На правах рукописи

Кузнецов Михаил Владимирович

Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл диагональной асимптотики его интегрального ядра

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Официальные оппоненты:
Локуциевский Лев Вячеславович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва), отдел дифференциальных уравнений, ведущий научный сотрудник;

Шлапунов Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский федеральный университет" (г. Красноярск), кафедра теории функций, профессор.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук (г. Санкт-Петербург).

Защита состоится 17 июня 2021 г. в 16:20 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, расположенного по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан «   » ____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н. Егоров Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Вопрос о возможности восстановить форму ограниченной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ по спектру оператора Лапласа с условием Дирихле на ∂U (или "услышать форму барабана", как это сформулировал М. Кац в [1]) возник как попытка обобщения классической теоремы Г. Вейля [2]: если $N(\lambda)$ – количество (с учётом кратности) не превышающих λ собственных значений оператора Лапласа на ограниченной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ с условием Дирихле на ∂U, тогда $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n)\cdot\mathrm{vol}_n(U)}{(2\pi)^n}$, где B_n – n-мерный шар радиуса 1 (через vol_n мы обозначаем n-мерную меру Лебега или, более общо, n-мерную риманову меру).

Вейль рассматривал только случаи $n = 2$ и $n = 3$. В 1912 году он предложил [3] другое доказательство этой теоремы, основанное на вариационных методах. В [4] он сформулировал гипотезу, впоследствии названную его именем, в которой утверждается (в предположении гладкости ∂U), что при $\lambda \to +\infty$

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n)\cdot\mathrm{vol}_n(U)\cdot\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} - \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_{n-1})\cdot\mathrm{vol}_{n-1}(\partial U)\cdot\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{4\cdot(2\pi)^{n-1}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}),$$

а также вариант этой гипотезы для граничного условия Неймана со знаком "$+$" вместо "$-$" во втором слагаемом. Первое продвижение в оценке остаточного члена удалось Р. Куранту в 1920 году; его работа [5] даёт асимптотику $N(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n)\cdot\mathrm{vol}_n(U)\cdot\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\cdot\log(\lambda))$ при $\lambda \to +\infty$. В ней, как и в работах Вейля, использованы вариационные методы.

Следующим нововведением были две статьи Т. Карлемана [6, 7], где разработан метод, основанный на тауберовых теоремах. Ограничение на размерность в этих работах, по сравнению с работами Вейля и Куранта, уже не вводилось. Общая идея метода Карлемана состоит в том, что, выбрав функцию F от оператора и некоторого вспомогательного вещественного аргумента, мы пользуемся спектральной теоремой: $F(\Delta,t) = \int F(\lambda,t)dE_\lambda$ (через E_λ обозначен спектральный проектор), затем берём от обеих частей этого равенства след: $\mathrm{Tr}(F(\Delta,t)) = \int F(\lambda,t)d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda)$, где в правой части интеграл понимается в смысле Лебега – Стильтьеса. Далее $\mathrm{Tr}(F(\Delta,t))$ вычисляется при помощи решения либо достаточно точной оценки некоторого дифференциального (или, более общо, псевдодифференциального) уравнения с частными производными, после чего мы при помощи какой-либо теоремы тауберова типа восстанавливаем асимптотику $\mathrm{Tr}(E_\lambda)$ с некоторой погрешностью.

Беря $F(A,t) = \exp(tA)$, мы получаем метод теплового оператора; в нём выражение $\int F(\lambda,t)d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda)$, стоящее в правой части, представляет собой преобразование Лапласа – Стильтьеса считающей функции, в качестве тауберовой теоремы для оценки асимптотики применяется теорема Караматы. Карлеман заметил, что асимптотика вейлевского типа получается при помощи этого метода из асимптотического разложения следа теплового оператора $\mathrm{Tr}(\exp(t\Delta)) \sim (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (a_j t^j)$ при $t \to +0$, где a_0 – риманов объём многообразия, либо же из аналогичной асимптотики следа резольвенты (если взять $F(A,t) = (t \cdot \mathrm{Id} - A)^{-1}$). Существование такой асимптотики было показано в 1949 году С. Минакшисундарамом и А. Плейелем в [8].

При $F(A,t) = A^t$ мы получаем метод ζ-функции; в нём применяется теорема Икехары, но она даёт столько же информации, сколько и теорема Караматы, использованная в работах Карлемана, т. е. для улучшения асимптотики остаточного члена требуются более сильные тауберовы теоремы. Развитие метода Карлемана в сторону усиления тауберовых теорем в дальнейшем проводилось, например, в [9, 10].

При $F(A,t) = \exp(\mathrm{i}t\sqrt{A})$ получается метод волнового оператора. Именно при помощи этого метода Б. М. Левитан [11] и В. Г. Авакумович [12] улучшили асимптотику остаточного члена до $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ для компактных многообразий. Этот выбор F, в отличие от других упоминавшихся здесь, значительно упрощает "тауберову" часть метода, но усложняет "дифференциальную". Метод волнового оператора в дальнейшем совершенствовался Л. Хёрмандером (см. [13, 14], где интегральное ядро волнового оператора $\exp(\mathrm{i}t\sqrt{A})$ записывается в виде осциллирующего интеграла, в т. ч. когда A – псевдодифференциальный оператор); затем в 1975 году появился результат Х. Дёйстермаата и В. Гийемина [15] об асимптотике остаточного члена в виде $o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ в предположении, что периодические геодезические образуют множество меры нуль. Аналогичное предположение, но не о самих геодезических, а об образуемых ими бильярдах, использовал В. Я. Иврий; его работа 1980 года [16] содержит доказательство гипотезы Вейля в этом предположении.

