$). Для произвольных $\eta > \frac{1}{2}$ построены изометрии на пространствах $C(M)$ непрерывных функций, орбиты всех единичных векторов которых пересекаются с η-окрестностью некоторой точки.

5. Доказано, что линейная изометрия вещественного банахова пространства X имеет инвариантное подпространство, если $\dim X > 2$.

6. Построены примеры нормальных, но не строго нормальных конусов. Построен конус, который является архимедово замкнутым, но не замкнутым относительно некоторой почти

максимальной топологии в счётномерном пространстве. Показано, что в любом топологическом векторном пространстве для бесконечного семейства подпространств коразмерности $k < \infty$ верхний топологический предел этого семейства содержит подпространство коразмерности k.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты новы и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в исследованиях по функциональному анализу а также при преподавании соответствующих курсов в университетах.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы теории операторов, спектральные методы теории полугрупп и групп операторных представлений. Были использованы также некоторые методы алгебраической топологии.

Степень достоверности и апробация результатов. Доказательства подробны. Результаты докладывались на Международном математическом конгрессе (2006 г., Мадрид), на конференции, посвященной 100-летию С.Л.Соболева (2008 г., Новосибирск), на конференции «Современные проблемы анализа и геометрии», (2009 г, Новосибирск) на конференции «Ordered spaces and applications» (2011 г, Афины), на международной конференции, посвященной 100-летию А.Д. Александрова, 2012 г., Санкт-Петербург) и др. Результаты докладывались на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» (рук. акад. И. А. Тайманов), на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН (руководитель акад. Ю. Г. Решетняк), на семинаре в ИМ СО РАН по геометрическому анализу (руководитель д.ф.-м.н. С. К. Водопьянов), на семинаре по бесконечномерному анализу в МГУ (руководители — д.ф.-м.н О.Г. Смолянов и д.ф.-м.н. Е.Т. Шавгулидзе), в Воронежском государственном университете на семинаре А.Г. Баскакова, в РУДН на семинаре А.В. Арутюнова и др.

Публикации. Результаты опубликованы в одиннадцати публикациях в журналах, рекомендованных ВАК, а также входящих в международные базы данных Scopus и MathSciNet [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 103 источников. Объем диссертации 156 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Всюду предполагаем, что полугруппа действует непрерывно при $0 < t < \infty$, т. е. для каждого $v \in X$ функция $t \mapsto T_t(v)$ непрерывна при $t > 0$. Полугруппа называется C_0 — полугруппой, если эта функция непрерывна и в нуле. Мы изучаем и полугруппы степеней оператора.

Полугруппа ограничена, если все операторы T_t ограничены по норме некоторой константой $C < \infty$. Оператор называем ограниченным со степенями, если полугруппа $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничена. Подпространство $Y \subset X$ называем инвариантным, если для каждого $t \geq 0$ $T_tY \subset Y$.

Пространство $X_0 = \{x \in X \mid T_tx \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$ инвариантно. Говорим, что полугруппа расщепляема, если существует инвариантное подпространство L, дополняющее X_0. Полугруппа *асимптотически конечномерна*, если коразмерность X_0 в X конечна.

Глава 1. **Асимптотически конечномерные полугруппы операторов**. Результаты опубликованы в работе [1].

В § **1.1** данной главы мы показываем (**теорема 1.1**), что у асимптотически конечномерных (и даже счетномерных) полугрупп пространство X_0 всегда замкнуто. Для замкнутости X_0 достаточно наличия в X *замкнутого* дополнительного к X_0 подпространства L. Из этой теоремы, в частности, следует, что условие замкнутости пространства X_0, входившее в определение квазисжимающей полугруппы, выполнено всегда.

В § **1.2** мы изучаем вопросы стабилизируемости конечномерных подпространств, дополняющих X_0 в X. Пусть $X = X_0 \oplus L$. Оператор $T_t : X \to X$ задается треугольной матрицей вида $T_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} : X_0 \times L \to X_0 \times L$ и диагонализируемость эквивалентна расщепляемости полугруппы. Расщепляемости может не быть (**пример 2**).

Угол (раствор) между подпространствами A и B — это $\angle(A,B) = \min\{\sup\limits_{a\in A,|a|=1}\{\rho(a,B)\}, \sup_{b\in B,|b|=1}\{\rho(b,A)\}\}$. На множестве n-мерных подпространств он играет роль метрики.

Теорема 1.2: *Если T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, то любое n-мерное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0 в X, является почти стабилизируемым, т. е. для каждого числа $t < \infty$ выполнено* $\sup_{q<t} \angle(T_P L, T_{P+q} L) \to 0$ *при* $P \to \infty$.

