На правах рукописи

Копылов Ярослав Анатольевич

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА И ОРЛИЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Лосев Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный университет» (г. Волгоград), институт математики и информационных технологий, директор, профессор;

Ткачев Владимир Геннадьевич, доктор физико-математических наук, доцент, Линчёпингский университет (г. Линчёпинг, Швеция), институт математики, доцент;

Шлапунов Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск), институт математики и фундаментальной информатики, профессор.

Ведущая организация — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Москва).

Защита диссертации состоится 14 октября 2021 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, Новосибирск, пр-т ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» ____________________

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н. Егоров Александр Анатольевич

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Использование методов теории гильбертовых пространств в исследовании краевых и других задач на римановых многообразиях восходит к середине XX в.

Согласно известной теореме де Рама у гладкого многообразия M сингулярные когомологии с вещественными коэффициентами совпадают с когомологиями комплекса де Рама

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{j-1}} \Omega^j(M) \xrightarrow{d^j} \Omega^{j+1}(M) \xrightarrow{d^{j+1}} \dots,$$

где $\Omega^j(M)$ — пространство гладких дифференциальных форм степени j на M, а d^j — оператор внешнего дифференцирования. Еще в 50-е годы XX в. было показано, что на замкнутом римановом многообразии пространство когомологий изоморфно пространству гармонических форм. Оператор $*$ Ходжа на римановом многообразии позволил ввести на пространстве $D^j(M)$ дифференциальных форм степени j с компактным носителями, лежащими в $\operatorname{Int} M$, скалярное произведение $\langle \omega, \theta \rangle = \int\limits_M \omega \wedge *\theta$, пополнение пространства $D^j(M)$ относительно которого совпадает с гильбертовым пространством $L^2(M, \Lambda^j)$ дифференциальных форм степени j на M, удовлетворяющих условию $\|\omega\|_2^2 = \int\limits_M \omega \wedge *\omega < \infty$.

При этом оператор внешнего дифференцирования $d : D^j(M) \to D^{j+1}(M)$ можно расширить до замкнутого оператора, заданного на подпространстве пространства $L^2(M, \Lambda^j)$. Именно, будем считать, что форма φ лежит в области определения оператора d, если и только если существует последовательность $\{\varphi_\nu\}$ C^∞-форм такая, что φ_ν и $d\varphi_\nu$ сходятся в норме $\|\cdot\|_2$. Положим $d\varphi = \lim\limits_{\nu\to\infty} d\varphi_\nu$.

В 1976 г. М. Атья впервые определил L_2-когомологии риманова многообразия и положил начало их использованию для изучения некомпактных римановых многообразий и римановых многообразий с особенностями. В настоящее время число работ, посвященных L_2-когомологиям, очень велико. Весьма важные результаты содержатся в работах М. Гаффни, Дж. Доджика, Дж. Чигера, М. Громова, В. Мюллера, С. Цукера, Дж. Лотта, В. Люка, Т. Шика, Ж. Каррона и других авторов.

В начале 80-х годов XX в. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов и И. А. Шведов начали исследование L_p-дифференциальных форм на римановых многообразиях при произвольном $p \in [1, \infty]$. Ими были введены пространства $\Omega^*_{p,q}$ $(W^*_{p,q})$ тех форм из L^p, у которых обобщенный внешний дифференциал (в смысле потоков де Рама) лежит в L^q, и определены $L_{p,q}$-когомологии риманова многообразия M как факторпространство пространства L^q-коциклов по подпространству L^q-коциклов, которые являются дифференциалами L_p-форм. При $p = q$ вместо $\Omega^*_{p,p}$ используют обозначение Ω^*_p и говорят об L_p-когомологиях. Существенное отличие от случая L^2 здесь состоит в том, что при $p \neq 2$ L_p-формы (как и L_p-функции) образуют относительно L_p-нормы банахово, а не гильбертово пространство, что делает методы исследования $L_{p,q}$-когомологий принципиально иными.

L^p-теория дифференциальных форм на римановых многообразиях была развита в ряде работ В. М. Гольдштейна, В. И. Кузьминова и И. А. Шведова. Ими была решена поставленная Уитни проблема построения теории интегрирования L^p-форм по k-мерным поверхностям, исследованы возникающие в связи с изучением L_p-когомологий вопросы нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования, получены различные теоремы об аппроксимации дифференциальных форм, вариант формулы Кюннета для L_p-когомологий $(1 < p < \infty)$ искривленного произведения римановых многообразий (впоследствии обобщенный К. В. Сторожуком и И. А. Шведовым на липшицевы римановы многообразия и $p = 1, \infty$).