Вместе с тем вопрос о форме барабана в общей постановке получил отрицательное решение. Первым примером пары изоспектральных, но не изометричных, римановых многообразий был пример Дж. Милнора [17] в размерности 16, основанный на факторизации $\mathbb{R}^{16}$ по двум решёткам. Двумерный пример (даже однопараметрическое семейство примеров) был построен в 1992 году К. Гордон, Д. Уэббом и С. Уолпертом [18, 19] в виде невыпуклых многоугольников. В классе выпуклых многоугольников вопрос о конгруэнтности изоспектральных областей открыт, но в размерности 4 выпуклость уже не является достаточным для восстановления формы области ограничением: модифицировав пример, построенный Х. Уракавой в [20], Гордон и Уэбб нашли в [21] два усечённых выпуклых конуса в $\mathbb{R}^4$, которые изоспектральны, но не изометричны. Двумерные контрпримеры с гладкой границей пока неизвестны, но если дополнительно наложить условия аналитичности границы и $\mathbb{Z}_2$-симметричности области, то форма двумерной области восстанавливается однозначно, как показал С. Зельдич в [22]. В классе треугольников восстановимость формы области (здесь – длин сторон и углов) показана в [23]. Заметим ещё, что наличие или отсутствие у области углов – существенный для асимптотики собственных значений лапласиана фактор, так как кривизна края возникает во всех слагаемых асимптотического разложения ядра теплопроводности (см., например, [24]).

В двумерном случае по спектру лапласиана однозначно восстанавливается эйлерова характеристика, что показано в [25], однако в бóльших размерностях это рассуждение не проходит; С. А. Молчанов в [26] заметил, что коэффициенты в разложении Минакшисундарама – Плейеля уже для трёхмерного риманова многообразия не имеют чисто топологическую природу, т. е. не определяются лишь эйлеровой характеристикой края многообразия.

Также для области в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей можно определить по спектру лапласиана, является ли она шаром; доказательство этого утверждения, основанное на результатах [27,28], можно найти в [29]; там же отмечается, что это доказательство задействует меньше допущений (и, следовательно, более обобщаемо), нежели другое доказательство этого же факта, приведённое в статье Каца [1].

Область исследований, возникшая из вопроса о форме барабана, получила название “спектральная геометрия”. Отметим, что для собственных значений лапласианов имеются не только асимптотические оценки, но и неравенства, в которых фигурируют такие величины, как диаметр многообразия, его кривизна Риччи и т. д.; см. например, результаты статьи [30] П. Ли и Ш.-Т. Яу 1980 года, а также их развитие у Г. Ю. Кокарева и др. [31].

В то же время в аналогичной проблеме для субримановых многообразий имеется гораздо больше трудностей. Для двумерных римановых многообразий известно (см., например, [32]), что диагональная асимптотика ядра теплопроводности при $t \to +0$ (из которой интегрированием получается асимптотика следа теплового оператора) имеет вид $\mathrm{HK}(t,x,x) = \frac{1}{4\pi t}\cdot(1+\frac{K(x)}{6}t+O(t^2))$, где $K(x)$ – гауссова кривизна в точке x, т. е. связь между геометрией и анализом на многообразии появляется уже до применения тауберовых теорем; возникает естественное предположение, что и для субримановых многообразий в этой асимптотике будет присутствовать некоторый аналог кривизны, но это понятие не так просто обобщить. Кроме того, выяснилось, что вместо обычной (топологической) размерности в качестве показателя при t в главном члене асимптотики фигурирует хаусдорфова размерность, которая больше топологической (за исключением римановых многообразий). Другое затруднение связано с тем, что классический метод Карлемана (в “дифференциальной” своей части) существенно задействовал эллиптичность риманова лапласиана; субриманов же его аналог не является эллиптическим. Также при исследовании недиагональной асимптотики субриманова ядра теплового оператора возникают особенности, связанные со множеством раздела и с анормальными геодезическими – в этих направлениях асимптотика может отличаться от асимптотики по направлениям общего положения; см. [33], где рассмотрен пример в размерности 5 – двойная группа Гейзенберга.