Отметим, что аналоги теорем 1.2 и 1.3 для C_0-полугрупп операторов содержатся в статьях [1,2], где они доказываются с использованием методов нестандартного анализа.

Пространство L называется *стабилизируемым*, если у $T_t L$ есть предельное положение L_∞ (такое, что $\angle(T_t L, L_\infty) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.) В § **1.3** исследуются орбиты асимптотически конечномерной полугруппы в слабой топологии X. **Теорема 1.3**, показывает, что если полугруппа *слабо почти периодична* (орбиты векторов слабо предкомпактны), то всякое подпространство L, дополняющее X_0, стабилизируемо. В частности, такова ограниченная полугруппа на рефлексивном X.

В § **1.4** мы доказываем **теорему 1.4**, содержащую пример неограниченной асимптотически двумерной полугруппы, в котором существует как инвариантное дополнение к X_0, так и двумерное подпространство L, дополняющее X_0, но не являющееся даже почти стабилизируемым. Это показывает, что условие ограниченности полугруппы в теореме 1.2 существенна уже в случае $\operatorname{codim} X_0 = 2$.

В § **1.5** доказана **теорема 1.5**, обобщающая теорему 1.2 на асимптотически конечномерные полугруппы, для которых $\|T_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$. Из этой теоремы следует, что если $\operatorname{codim} X_0 = 1$ (основной случай для приложений), то ограниченность полугруппы в теореме 1.2 несущественна.

Глава 2. **К теоремам Ролевича и ван Нервена**. ([2],[5]).

Для C_0-полугруппы T_t число $\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T_t\|}{t}$ называется *показателем равномерного роста* полугруппы. Полугруппа называется равномерно экспоненциально устойчивой (РЭУ), или равномерно экспоненциально ограниченной, если $\omega_0 < 0$. В конечномерном случае это условие эквивалентно стремлению $|T_t x|$ к нулю при $t \to \infty$ для каждого $x \in X$, т.е. тому, что $X_0 = X$. Стандартный бесконечномерный контрпример — полугруппа сдвигов на пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$. Здесь $\|T_t\| \equiv 1$, но $X_0 = X$. Однако, отсутствие свойства РЭУ у полугруппы влечет существование векторов, орбиты которых если и уходят в ноль, то «очень медленно», например, для каждой неубывающей функции $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ существует $x \in X$ такой, что

$$\int_0^\infty f(|T_t(x)|)dt = \infty. \qquad (1)$$

Датко получил этот результат в ([3]) для функции $f(z) = z^2$ и гильбертова X. (Это — аналог теоремы Ляпунова об устойчивости.) Пацци обобщил этот результат в ([4]) для банахова пространства и функций вида $f(z) = z^p,\ p \in [1, \infty)$. Зябчик в ([5]) показал, что если $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ выпукла, возрастает, $\lim_{s \to 0} f(s) = 0$ и C_0-полугруппа T_t не РЭУ, то существует $x \in X$ такой, что для каждого $\alpha > 0$ $\int_0^\infty f(\alpha \cdot |T_t x|) dt = \infty$.

В ([7]) Далецкий и Крейн исследовали связь скорости роста решений $x(t)$ как стационарной, так и нестационарной задач Коши с показателями роста эволюционного оператора $U(t, \tau) : X \to X$. Из их результатов, в частности, следуют результаты Датко и Паци.

Ролевич в ([8]) обобщил некоторые результаты, получив аналог теоремы для эволюционного семейства операторов. Некоторые результаты в духе обсуждаемых теорем применяются в работах [51],[52] к исследованию устойчивости экспоненциального поведения при малых линейных возмущениях и к задачам эргодической оптимизации.

В § **2.1** доказана **теорема 2.1**, обобщающая теорему Ролевича. Основным достижением параграфа автор диссертации считает не эти усиления, а идею короткого доказательства.

В § **2.2** исследуются вопросы поведения полугруппы с точки зрения слабой топологии. Вопрос, аналогичный формуле (1) для слабой топологии таков: когда можно утверждать, что для каждой неубывающей положительной функции h

$$\exists x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty h(|\langle x', T_t x \rangle|)\, dt = \infty. \tag{2}$$

[51] Dragičevič, D. Datko-Pazy conditions for nonuniform exponential stability.// J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), №3, 344–357.

[52] Dragičevič, D. Strong nonuniform behaviour: a Datko type characterization.// J. Math. Anal. Appl. 459 (2018), №1, 266–290.