П. Пансю, М. Громов и Г. Элек распространили использование L^p-методов на графы, «звездно ограниченные» симплициальные комплексы, и, в частности, на конечнопорожденные дискретные группы (с помощью рассмотрения графа Кэли). L_p-когомологии счетной дискретной или топологической группы G определяются как непрерывные групповые когомологии группы G с коэффициентами в банаховом модуле $L^p(G)$. Из-за интересных связей одномерных L_p-когомологий со свойствами конечнопорожденной группы (концы группы, аменабельность, действия группы на банаховых пространствах) когомологические L^p-методы в теории групп в последние годы получили активное развитие (М. Бурдон, Ф. Мартен, А. Валетт, М. Бурдон и др.). Недавно Р. Тессера доказал, что групповые L_p-когомологии связной группы Ли совпадают с L_p-когомологиями этой группы как многообразия. Наряду с пространствами L^p на локально компактных группах интерес вызывают также пространства Орлича L^Φ, позволяющие давать более развитые характеризации свойств группы. Пространства Орлича на локально компактных топологических группах рассматривались И. Бундом, А. Каминьской и Й. Муселяком, а также совсем недавно М. М. Рао, И. Акбарбаглу и С. Магсуди.

Помимо упомянутых выше работ, L_p-когомологии при $p \neq 2$ рассматривались в работах Д. Александру Ружины, Л. Бирбрайра и В. М. Гольдштейна, Ж. Каррона, Т. Кулона и Э. Хассела, М. Шайе и Н. Лооуэ, Й. Эйххорна, П. Пансю, К. В. Сторожука, Н. Еганефара, Б. Юсина, С. Цукера.

В последние 15 лет В. М. Гольдштейн и М. Троянов обратили внимание на $L_{p,q}$-когомологии римановых многообразий. Они показали нетривиальность двумерных $L_{p,q}$-когомологий группы SOL при всех p и q, а также обнаружили связь между $L_{p,q}$-когомологиями риманова многообразия с выполнением на нем неравенства Соболева для дифференциальных форм. Ими также была установлена двойственность Гёльдера–Пуанкаре для редуцированных $L_{p,q}$-когомологий. $L_{p,q}$-когомологии также изучались С. К. Водопьяновым и Сян-Дун Ли.

Подобно функциональным пространствам Орлича, пространства Орлича L^{Φ} дифференциальных форм являются естественным обобщением пространств L^p. Пространства Орлича дифференциальных форм на областях в $\mathbb{R}^n$ были впервые рассмотрены Т. Иванцом и Г. Мартином, а затем Р. Агарвалом, С. Дингом и П. Нолдером. Иванец и Мартин также установили теорему типа Рисса для пространств Орлича дифференциальных форм на области в $\mathbb{R}^n$. Пространства Орлича дифференциальных форм на римановых многообразиях, по-видимому, были впервые рассмотрены в совместной работе автора с Р. А. Паненко в 2015 г., где были введены и изучены операторы регуляризации де Рама для пространств дифференциальных форм, а также М. Карраско Пьяджо (2017).

Предположим, что многообразие M представлено в виде объединения двух замкнутых множеств M_1 и M_2, причем M_1 и M_2 — гладкие n-мерные подмногообразия, а $M_1 \cap M_2$ — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие M, $M_1 \cap M_2 \subset \operatorname{Int} M$. Пусть $\psi^j : \Omega_p^j(M) \to \Omega_p^j(M_1)$ — оператор ограничения j-форм, которые лежат в L_p вместе с дифференциалом, с многообразия M на M_1, а $\varphi^j : \Omega_{p,0}^j(M_2) \to \Omega_p^j(M)$ — оператор продолжения нулем с M_2 на M. (Здесь $\Omega_{p,0}^j(M_2)$ — замыкание пространства $D^j(M_2)$ в норме пространстве $\Omega_p^j(M_2)$). Эти операторы перестановочны с дифференциалами и образуют точную последовательность комплексов

$$0 \to \Omega_{p,0}(M_2) \stackrel{\varphi}{\to} \Omega_p(M) \stackrel{\psi}{\to} \Omega_p(M_1) \to 0.$$