В статьях [34, 35] доказывается существование асимптотик (как диагональной, так и недиагональной вдали от множества раздела) для субримановых ядер теплопроводности, но коэффициенты этих асимптотик не были представлены в явном и "геометричном" виде; применённые там методы в дальнейшем были распространены также и на множество раздела в [36]. В целом содержание данной диссертации заключается в преодолении этой неконструктивности, т. е. в разработке методов, расширяющих и совершенствующих "дифференциальную" часть метода Карлемана, обобщённого на субримановы многообразия. Знание какой-либо формулы (пусть даже не в элементарных функциях) для фундаментального решения, обычно получаемой при помощи понижения порядка уравнения теплопроводности (или, точнее, его преобразования Фурье, которое обычно выглядит намного проще исходного уравнения), существенно помогло бы в деле поиска нужных асимптотик, но такую формулу далеко не всегда удаётся получить. В частности, для нильпотентной группы Ли в $\mathbb{R}^n$ с двумерным левоинвариантным распределением $\mathrm{span}(\{X_1,X_2\})$, где $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!}\partial_{k+2}$, и соответствующей субримановой метрикой и сублапласианом $\Delta = {X_1}^2 + {X_2}^2$ (эта группа называется *группой Гурса*) мы в настоящей работе показываем, что уравнение $\partial_t p(t,x) = \Delta p(t,x)$, называемое по аналогии с римановыми многообразиями *уравнением теплопроводности* или *уравнением диффузии*, не допускает понижения порядка, как только $n \geq 4$, что допускает две различные интерпретации. С одной стороны, причина неинтегрируемости данного уравнения может быть сочтена чисто алгебраической, поскольку сама эта теорема была получена при помощи метода продолжений [37], в результате применения которого возникает ограничение на степень некоторого полинома; с другой стороны, этому явлению можно, по всей видимости, придать геометрический смысл. Дело в том, что группа Гурса при $n = 4$ есть не что иное, как группа Энгеля, в которой, как известно, существуют анормальные геодезические; есть они и в группах бо́льших размерностей. Из-за этих геодезических возникают следующие особенности: 1) сублапласиан, хоть и остаётся гипоэллиптическим оператором, теряет, однако, аналитическую гипоэллиптичность по их направлениям, 2) сферы в метрике Карно – Каратеодори (в окрестности концов анормальных геодезических) не задаются неравенствами с аналитическими функциями. В группе Гейзенберга, которая получается при $n = 3$, вышеперечисленных трудностей не наблюдается. Интуитивно кажется понятным, что если бы порядок уравнения теплопроводности понижался, то оно бы решалось в интегралах от "достаточно простых" элементарных функций, что не согласуется с отсутствием аналитической гипоэллиптичности сублапласиана; здесь же неинтегрируемость уравнения теплопроводности доказана вполне строгими методами. В случае более общих, чем группы Гурса, субримановых многообразий эквивалентность наличия анормальных геодезических и отсутствия аналитической гипоэллиптичности сублапласиана – нерешённая гипотеза Ф. Трева [38].

В свете всего вышесказанного для работы с ядрами теплопроводности даже в группах Гурса, не говоря уже о произвольных субримановых многообразиях, требуются принципиально новые идеи. Одной из таких идей является метод возмущений, успешно использованный Д. Барилари [39] для трёхмерных контактных многообразий: при помощи этого метода ему удалось получить явный вид коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ в диагональной асимптотике субриманова ядра теплопроводности при $t \to +0$, где Q – хаусдорфова размерность многообразия (в рассмотренном случае она равна 4); этот коэффициент оказался равен (с точностью до постоянного множителя) инварианту κ, определённому А. А. Аграчёвым из других соображений [40] и играющему роль кривизны. В дальнейшем И. Колен де Вердье, Л. Иллерэ и Э. Треля показали [41], каким образом метод возмущений может быть совмещён с тауберовыми теоремами для перевода диагональной асимптотики ядра теплопроводности в спектральную асимптотику сублапласиана, т. е. они пошли по пути обобщения метода Карлемана, что гораздо проще, чем получение оценок на конкретные собственные значения (например, таких, как в работах Кокарева). Однако применимость метода возмущений существенно зависит от возможности вычислить ядро теплопроводности в нильпотентной аппроксимации данного многообразия (а также от некоторых других технических деталей, таких, как существование нормальных форм для горизонтальных векторных полей); поскольку трёхмерные контактные многообразия имеют своей нильпотентной аппроксимацией группу Гейзенберга, где ядро теплопроводности известно [42], для них такой проблемы не возникает. В настоящей работе предложена идея задействовать в методе возмущений ту формулу для ядра теплопроводности в нильпотентной группе Ли, являющейся аппроксимацией исходного многообразия, которая получается из обобщённого преобразования Фурье на этой группе; конкретное применение этой идеи мы показываем на примере групп Гурса. Чтобы пользоваться обобщённым преобразованием Фурье, необходимо знать структуру неприводимых унитарных представлений данной группы, которую можно найти при помощи метода орбит А. А. Кириллова [43, 44]. В результате обобщённого преобразования Фурье исходное ядро теплопроводности сводится к более простому *приведённому ядру*, которое, как мы показываем в настоящей работе, участвует вместе со своими производными до второго порядка включительно в формуле для коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ искомой диагональной асимптотики. Обобщённое преобразование Фурье для нахождения асимптотики ядра теплового оператора использовали также М. Гордина и М. Асаад [45], но там от точных формул к асимптотическим авторы перешли слишком преждевременно, так что в методе возмущений их результат неприменим (в нашей работе приведённое ядро мы вынуждены дифференцировать и интегрировать, поэтому важно сохранить до этого шага рассуждений точную формулу).

Приведённые ядра, соответствующие группам Гурса с $n \geq 4$, не выражаются в элементарных функциях, но могут быть аппроксимированы при помощи формулы Троттера – Като [46]; кроме того, в настоящей работе мы показываем, основываясь на работе У. Боскаина, Ж.-П. Готье и Ф. Росси [47], связь ядра теплопроводности для группы Энгеля, которая есть группа Гурса с $n = 4$, с некоторыми специальными функциями, называемыми *функциями Хойна* (об этих функциях см., например, [48]). Другой подход к вычислению ядра теплопроводности для группы Энгеля, основанный на гамильтоновой механике, реализован К. Фурутани в [49], но там не вычислены явно некоторые параметры (начальное значение ковектора в гамильтоновой системе в зависимости от конечной точки на геодезической, а также решение транспортного уравнения); для нахождения геодезических задействованы эллиптические функции. Более подробное изложение этого метода (а также некоторых других методов вычисления ядер теплопроводности) можно найти, например, в [50].