Одного только отсутствия свойства (РЭУ) здесь не достаточно, как показывает пример (см.[53] и [54], пример 1.5) полугруппы сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Эта полугруппа не РЭУ, но слабо L^1-устойчива, то есть для каждого $x \in X$ и для каждого $x' \in X'$ выполнено $\int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\, dt < \infty$.

Геометрически пример выглядит довольно неожиданным: некоторые орбиты «далеки» от нуля; в то же время орбита каждого вектора x проводит почти все время «сколь угодно близко» к каждой гиперплоскости ($\ker x'$).

Наряду с показателем ω_0 равномерного роста полугруппы используется *показатель роста* ω_1. Пусть A — генератор полугруппы, $D(A) \subset X$ — область определения A. Рассмотрим абстрактную задачу Коши $\frac{dz}{dt} = Az,\ z(0) = x \in X$. Отображение $z(t) = T_t x$ — решение этой задачи. Если начальные данные x принадлежат $D(A)$, то соответствующее отображение естественно называть классическим, или гладким, решением, а начальные данные x — гладким вектором. Числа ω_0 и ω_1 определяют рост произвольных (и, соответственно, гладких) решений:

$$\omega_0(T) = \sup_{x\in X}\Big\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|T_t x|}{t}\Big\},\ \ \omega_1(T) := \sup_{x\in D(A)}\Big\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|T_t x|}{t}\Big\}.$$

Ясно, что $\omega_1 \le \omega_0$. Полугруппа РЭУ тогда и только тогда, когда $\omega_0(T) < 0$. Если $\omega_1(T) < 0$, то говорят об *экспоненциальной устойчивости (ЭУ)*.Для ограниченных C_0-полугрупп, не являющихся ЭУ, оценка снизу (2) была известна, см. ([14]), теоремы 4.6.3(i) и 4.6.4. Сформулируем этот результат.

[53] G. Greiner, J. Voigt, and M. Wolff. On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators. // J. Operator Th. 5 (1981), 245–256.

[54] Van Neerven, J. M. A. M.; Straub, B.; Weis, L. On the asymptotic behaviour of a semigroup of linear operators. // Indag. Math. (N.S.) 6 (1995), 4, 453–476.

Предложение 2: *Если ограниченная C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ не является экспоненциально устойчивой, т.е. $\omega_1 \geq 0$, то выполнены следующие утверждения:*

1) для каждой «хорошей» функции $h > 0$ найдутся $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что $\int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)dt = \infty$;

2) имеется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $m > 0$ найдутся единичные $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что мера множества $\{t \mid |\langle x', T_t x\rangle| \geq \varepsilon\}$ больше числа m.

Мы показываем, что этот результат справедлив и для неограниченных полугрупп. Кроме того, неравенство $\omega_1 \geq 0$ в условии удалось заменить более слабым предположением $s_0(A) \geq 0$. (Здесь $s_0(A)$ — абсцисса равномерной ограниченности резольвенты A, т.е. нижняя граница таких чисел r, для которых норма $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ равномерно ограничена в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) \geq r$. Всегда $\omega_0 \geq s_0 \geq \omega_1$; бывают и строгие неравенства.) Именно, справедлива такая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть $T_t : X \to X$ — C_0-полугруппа, $s_0(A) \geq 0$. Для любых двух последовательностей $0 < m_1 < m_2 < \cdots$ и $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \to 0$ найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и семейство множеств $U_k \subset \mathbb{R}_+$ таких, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mu(U_k) \geq m_k,\ \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

В § **2.3** мы показываем (**теорема 2.3**), что если нижняя граница спектра $s(A) \geq 0$ достигается, то в теореме 2.2 вектор x можно подобрать «бесконечно гладкий», т.е. из множества $\cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$.

Теорема 2.3 кажется довольно естественной, если иметь в виду полугруппу сдвигов: ясно, что функция $[0, \infty)$ может убывать сколь угодно медленно, и бесконечная дифференцируемость, как локальное явление, здесь не помеха.

Глава 3. **Притягивающие компакты, теорема Ву — Сайна и компактная суперцикличность**. [3].

Здесь мы в основном изучаем полугруппу $\{T^n : X \to X \mid n \in \mathbb{N}\}$ степеней линейного оператора $T : X \to X$. Предполагается, что полугруппа ограничена. Оператор T называется асимптотически конечномерным, если полугруппа его степеней асимптотически конечномерна, т.е. коразмерность подпространства исчезающих векторов X_0 конечна.