Этой точной последовательности комплексов соответствует точная последовательность L_p-когомологий

$$\cdots \to H_p^{j-1}(M_1) \xrightarrow{\delta^{j-1}} H_{p,c}^j(M_2) \xrightarrow{H^j\varphi} H_p^j(M) \xrightarrow{H^j\psi} H_p^j(M_1) \longrightarrow \ldots$$

и полуточная последовательность редуцированных когомологий

$$\ldots \longrightarrow \overline{H}_p^{j-1}(M_1) \xrightarrow{\overline{\delta}^{j-1}} \overline{H}_{p,c}^j(M_2) \xrightarrow{\overline{H}^j\varphi} \overline{H}_p^j(M) \xrightarrow{\overline{H}^j\psi} \overline{H}_p^j(M_1) \longrightarrow \ldots . \qquad (0.1)$$

(Под *полуточностью* последовательности всюду далее имеется в виду, что композиция любых двух ее последовательных морфизмов равна нулю.) Здесь символ $H_{p,c}^j$ ($\overline{H}_{p,c}^j$) обозначает L_p-когомологии (соответственно, редуцированные L_p-когомологии) с компактным носителем. Возникает естественный вопрос: когда последовательность (0.1) является точной? Этот вопрос исследовали В. И. Кузьминов и И. А. Шведов для точной последовательности

$$0 \to A \stackrel{\varphi}{\to} B \stackrel{\psi}{\to} C \to 0$$

произвольных банаховых комплексов, компоненты которых суть банаховы пространства, а дифференциалы — замкнутые линейные операторы. Эти авторы изучили, как влияет на точность последовательности редуцированных когомологий предположение о нормальной разрешимости дифференциалов одного из комплексов A, B или C.

Категория $\mathcal{B}an$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов не является абелевой, что существенно затрудняет использование в ней стандартных методов гомологической алгебры. Эта ситуация типична для практически всех известных аддитивных категорий функционального анализа. Поэтому весьма важным является развитие понятий и методов, используемых при изучении абелевых категорий, на более широкие классы аддитивных категорий.

Категория $\mathcal{B}an$ представляет собой пример *квазиабелевой категории.* Аддитивная категория с ядрами и коядрами называется *квазиабелевой*, если она удовлетворяет следующим условиям: (а) если коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{0.2}$$

коуниверсален, то из того, что β — коядро, следует, что α — коядро и (б) если квадрат (0.2) универсален и α — ядро, то β — ядро.

Первые шаги в развитии гомологической алгебры в неабелевых аддитивных категориях были сделаны А. Хеллером, Н. Йонедой, К. Бэникэ и Н. Попеску, М. Журкеску и Н. Ласку.

Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивная категория. Пусть в $\mathcal{A}$ выполнена следующая аксиома.

Аксиома 1. *Каждый морфизм α имеет ядро $\operatorname{Ker}\alpha$ и коядро $\operatorname{Coker}\alpha$.*

Такие категории обычно называют *предабелевыми.* В предабелевой категории $\mathcal{A}$ всякий морфизм α допускает каноническое разложение $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$, где $\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha$. По определению категория $\mathcal{A}$ абелева тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha}$ — изоморфизм.

В 70-е годы XX в. Ф. Ричмен и Э. Уокер и А. В. Яковлев ввели функторы Ext в предабелевой категории. В 1991–94 гг. А. И. Генералов рассматривал производные категории и Ker-Coker-последовательность для предабелевой категории.

Многие важные категории функционального анализа и топологической алгебры удовлетворяют следующей аксиоме.

Аксиома 2. *Для всякого морфизма α морфизм $\bar{\alpha}$ является биморфизмом, т. е. мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно.*

К. Бэникэ и Н. Попеску ввели класс аддитивных категорий, удовлетворяющих аксиомам 1 и 2, и назвали их «предабелевыми». Позже (независимо) такие категории были рассмотрены В. П. Паламодовым (в связи с изучением категории локально выпуклых пространств) и В. Румпом. Оба автора назвали эти категории *полуабелевыми.*

В данной работе мы называем полуабелевы категории в смысле Паламодова–Румпа *P-полуабелевыми*, поскольку термин «полуабелевы категории» в последние годы прочно укоренился в литературе в совершенно ином, неаддитивном контексте (полуабелевы категории Джанелидзе–Марки–Толена).