Цель диссертационной работы – найти зависимость коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ диагональной асимптотики ядра теплопроводности в произвольном эквирегулярном субримановом многообразии от локальных геометрических характеристик этого многообразия и алгебраических свойств его нильпотентной аппроксимации.

Основные результаты работы:

1. Доказано, что уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса не имеет нетривиальных симметрий (и, следовательно, не допускает понижения порядка) при $n \geq 4$. Данный результат, хотя и носит отрицательный характер, позволяет, тем не менее, утверждать, что в общем случае к субримановым уравнениям диффузии нужны другие подходы.

2. Найдено (не слишком ограничительное) достаточное условие, используемое вместо существования нормальных форм горизонтальных векторных полей в методе возмущений, которое даёт возможность записать диагональную асимптотику ядра теплопроводности в виде $t^{-\frac{Q}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$ при $t \to +0$, и сам этот метод (в комбинации с обобщённым преобразованием Фурье) применён при данном условии, в результате чего получена полиномиальная по параметрам возмущения формула для a_1. Рассмотрен пример, когда нильпотентная аппроксимация данного многообразия есть группа Гурса.

3. В терминах осциллирующих интегралов от триконфлюэнтной функции Хойна выражено приведённое ядро в группе Энгеля (четырёхмерной группе Гурса).

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, некоторые из них являются обобщениями ранее известных теорем. Также в работе содержится альтернативный подход к доказательству уже известных результатов [34, 35].

Методы исследования. В настоящей работе использованы различные методы вещественного, комплексного и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории групп Ли и их представлений, включая метод возмущений, формулу Троттера – Като, метод продолжений, обобщённое преобразование Фурье и метод орбит, а также специальные функции.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в данной работе результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также в субримановой геометрии.

Апробация работы. Основные результаты данной работы прошли апробацию на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Youth Workshop on Analysis (Новосибирск, Региональный математический центр НГУ, июнь 2018 г.)

2. Семинар по геометрическому анализу под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора С. К. Водопьянова (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2019 г.)

3. Международная конференция по геометрическому анализу в честь 90-летия академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, сентябрь 2019 г.)

Публикации и личный вклад. Основные результаты данной диссертации опубликованы в трёх статьях [A1–A3] в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций и индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science.

Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. К. Водопьянову за оказанную помощь в ознакомлении с современным состоянием исследуемой области математики.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения, а также списка литературы. Список литературы, за исключением работ автора по теме диссертации, содержит 70 наименований, приведённых в алфавитном порядке, а список работ автора по теме диссертации 3 наименования. Общий объём диссертации: 84 страницы.

В главах все утверждения (определения, теоремы, следствия, предложения) пронумерованы тремя числами: номером главы, номером параграфа в главе и номером утверждения в параграфе. Нумерация формул сквозная.

Содержание работы

Для удобства читателя используется та же нумерация утверждений и определений, что и в тексте диссертации.

Во **введении** дан обзор литературы по исследуемому кругу задач, описаны сами эти задачи и различные трудности, возникающие при их решении.

В **первой главе** в **параграфе 1.1** приведены основные определения, относящиеся к геометрии и анализу на субримановых многообразиях и к теории групп Ли; в **параграфе 1.2** при помощи метода продолжений для групп Гурса, являющихся в настоящей работе основным модельным примером, получен результат, опубликованный в [А2]:

Предложение 1.2.1. *Если Q – многочлен по переменной x степени, большей 2, то уравнение $\partial_t p(t,x) = {\partial_x}^2 p(t,x) - Q(x)p(t,x)$ не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным уравнением) групп линейных преобразований решений.*

Поскольку уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса сводится, как показано в [А2], к уравнению вида $\partial_t p(t,x) = {\partial_x}^2 p(t,x) - Q(x)p(t,x)$ с многочленом Q степени $2n-4$, мы получаем, что при $n \geq 4$ понизить порядок уравнения теплопроводности в n-мерной группе Гурса невозможно. Данный результат носит в основном отрицательный характер – его важность состоит в том, что "слишком простых" формул для субримановых ядер теплопроводности в общем случае не бывает, что приводит нас к необходимости использовать какие-либо аппроксимативные техники при проведении рассуждений по методу Карлемана. Также, возможно, этот факт указывает на правдоподобность гипотезы Трева, на необходимость использования неаналитических функций при описании субримановых шаров при наличии анормальных геодезических.

Вторая глава посвящена описанию более сложных техник для исследования субриманова уравнения теплопроводности, опирающихся, в частности, на теорию представлений. В **параграфе 2.1** даны общие сведения об обобщённом (или некоммутативном) преобразовании Фурье. В **параграфе 2.2** изложен метод орбит для нильпотентных групп Ли, который позволяет классифицировать неприводимые унитарные представления заданной группы Ли G, имея информацию о структуре орбит в коприсоединённом представлении Ad^* этой группы. Метод орбит является ключевым компонентом обобщённого преобразования Фурье в конкретных вычислениях; для того, чтобы сделать его полностью конструктивным, один из его шагов (нахождение по элементу пространства $\mathfrak{g}^*$, сопряжённого к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, некоторой специальной подалгебры в $\mathfrak{g}$) мы проводим при помощи построения, данного М. Вернь [51]; соответствующая подалгебра (называемая *подалгеброй Вернь*), построенная по ковектору $\xi \in \mathfrak{g}^*$, обозначается $\mathfrak{vs}_\xi$, для группы Ли $\exp(\mathfrak{vs}_\xi)$ принято обозначение VS_ξ. Выведена общая формула для ядра теплопроводности, сводящая его к некоторому более простому (приведённому) ядру, и – как следствие – частный случай этой формулы для групп Гурса:

Теорема 2.2.3. *Пусть G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с левоинвариантной субримановой метрикой и соответствующим* *сублапласианом Δ_H, в котором для определения дивергенции используется мера Хаара. Тогда ядро теплопроводности для Δ_H выражается в виде*

$$p(t,g) = \int_Q \int_{\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi(\log(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)))} \times$$
$$\times \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t, \gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1} \gamma_x g), x) |\operatorname{pf}(A(\xi))| dx d\xi,$$

где $\gamma_x = \exp(x_1 Z_{\frac{\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}+1}) \cdot \ldots \cdot \exp(x_{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}} Z_{\dim \mathfrak{g}})$, $(Z_k)_{1 \le k \le \dim \mathfrak{g}}$ *– мальцевский в слабом смысле базис* $\mathfrak{g}$, *проходящий для каждого* $\xi \in Q$ *через* $\mathfrak{vs}_\xi$ *(т. е. он, вообще говоря, зависит от* ξ*),* $\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h)$ *для* $h \in G$ *определяется как такой* $h' \in VS_\xi$, *что при некотором* $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}$ *имеет место равенство* $h = h'\gamma_x$ *(и, соответственно,* $\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h))^{-1} h) = x$ *в этих обозначениях); при каждом* $t > 0$ *функция* $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t, \cdot, \cdot)$ *есть интегральное ядро оператора* $\exp(t\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi))$ *(здесь* $\widehat{\Delta_H} = \mathcal{F}\Delta_H \mathcal{F}^{-1}$, *обобщённое преобразование Фурье обозначено* $\mathcal{F}$*),* λ_ξ *– класс эквивалентности неприводимых унитарных представлений* G, *соответствующий* ξ, Q *– линейное подмногообразие в* $\mathfrak{g}^*$, *выбранное так, что каждая* Ad^**-орбита максимальной размерности пересекается в* Q *ровно в одной точке,* $\mathfrak{g}_\xi = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, (\xi([X,Y]) = 0)\}$, $\operatorname{pf}(A(\xi))$ *– пфаффиан кососимметрической матрицы* $A(\xi)$, *определяемой так: выберем в* $\mathfrak{g}^{**}$ *(отождествляя* $\mathfrak{g}^{**}$ *с* $\mathfrak{g}$*) базис* $\{X_j : 1 \le j \le \dim Q\} \cup \{Y_j : 1 \le j \le \dim \mathfrak{g} - \dim Q\}$, *в котором элементы, обозначенные буквой* Y *с индексами, постоянны на* Q, *а* $(X_j)_{1 \le j \le \dim Q}$ *будем считать координатами на* Q*; для каждого* $\xi \in Q$ *положим* $A(\xi)_{j,k} = \xi([Y_j, Y_k])$.

Следствие 2.3.1. *Ядро теплопроводности в* n*-мерной группе Гурса, соответствующее сублапласиану* $\Delta = {X_1}^2 + {X_2}^2$, *где горизонтальное распределение есть* $\operatorname{span}(\{X_1, X_2\})$ *с* $X_1 = \partial_1$ *и* $X_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} \partial_{k+2}$, *записывается в следующем виде:*

$$p(t, a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \left(\beta_{n-1} P_n(a, \overrightarrow{b}, x) + \sum_{j=1}^{n-3} (\beta_j P_{j+1}(a, \overrightarrow{b}, x))\right)} \times$$
$$\times \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}}(t, x + a, x) |\beta_{n-1}| dx d(\beta_j)_{1 \le j \le n-3} d\beta_{n-1},$$

где

$$P_j(a, \overrightarrow{b}, x) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{a^l b_{k-l}}{(l+1)!} \right) \cdot \frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!} \right),$$

оператор $\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}$ *действует на функцию* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *по правилу*

$$\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}(f)(x) = f''(x) - 4\pi^2 \left(\sum_{j=1}^{n-3} \left(\beta_j \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \right) + \beta_{n-1} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \right)^2 f(x).$$

В случае групп Гурса подалгебра Вернь для всех ковекторов одна и та же.

Данные результаты похожи на результаты работы [45], но являются их развитием в том смысле, что для приведённого ядра используется формула Троттера – Като как таковая, а не её следствия из работы [46], приводящие лишь к асимптотическим оценкам ядра теплового оператора *для группы*; переход от группы к произвольному субриманову многообразию за счёт лишь результатов [45] не представляется возможным.