Подмножество $K \subseteq X$ назовем *притягивающим* для T, если

$$\forall x \in B_X \ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\lim = 0)$$

Известно, что для ограниченного со степенями оператора наличие притягивающего компакта влечет и асимптотическую конечномерность и расщепляемость ($X = X_0 \oplus L$). Аналогичные факты верны и для ограниченной C_0-полугруппы. Этот результат был получен в ([15]) для марковских полугрупп в L_1, для положительных операторов в банаховых решетках — в статье ([17]). Общий случай был получен в работах Ву ([18]) и Сайна ([19]). Оказывается, заключение теоремы Ву — Сайна остается справедливым, даже если существует лишь «иногда притягивающий» компакт K:

$$\forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\liminf = 0)$$

Статьи Ву и Сайна используют результаты работ ([20,21]) о спектральном разложении слабо почти периодической полугруппы. Мы используем более элементарный факт: непустоту существенного спектра ограниченного оператора.

В § **3.1** показано, что изометрия не может «иногда притягиваться» компактом.

Теорема 3.1. *Пусть* $\dim X = \infty$. *Если* $T : X \to X$ — *изометрия, то «иногда притягивающих» компактов у* T *нет.*

Результатом § **3.2 являются две теоремы.**

Теорема 3.2. *Если полугруппа степеней* T^n *удовлетворяет условию* ($\liminf = 0$), *то эта полугруппа асимптотически конечномерна и расщепляема, т.е. выполнено* ($X = X_0 \oplus L$).

Теорема 3.3 — аналогичное свойство C_0-полугрупп T_t.

Параграф **3.3** посвящен другому приложению теоремы 3.1. Пусть X — вещественное или комплексное бесконечномерное банахово пространство. Оператор T называется *суперциклическим*, если орбита некоторого вектора $x \in X$, будучи умножена на основное поле, плотна в X. Сам вектор x называется *суперциклическим вектором.*

Мы доказываем (в том числе для вещественного X) теорему, для комплексного X полученную в ([22]) и ([23])

Теорема 3.4. *Изометрия* $T : X \to X$ *не может быть суперциклической. Более того, если* T *ограничен со степенями и суперциклический, то* $T^n x \to 0$ *для каждого* $x \in X$.

В обоих упомянутых работах использовалось то, что любая изометрия комплексного X имеет инвариантное замкнутое подпространство. В пятой главе мы докажем этот факт и в вещественном случае. Однако теорема 3.4 (для вещественного и комплексного случая) из теоремы 3.1 следует непосредственно. Вообще, Миллер доказал, что изометрия комплексного X не может быть даже *финитно-суперциклической* т.е. для любого конечного множества $K \subseteq X$ множество $F \cdot O(K)$ не является всюду плотным в X. Позже, однако, Перис[55] показал, что

[55] A. Peris. Multi-hypercyclic operators are hypercyclic. // Math. Z. 236 (4) (2001) 779–786.

для локально выпуклых пространств финитная суперцикличность равносильна суперцикличности. Более слабое свойство N-*суперцикличности* было введено Бурдоном, Фельдманом и Шапиро[56],[57]. Оператор T N-суперцикличен, если существует конечномерное подпространство $L \subset X$ такое, что

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(B_L)) = X. \tag{$*$}$$

Последнее эквивалентно тому, что B_X содержится в замыкании орбиты $O(L)$ конечномерного подпространства L. Естественно назвать оператор $T : X \to X$ *компактно-суперциклическим*, если существует компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\mathrm{Cl}(O(K)) \supset B_X.$$

Определение содержательно в бесконечномерном X.

Заметим: похожее на $(*)$ условие «$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(K) = X$» выполнено в любом сепарабельном банаховом пространстве X даже для тождественного отображения $T = Id : X \to X$. В качестве компакта K возьмем последовательность $K = \{\frac{x_n}{n}\}$, где $\{x_n\}$ — произвольная плотная последовательность в B_X.

Например, для биективной изометрии $T : X \to X$ существование иногда притягивающего компакта равносильно компактной суперцикличности T^{-1}. Поэтому теорему 3.1 можно переформулировать так: *В бесконечномерном банаховом пространстве X нет компактно-суперциклических изометрий.*

Глава 4. **Границы асимптотической конечномерности** [4, 6, 7].

[56] N. Feldman. n-Supercyclic operators. // Studia Math. 151 (2) (2002) 141–159.

[57] P. Bourdon, N. Feldman, J. Shapiro. Some properties of N-supercyclic operators. // Studia Math. 165 (2) (2004) 135–157.

Для ограниченной полугруппы степеней условие притягивающего компакта ($\lim = 0$) можно переписать в эквивалентном виде

$$\forall x \in B_X \ \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\limsup = 0)$$

В прошлой главе мы показали, что заключение теоремы Ву — Сайна об асимптотической конечномерности и расщепляемости полугруппы остается верным, даже если компакт лишь «иногда притягивает» (условие «$\liminf = 0$»). В этой главе мы исследуем асимптотическую конечномерность (или её отсутствие) при выполнении более слабых условий

$$\forall x \in B_X \quad \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \le \eta < 1, \qquad (\limsup \le \eta)$$

$$\forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \le \eta < 1. \qquad (\liminf \le \eta)$$

Постановку соответствующих задач можно выразить в терминах малой меры некомпактности притягивающих множеств. Условие, например, ($\limsup \le \eta$) формулируется так: существует притягивающее орбиты единичных векторов множество A, мера некомпактности которого равна η.

В случае ($\limsup \le \eta$) асимптотическая конечномерность установлена в ([24]). В более ранних работах вариант условия ($\limsup \le \eta$) исследовался в ([25]) для марковских операторов в L_1, затем для банаховых решеток — в работах ([26–28]). В контексте марковских операторов по-видимому в самом общем на настоящий момент виде условие ($\limsup \le \eta$) исследовано в работе ([29]) — для сетей, названных авторами сетями Лотца — Ребигера.

В настоящей главе мы задаёмся вопросом: имеется ли асимптотическая конечномерность при выполнении самого слабого ограничения ($\liminf \leq \eta$), т.е. когда компакт K «притягивает лишь иногда и не сильно». Этот вопрос поставлен в книге ([30]) (problem 1.3.33).

В § **4.1** мы, опираясь на понятие аппроксимативно собственных векторов, вводим понятие «медленно меняющихся векторов». Это — те аппроксимативно собственные векторы, которые почти не укорачиваются при итерациях T. Более строго: оператор T имеет медленно меняющиеся векторы, если для любого $\varepsilon > 0$ существует единичный вектор x, такой, что $\exists \lambda, |\lambda| = 1$, $|Tx - \lambda x| < \varepsilon \quad$ и $\quad |T^n x| > 1 - \varepsilon \ \forall n = 0, 1, 2 \ldots$.

Теорема 4.1 утверждает, что медленные векторы уже есть, коль скоро $X_0 \neq X$; если же $\operatorname{codim} X_0 = \infty$, то есть сколь угодно многомерные подпространства, сферы которых состоят лишь из медленных векторов.

Результаты § 4.1 используются в § **4.2** для доказательства асимптотической конечномерности при условии ($\liminf \leq \eta < 1$) в случае рефлексивного X (**теорема 4.2**). Результат без труда можно получить и для однопараметрической полугруппы $\{T_t : X \to X, t \geq 0\}$. (Вспомним: как раз в рефлексивном случае асимптотическая конечномерность у ограниченной полугруппы влечет расщепляемость, см. теорему 1.3).

В оставшихся параграфах мы показываем, что число $\eta = \frac{1}{2}$ служит границей асимптотической конечномерности. Именно, в § **4.3** основным результатом является **теорема 4.3**, в которой асимптотическая конечномерность установлена при условии «$\liminf \leq \eta < \frac{1}{2}$» , а в § **4.4** доказаны **теоремы 4.4 и 4.5**, в которых показано устройство *изометрий* на пространствах $C(M)$ непрерывных функций на произвольном нульмерном компакте M, удовлетворяющих условию $\liminf \leq \frac{1}{2}$, где в роли притягивающего множества K можно подобрать *точку.*

Тем самым мы даем отрицательный ответ на вопрос из ([30]).

В частности, если c — банахово пространство сходящихся последовательностей, $\lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| \equiv 1$, $\lambda_n \to \lambda$ и $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — множество Кронекера, то оператор умножения $T : c \to c$, определяемый равенствами $(Tx)_n = \lambda_n x_n$, является изометрией, но в то же время удовлетворяет условию ($\liminf \leq \frac{1}{2}$).

Отметим, что операторы из пространства c в себя вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (λ_n попарно различны), согласно наблюдению Любича[58], не обладая полной системой собственных конечномерных подпространств, являются тем не менее скалярно почти периодичными.

Глава 5. **Инвариантные пространства у операторов на вещественных банаховых пространствах**. [8].

Инвариантное подпространство — *собственное замкнутое* подпространство X, переходящее в себя под действием оператора $T : X \to X$. Изометрии комплексного банахова пространства имеют инвариантные подпространства — доказательство этого восходит к теореме J из ([31]). Основной результат главы 5 — существование инвариантных подпространств у изометрий вещественных банаховых пространств.