В **параграфе 2.3** изложен метод возмущений; результат Д. Барилари о диагональной асимптотике субримановых ядер теплопроводности в трёхмерных контактных многообразиях обобщён с использованием формул, доказанных в параграфе 2.2:

Теорема 2.3.2. *Пусть M – эквирегулярное субриманово многообразие размерности n, нильпотентная аппроксимация которого есть группа Гурса. Пусть рассматриваемое субриманово многообразие имеет горизонтальное распределение $\mathrm{span}\{X_1,X_2\}$, полученное из распределения Гурса возмущением, записываемым в окрестности точки $(0,\ldots,0)$ с точностью до однородных векторных полей с показателем однородности 2 и выше следующим образом: при всех $p \leq -2$ выполнено $\mathrm{hg}_p(X_1) = \mathrm{hg}_p(X_2) = 0$, а также*

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_1) = \widetilde{X}_1, \mathrm{hg}_0(X_1) = 0, \mathrm{hg}_1(X_1) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\alpha\in\Phi_r} (u_{\alpha,r} x^{\alpha}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_r} \right),$$

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_2) = \widetilde{X}_2, \mathrm{hg}_0(X_2) = 0, \mathrm{hg}_1(X_2) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\alpha\in\Phi_r} (v_{\alpha,r} x^{\alpha}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_r} \right),$$

где Φ_r – множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, для которых выполнено $\alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} ((j-1)\alpha_j) = \begin{cases} 2, r = 1, \\ r, r > 1, \end{cases}$ $\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\widetilde{X}_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} \frac{\partial}{\partial x_{k+2}}$, переменной x_1 приписан показатель однородности 1, каждой переменной x_r при $r \geq 2$ приписан показатель однородности $r-1$, оператору дифференцирования по каждой переменной приписан её показатель однородности со знаком минус, $\mathrm{hg}_p(X)$ означает однородную часть векторного поля X с показателем p. Через $u_{\alpha,r}$ и $v_{\alpha,r}$ обозначены постоянные, называемые параметрами возмущения, для которых при $3 \leq j \leq n-1$ выполнено $[X_2,X_j] \in \mathrm{span}(\{X_k : 1 \leq k \leq j\})$, где $X_j = [X_1,X_{j-1}]$ при $3 \leq j \leq n$. Пусть Δ – построенный по распределению $\mathrm{span}\{X_1,X_2\}$ и форме объёма ${X^*}_1 \wedge \ldots \wedge {X^*}_n$ сублапласиан, где ${X_j}^*$ при $1 \leq j \leq n$ суть 1-формы, для которых ${X_j}^*(X_j) = 1$ и ${X_j}^*(X_k) = 0$ для $j \neq k$. Тогда для соответствующего ядра теплопроводности имеет место диагональная асимптотика

$$\mathrm{HK}_{\Delta}(t,x,x) = t^{-\frac{n(n-1)+2}{4}} (a_0 + a_1 t + O(t^2))$$

при $t \to 0$, в которой коэффициент a_1 есть полином от параметров возмущения; коэффициенты этого полинома выражаются через обобщённые интегралы Фурье от полиномов от приведённого ядра и его производных до второго порядка включительно.

Наложенное здесь дополнительное условие о занулении у всех горизонтальных базисных векторных полей однородных частей нулевого порядка применяется вместо условия существования нормальной формы горизонтальных векторных полей, использованного в работе Д. Барилари, и, в действительности, позволяет доказать аналогичный результат в случае, если многообразие имеет своей нильпотентной аппроксимацией какую-либо другую нильпотентную группу Ли. Также в параграфе 2.3 рассматривается возможность дальнейшего выражения приведённого ядра, которое (вместе со своими производными до второго порядка включительно) участвует в формуле для коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ искомой диагональной асимптотики, при помощи формулы Троттера – Като:

Предложение 2.3.1. *Приведённое ядро в n-мерной группе Гурса можно выразить формулой*

$$\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}}(t,x_1,x_0) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \prod_{r=0}^{N-1} (L_{t,N}(x_{\frac{r+1}{N}},x_{\frac{r}{N}}))d(x_{\frac{r}{N}})_{1\le r\le N-1},$$

где $L_{t,N}(x,y) = (\frac{N}{4\pi t})^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{N}\left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right) + \beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2 - \frac{(x-y)^2N}{4t}\right).$

Это и есть та ключевая формула (записанная здесь для групп Гурса), за счёт которой модернизируется результат [45], становясь применимым в методе возмущений, где приведённое ядро требуется дифференцировать и интегрировать. Результаты второй главы опубликованы в [А3].

Содержание **третьей главы**, состоящей из одного **параграфа 3.1**, составляет рассмотрение частного случая n-мерной группы Гурса – группы Энгеля – в контексте работы У. Боскаина, Ж.-П. Готье и Ф. Росси. Основываясь на полученной ими параметризации двойственного по Понтрягину пространства к группе Энгеля и на соответствующем уравнении для приведённого ядра, мы связываем это ядро с функциями Хойна (в их самом вырожденном – триконфлюэнтном – случае).

Определение 3.1.1. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Функция f комплексной переменной z, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения $f''(z) - (3z^2+\gamma)f'(z) - ((3-\beta)z-\alpha)f(z) = 0$ с начальными условиями $f(0) = 1$ и $f'(0) = 0$, называется триконфлюэнтной функцией Хойна и обозначается $H_{\alpha,\beta,\gamma}$.*

Уравнение для приведённого ядра в группе Энгеля сводится преобразованием Фурье по t (двойственная к t переменная обозначена λ) к уравнению $({\partial_\theta}^2 - (\theta^2+\beta)^2 - \mathrm{i}\lambda)f(\theta) = 0$, где $\beta \neq 0$, решение которого имеет следующий вид:

Теорема 3.1.1. *При заданных начальных значениях $f(0) = P, f'(0) = Q$ имеет место формула*

$$f(\theta) = \frac{P - Q\beta^{-1}}{2} \exp\left(-\beta\theta - \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(-\theta \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) +$$
$$+ \frac{P + Q\beta^{-1}}{2} \exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right),$$

где $L = \mathrm{e}^{\frac{5\pi \mathrm{i}}{6}} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$, $B = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{12}$.