Пусть $T : X \to X$ — ограниченный линейный оператор на комплексном банаховом пространстве. Символами $\sigma(T)$ и $R(\lambda, T)$ обозначим его спектр и резольвенту. Пусть спектр $\sigma(T)$ несвязен, F и $\sigma \backslash F$ — открыто-замкнутые части спектра. Охватим контуром γ множество F. Образ $[F]$ и ядро $[\sigma \backslash F]$ спектрального проектора $P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, T) d\lambda$ — инвариантные подпространства и $\sigma(T|_{[F]}) = F$.

Пусть спектр связен. Тогда, вырезая контуром γ подмно-

[58] Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. // УМН, 18:1 (1963), 165—171.

жество F в спектре, надо домножать резольвенту на весовую функцию g, малую в окрестности пересечения $\gamma \cap F$: $f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)g(\lambda)d\lambda$. Так строятся спектральные подпространства при ограничениях на рост резольвенты, которые выполнены, если степени оператора $T^{\pm n}$ растут не слишком быстро. Например, условие неквазианалитичности $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|T^n\|}{1+n^2} < \infty$ гарантирует отделимость спектра ([35]).

Пусть теперь X вещественно. Спектральный проектор, соответствующий симметричной (относительно сопряжения в $\mathbb{C}$) компоненте спектра комплексификации $T_\mathbb{C} : X_\mathbb{C} \to X_\mathbb{C}$, если спектр несвязен, даёт симметричное (относительно сопряжения в $X_\mathbb{C}$) инвариантное подпространство $L_\mathbb{C}$. Его вещественная часть $L \subset X$ будет T-инвариантной. Этот метод описан подробно в статье[59]. Между тем и в случае связного спектра $T_\mathbb{C}$ нетрудно получить симметричное $T_\mathbb{C}$-подпространство методом, обрисованным выше: нужно построить $f(T_\mathbb{C})$, охватывая часть спектра *симметричным* контуром с *симметричной* функцией g. «Вещественная часть» образа $f(T_\mathbb{C})$ будет T-инвариантным в X. Используя понятия локального спектра и локальной резольвенты, мы получаем теорему, в комплексном случае доказанную Вермером в ([32]).

Теорема 5.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T : X \to X$ — обратимый линейный оператор с оценкой роста степеней $\|T^n\| \underset{n\to\pm\infty}{=} O(|n|^k), k < \infty$. Если $\dim X > 2$, то оператор T имеет инвариантное подпространство. В частности, любая линейная изометрия $T : X \to X$ имеет инвариантное подпространство.*

[59] А. Г. Баскаков, А. С. Загорский. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах // Мат. заметки, 2007, т. 81, вып. 1, 17—31.

Глава 6. **О геометрии конусов, сфер и гиперплоскостей**. ([9, 10, 11]).

В работе М. Г. Крейна ([43]) введено понятие нормального конуса. Понятие строгой нормальности появилась в работе ([42]), где исследовались полугруппы положительных операторов. Там было отмечено, что неизвестно, является ли каждый нормальный конус строго нормальным. Основной результат параграфа **6.1** — примеры нормальных, но не строго нормальных конусов и характеризация строгой нормальности телесного конуса K в терминах геометрии его гиперплоской базы.

Пусть E — нормированное упорядоченное пространство, $K = X_+$ — его положительный конус. Этот конус упорядочивает пространство X так: $x \le y \Leftrightarrow y - x \in K$. Конус порождает E, если $E = K - K$. Порядковый интервал $\langle a, b\rangle$ — это множество $\langle a, b\rangle = \{x \mid a \le x \le b\}$.

Пусть $\mathrm{dist}(A, B)$ — расстояние между множествами A и B. В наших терминах конус оказывается нормальным, если функция $\rho(x, y) = \mathrm{dist}(\langle 0, x\rangle, \langle 0, y\rangle)$, заданная на множестве $K \times K$, непрерывна в $(0, 0)$, т.е. при приближении положительного x к нулю порядковый интервал $\langle 0, x\rangle$ стягивается в нуль.

Строгая нормальность означает непрерывность функции ρ на всем $K \times K$. То есть для положительных x, y близких между собой порядковые интервалы $\langle 0, x\rangle$ и $\langle 0, y\rangle$ также близки.

Оарактеризуем строгую нормальность телесного конуса K в терминах геометрии множества $\widehat{B}$ — его гиперплоской базы.

Теорема 6.1 утверждает, что если $\widehat{B}$ — гиперплоское сечение, порождающее конус (база) и точка $\widehat{x} \in \widehat{B}$ не крайняя, но лежит в замыкании множества крайних точек $\widehat{B}$, то функция ρ разрывна в $\widehat{x}$. Отсюда вытекает, что уже в $\mathbb{R}^4$ имеется нормальный, но не сильно нормальный конус. В самом деле, в $\mathbb{R}^3$

есть выпуклые компакты с незамкнутым множеством крайних точек. Конус в $\mathbb{R}^4$ с такой трехмерной базой — искомый.

В таких примерах функция ρ полунепрерывна снизу, т.е. предельный порядковый интервал может лишь «увеличиться». В бесконечномерных пространствах бывает и «схлопывание» порядкового интервала. Опишем, как такое возможно. Нормированное пространство строго выпукло, если каждая точка S единичной сферы является крайней точкой шара B_E. Пространство называется равномерно выпуклым, если из того, что $x_n \in S, y_n \in S$ и того, что $\frac{x_n+y_n}{2} \to S$ следует, что $|x_n - y_n| \to 0$. Пространство называется локально равномерно выпуклым[60], если в предыдущем определении дополнительно «закрепить» один конец хорд: $x_n \equiv x \in S$. Если следить не за концами, а за серединами хорд, то получится так называемое условие *midpoint locally uniform rotundity* (MLUR). Более точно, X обладает свойством (MLUR), если для точек $x_n \pm v_n$ из того, что $x_n \to x \in S$ и $|x \pm v_n| \to 1$ следует, что $v_n \to 0$. Геометрически это условие означает, что любая точка x сферы S равномерно далека от середин длинных хорд этой сферы.

Теорема 6.4. *Пусть X строго выпукло, B — единичный шар в X. Конус $K \subset \mathbb{R} \times X$, порождаемый базой $\{1\} \times B$ строго нормален тогда и только тогда, когда $X \in MLUR$.*

В **§ 6.2** мы показываем, как можно строить конус K в пространстве финитных последовательностей C_{00}, который не содержит прямых, является архимедово замкнутым, но не замкнут относительно некоторой почти максимальной топологии τ на C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00}, F\rangle$.

[60] A. R. Lovaglia. Locally uniformly convex Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 78, (1955), 225-238.

Архимедова замкнутость (или архимедовость) подмножества K локально выпуклого векторного пространства W означает замкнутость пересечений K с конечномерными подпространствами.

Всякое разделяющее элементы W подпространство F в алгебраически сопряженном пространстве $W^{\#}$ линейных функционалов на W определяет топологию Макки $\langle W \mid F \rangle$ — максимальную локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью.

Если $F \neq W^{\#}$, то в $\langle W \mid F \rangle$ имеются незамкнутые архимедовы множества, например, гиперплоскости, являющиеся ядрами разрывных функционалов $h \in W^{\#} \backslash F$.

В ([47]) установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых. Там же установлено, что если пространство W счетномерно, то максимальная топология двойственности $\langle W \mid W^{\#} \rangle$ не допускает таких конусов. Подпространство функционалов $F \subset W^{\#}$ названо тонким, если эти конусы в $\langle W \mid F \rangle$ есть.

Основной результат § 6.2 — построение тонкой гиперплоскости (и соответствующего конуса) для счетномерного пространства (реализованного как C_{00}) в пространстве $C_{00}^{\#}$ существует тонкая гиперплоскость. Сопряженное пространство $C_{00}^{\#}$ состоит из *всех* последовательностей $f = (a_1, a_2, \ldots)$, спаривание $\langle C_{00} \mid C_{00}^{\#} \rangle$ таково: $\langle (x_n), (a_n) \rangle = \sum a_i x_i$.

Во втором сопряженном пространстве $C_{00}^{\#\#}$ имеется такой элемент L, что если числовая последовательность a_n сходится и $f = (a_n)$, то $L(f) = \lim a_n$. Например, таковы банаховы пределы. Для получения такого L нужно как-нибудь продлить функционал $L = \lim$, пользуясь теоремой Хана—Банаха, с подпространства $c \subset C_{00}^{\#}$ сходящихся последовательностей на все $C_{00}^{\#}$.

В $C_{00}^{\#}$ определим гиперплоскость функционалов $F = \ker L$.