Эта теорема опубликована в [A1]. Она является дальнейшим развитием идей [47], но также иллюстрирует уже упоминавшийся ранее факт об отсутствии слишком простых формул для приведённых ядер: интегралы от функции Хойна здесь требуют регуляризации (понимаются как осциллирующие).

Заключение

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Доказано, что уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса не имеет нетривиальных симметрий (и, следовательно, не допускает понижения порядка) при $n \geq 4$. Данный результат, хотя и носит отрицательный характер, позволяет, тем не менее, утверждать, что в общем случае к субримановым уравнениям диффузии нужны другие подходы. Кроме того, есть надежда, что этот результат удастся связать с общей гипотезой Трева.

2. Найдено (не слишком ограничительное) достаточное условие, используемое вместо существования нормальных форм горизонтальных векторных полей в методе возмущений, которое даёт возможность записать диагональную асимптотику ядра теплопроводности в виде $t^{-\frac{Q}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$ при $t \to +0$, и сам этот метод (в комбинации с обобщённым преобразованием Фурье) применён при данном условии, в результате чего получена полиномиальная по параметрам возмущения формула для a_1. Рассмотрен пример, когда нильпотентная аппроксимация данного многообразия есть группа Гурса. Точный геометрический смысл полученной формулы ввиду её громоздкости, к сожалению, пока не вполне ясен.

3. В терминах осциллирующих интегралов от триконфлюэнтной функции Хойна выражено приведённое ядро в группе Энгеля (четырёхмерной группе Гурса).

Список литературы

1. *Kac M.* Can One Hear the Shape of a Drum? // *American Mathematical Monthly.* — 1966. — Vol. 73, no. 4, part 2. — Pp. 1–23.

2. *Weyl H.* Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte // *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* — 1911. — Pp. 110–117.

3. *Weyl H.* Das asymptotische Verteilungsgesetz linearen partiellen Differentialgleichungen // *Math. Ann.* — 1912. — Vol. 71. — Pp. 441–479.

4. *Weyl H.* Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgeometrie // *J. Reine Angew. Math.* — 1913. — Vol. 143. — Pp. 177–202.

5. *Courant R.* Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik // *Mat. Z.* — 1920. — Vol. 7. — Pp. 1–57.

6. *Carleman T.* Propriétes asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes // C. R. 8-ème Congr. Math. Scand (Stockholm, 1934). — Lund. — Pp. 34–44.

7. *Carleman T.* Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen // *Ber. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig.* — 1936. — Vol. 88. — Pp. 119–132.

8. *Minakshisundaram S., Pleijel Å.* Some properties of eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds // *Canadian J. Math.* — 1949. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 242–256.

9. *Subhankulov M. A.* Some general Tauberian theorems with remainder term // *Tr. Mat. Inst. Steklova.* — 1961. — T. 64. — C. 239–266.

10. *Smajlović L., Šćeta L.* On a Tauberian theorem with the remainder term and its application to the Weyl law // *J. Math. Anal. Appl.* — 2013. — Vol. 401. — Pp. 317–335.

11. *Levitan B. M.* On the asymptotic behaviour of the spectral function of the second order elliptic equation // *Izv. AN SSSR, Ser. Mat.* — 1952. — T. 16, № 1. — C. 325–352.

12. *Avakumovič V. G.* Über die eigenfunktionen auf geschlossen riemannschen mannigfaltigkeiten // *Math. Z.* — 1956. — Vol. 65. — Pp. 324–344.

13. *Hörmander L.* The spectral function of an elliptic operator // *Acta Math.* — 1968. — Vol. 121. — Pp. 193–218.

14. *Hörmander L.* On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators // Yeshiva Univ. Conf. (November 1966). — Vol. 2 of Ann. Sci. Conf. Proc.

15. *Duistermaat J. J., Guillemin V.* The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics // *Invent. Math.* — 1975. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 37–79.

16. *Ivrii V.* Second term of the spectral asymptotic expansion for the Laplace-Beltrami operator on manifold with boundary // *Funct. Anal. Appl.* — 1980. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 98–106.

17. *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* — 1964. — Vol. 51, no. 4. — P. 542.

18. *Gordon C., Webb D.* You can't hear the shape of a drum // *American Scientist.* — 1992. — Vol. 84, no. 1. — Pp. 46–55.

19. *Gordon C., Webb D., Wolpert S.* Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds // *Inventiones Mathematicae.* — 1992. — Vol. 110, no. 1. — Pp. 1–22.

20. *Urakawa H.* Bounded domains which are isospectral but not congruent // *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 4.* — 1982. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 441–456.

21. *Gordon C., Webb D.* Isospectral convex domains in euclidean space // *Math. Res. Lett.* — 1994. — Vol. 1. — Pp. 539–545.

22. *Zelditch S.* Inverse Spectral Problem for Analytic Domains II: $\mathbb{Z}_2$-Symmetric Domains // *Ann. Math.* — 2009. — Vol. 170, no. 1. — Pp. 205–269.

23. *Chang P. K., Deturck D.* On hearing the shape of a triangle // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 1989. — Vol. 105, no. 4. — Pp. 1033–1038.

24. *Watanabe K.* Plane domains which are spectrally determined // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2000. — Vol. 18. — Pp. 447–475.

25. *McKean H. P., Jr., Singer I. M.* Curvature and the eigenvalues of the Laplacian // *J. Differential Geometry.* — 1967. — Vol. 1. — Pp. 43–69.