Теорема 6.5. *Гиперплоскость $F = \ker L \subset C_{00}^{\#}$ является тонкой. Выпуклое архимедово замкнутое и не содержащее лучей множество*

$$C = \Big\{ x \in C_{00} \mid \sum x_n = 1, \sup\big\{|x_1|, \frac{|x_2|}{2}, \frac{|x_3|}{3}, \cdots, \frac{|x_n|}{n} \cdots \big\} \le 1 \Big\}$$

не замкнуто, ибо 0 не отделяется от C никаким функционалом $f \in F$.

Следствие. Выпуклый конус $K \subset C_{00}$ с базой C

$$K = \Big\{ x \in C_{00} \mid \sum_{n \ge 1} x_n \ge \sup\big\{|x_1|, \frac{|x_2|}{2}, \frac{|x_3|}{3}, \cdots, \frac{|x_n|}{n} \cdots \big\} \Big\}$$

архимедов, но не замкнут в пространстве $\langle C_{00} \mid F \rangle$.

Для нас остается открытым вопрос: всякая ли гиперплоскость в пространстве $C_{00}^{\#}$, разделяющая элементы C_{00}, является тонкой?

В **§ 6.3** мы устанавливаем некоторое естественное свойство верхнего топологического предела семейства гиперплоскостей и, более общо, свойство семейства подпространств конечной коразмерности. Именно, оказывается, что верхний топологический предел семейства векторных подпространств коразмерности k в произвольном топологическом векторном пространстве содержит некоторое подпространство коразмерности k.

Пусть I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X.

Множество $Ls\{X_\alpha\}$, состоящее из всех точек x таких, что для каждой окрестности U точки x множество $\{\alpha \in I \mid U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$ бесконечно, называется верхним топологическим пределом семейства $\{X_\alpha\}$ (см., например, Хаусдорф или Куратовский, ([48,49]), они используют это понятие в метрическом случае и при $I = \mathbb{N}$, в этом случае множество $Ls\{X_n\}$ состоит из всевозможных предельных точек последовательностей вида $\{x_n \in X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Арутюнов установил в ([50]), что если в банаховом пространстве X имеется последовательность замкнутых подпространств X_n, коразмерность каждого из которых не больше числа k, то множество $Ls\{X_n\}$ содержит замкнутое подпространство $X_0 \subset X$, коразмерность которого также не больше k.

Основным результатом **§ 6.3** является утверждение леммы Арутюнова в случае, когда вместо последовательности операторов рассматривается произвольное их семейство, а вместо банахова пространства — произвольное топологическое векторное пространство.

Теорема 6.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, X — топологическое векторное пространство, I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подпространств коразмерности не большей k. Тогда существует подпространство X_0 такое, что $codim\, X_0 \leq k$ и для любого $x \in X_0$ найдётся семейство $\{x_\alpha \in X_\alpha \mid \alpha \in I\}$, имеющее x точкой полного накопления, то есть для каждой окрестности U точки x мощность множества $\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ равна мощности всего множества I.*

В частности, лемма Арутюнова в ее первоначальной формулировке оказывается справедливой для произвольных нормированных пространств и пространств Фреше.

Работы автора по теме диссертации

[1] Сторожук К. В. Стабилизируемость в асимптотически конечномерных полугруппах. // Сибирский математический журнал. — 2003. — т. 44, №6. — С. 1365–1376.

[2] Storozhuk, K. V. On the Rolewicz theorem for evolution operators. // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 135, №6. — P. 1861–1863.

[3] Storozhuk K. V. An extension of the Vu-Sine theorem and compact-supercyclicity. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 332, №2. — P. 1365–1370.

[4] Сторожук К. В. Медленно меняющиеся векторы и асимптотическая конечномерность полугруппы операторов.// Сибирский математический журнал. — 2009. — Т. 50, №4. — С. 928–932.

[5] Сторожук К. В. Препятствия к равномерной устойчивости C_0-полугруппы.// Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №2. — С. 410–419.

[6] Сторожук К. В. Условие асимптотической конечномерности полугруппы операторов. // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, №6. — С. 1389–1393.

[7] Сторожук К.В. Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$. // Функциональный анализ и его приложения. — 2012. — Т. 46, №3. — С. 89–91.

[8] Сторожук К. В. Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов. // Математические заметки. — 2012. — т. 91, вып. 4. — С. 638–640.

[9] Storozhuk K.V. Strongly normal cones and midpoint locally uniform rotundity. // Positivity. — 2013. — Vol. 17, Issue 3. — P. 935–940.

[10] Сторожук К.В. О верхнем топологическом пределе семейства векторных подпространств коразмерности k.// Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12. — С. 432–435.

[11] Сторожук К.В. Тонкие гиперплоскости.// Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1553–1555.