26. *Molchanov S. A.* Diffusion processes and Riemannian geometry // *Uspekhi Mat. Nauk.* — 1975. — T. 30, № 1. — C. 3–59.

27. *Henrot A.* Minimization problems for eigenvalues of the Laplacian // *Journal of Evolution Equations.* — 2003. — Vol. 3. — Pp. 443–461.

28. *Daners D., Kennedy J.* Uniqueness in the Faber – Krahn inequality for Robin problems // *SIAM J. Math. Anal.* — 2007. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 1191–1207.

29. *Arendt W., Nittka R., Peter W., Steiner F.* Weyl's law: Spectral properties of the Laplacian in Mathematics and Physics // Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity. — Weinheim. — Pp. 1–71.

30. *Li P., Yau S.-T.* Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold. Geometry of the Laplace operator // *Proc. Sympos. Pure Math.* — 1980. — Vol. 36. — Pp. 205–239.

31. *Hassannezhad A., Kokarev G., Polterovich I.* Eigenvalue inequalities on Riemannian manifolds with a lower Ricci curvature bound // *Journal of Spectral Theory.* — 2015. — Vol. 6, no. 4.

32. *Rosenberg S.* The Laplacian on a Riemannian manifold. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

33. *Barilari D., Boscain U., Neel R. W.* Heat kernel asymptotics on sub-Riemannian manifolds with symmetries and applications to the bi-Heisenberg group // *preprint, available at http://arxiv.org/abs/1606.01159.* — 2016.

34. *Ben Arous G.* Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus // *Ann. Sci. École Norm. Sup.* — 1988. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 307–331.

35. *Ben Arous G.* Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale // *Ann. Inst. Fourier.* — 1989. — Vol. 39, no. 1. — Pp. 73–99.

36. *Inahama Y., Taniguchi S.* Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus // *preprint, available at http://arxiv.org/abs/1603.01386.* — 2017.

37. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

38. *Trèves F.* Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and applications to the $\overline{\partial}$-Neumann problem // *Comm. Partial Differential Equations.* — 1978. — Vol. 3. — Pp. 475–642.

39. *Barilari D.* Trace heat kernel asymptotics in 3D contact sub-Riemannian geometry // *J. Math. Sci.* — 2013. — Vol. 195, no. 3. — Pp. 391–411.

40. *Agrachev A. A.* Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures // *J. Dynam. Control Systems.* — 1996. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 321–358.

41. *Colin de Verdière Y., Hillairet L., Trélat E.* Spectral asymptotics for sub-Riemannian Laplacians. I: Quantum ergodicity and quantum limits in the 3D contact case // *Duke Mathematical Journal.* — 2018. — Vol. 167, no. 1. — Pp. 109–174.

42. *Craddock M., Lennox K.* Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions // *Journal of Differential Equations.* — 2007. — Vol. 232, no. 2. — Pp. 652–674.

43. *Кириллов А. А.* Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — Vol. 22.

44. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.

45. *Asaad M., Gordina M.* Hypoelliptic Heat Kernels on Nilpotent Lie Groups // *Potential Analysis.* — 2016. — Vol. 45. — Pp. 355–386.

46. *Séguin C., Mansouri A.* Short-time asymptotics of heat kernels of hypoelliptic Laplacians on unimodular Lie groups // *J. Funct. Anal.* — 2012. — Vol. 262, no. 9. — Pp. 3891–3928.

47. *Boscain U., Gauthier J.-P., Rossi F.* Hypoelliptic heat kernel over 3-step nilpotent Lie groups // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2014. — Vol. 199, no. 6. — Pp. 614–628.

48. *Choun Y. S.* Asymptotic behavior of Heun function and its integral formalism // *preprint, available at http://arxiv.org/abs/1303.0876.* — 2013.

49. *Furutani K.* Heat kernels of the sub-Laplacian and the Laplacian on nilpotent Lie groups // *Analysis, Geometry and Topology of Elliptic Operators, Papers in honor of Krzysztof P. Wojciechowsky.* — 2006. — Pp. 185–226.

50. *Calin O., Chang D.-C., Furutani K., Iwasaki C.* Heat kernels for elliptic and sub-elliptic operators. Methods and techniques. — Boston: Birkhäuser Boston Inc., 2011.

51. *Vergne M.* Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1970. — Vol. 270. — Pp. 173–175, 704–707.

Публикации автора по теме диссертации

[A1] *Кузнецов М. В.* Об ангармоническом осцилляторе в задаче теплопроводности для нильпотентных субримановых групп Ли с векторами роста (2,3,4) и (2,3,5) // *Математические заметки.* — 2019. — Т. 105, № 3. — С. 467–470.

[A2] *Кузнецов М. В.* Отсутствие нетривиальных симметрий уравнения теплопроводности в группах Гурса размерности 4 и выше // *Сибирский математический журнал.* — 2019. — Т. 60, № 1. — С. 141–147.

[A3] *Кузнецов М. В.* Применение нильпотентной аппроксимации и метода орбит для поиска диагональной асимптотики субримановых ядер теплопроводности // *Сибирский математический журнал.* — 2019. — Т. 60, № 6. — С. 1350–1378.

Кузнецов Михаил Владимирович

Субриманов оператор диффузии
и геометрический смысл диагональной
асимптотики его интегрального ядра

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 09.04.2021 г.
Офсетная печать. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО “Омега Принт”
пр. Ак. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090