В работе Л. Грюзона в 1966 г. использовались квазиабелевы категории Йонеды, но уже в предположении наличия ядер и коядер. В том же 1966 г. в работе М. Журкеску эти категории были названы «предабелевыми». В 1969 г. Д. А. Райков ввел класс «полуабелевых» категорий, который, как показали В. И. Кузьминов и А. Ю. Черевикин, совпадает с классом квазиабелевых категорий. Квазиабелевы категории также рассматривала Р. Суччи Кручани, которая отметила их совпадение с «предабелевыми» категориями Журкеску. В 1999-2000 гг. Ф. Просманс и Ж. -П. Шнайдерс построили производную категорию квазиабелевой категории $\mathcal{A}$ и ввели ее две канонические t-структуры, рассмотрели проблему взятия производного функтора аддитивного функтора между квазиабелевыми категориями, функторы индуктивного и проективного предела, пучки с коэффициентами в квазиабелевой категории. В. Румп изучал квазиабелевы категории под названием «почти абелевы» (almost abelian). В 2001 г. он подробно изучил структуру квазиабелевых категорий и, в частности, показал, что квазиабелевы категории — это в точности классы объектов кручения или классы объектов, свободных от кручения, в подходящей абелевой категории с заданной на ней теорией кручения. Этот же результат был доказан в 2003 г. А. Бондалом и М. ван ден Бергом. Квазиабелевы категории также рассматривались Т. Бюлером, М. Касиварой, А. Ю. Пирковским. Автором совместно с В. И. Кузьминовым рассматривались вопросы точности Ker-Coker-последовательности и гомологической последовательности в квазиабелевый категориях; подобными вопросами занимался М. Грандис в неаддитивном контексте, в изобретенном им классе «гомологических» категорий, включающем в себя квазиабелевы категории.

Класс квазиабелевых категорий содержит, кроме всех абелевых категорий, многие категории функционального анализа и топологической алгебры. Категории (всех или только хаусдорфовых) топологических абелевых групп, топологических векторных пространств, локально выпуклых пространств, пространств Фреше, нормированных пространств, банаховых пространств, фильтрованных абелевых групп, абелевых групп без кручения — типичные примеры квазиабелевых категорий. Существенное отличие уже квазиабелевых категорий от абелевых заключается в том, что стандартные диаграммные леммы, справедливые в абелевых категориях, в квазиабелевых категориях выполняются при дополнительных предположениях о морфизмах, образующих диаграмму, которые обычно сводятся к требованию строгости этих морфизмов. Морфизм α в предабелевой категории называется *строгим*, если в его каноническом разложении $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$ $\quad\bar{\alpha}$ — изоморфизм. Как правило, в квазиабелевых подкатегориях категории хаусдорфовых топологических векторных пространств (а также в категории хаусдорфовых топологических абелевых групп) морфизм α является строгим тогда и только тогда, когда его теоретико-множественный образ замкнут и он является открытым отображением на свой образ. Из теоремы Банаха об открытых отображениях вытекает, что в категории $\mathcal{B}an$ банаховых пространств и ограниченных линейных операторов строгость означает просто замкнутость образа (т. е. нормальную разрешимость). Когомологии коцепного комплекса $\mathfrak{A}$ в категории $\mathcal{B}an$ представляют собой редуцированные когомологии банахова комплекса $\mathfrak{A}$.

Еще Д. А. Райкову было известно, что любая квазиабелева категория является P-полуабелевой. Д. А. Райков полагал, что верно и обратное (назовем это *гипотезой Райкова*). Лишь 2008 г. В. Румпом был построен явный и весьма нетривиальный алгебраический контрпример к этому предположению. Другой пример (категории борнологических и ультраборнологических локально выпуклых пространств) можно получить из результата 2006 г. Х. Бонета и С. Дирольф. Недавно В. Румп показал, что категории борнологических и бочечных локально выпуклых пространств являются естественными примерами P-полуабелевых категорий. Это дает основания для детального исследования этого класса категорий. В 2012 г. Й. Венгенрот объяснил, что гипотеза Райкова неверна по естественным и глубоким причинам, которые были известны еще в 1970-х годах (работы С. Дирольф).

При изучении стандартных диаграммных лемм в предабелевых и P-полуабелевых категориях приходится накладывать не только условия строгости на морфизмы диаграмм, но и условия стабильности некоторых коядер относительно коуниверсальных квадратов и некоторых ядер относительно универсальных квадратов. Это соответствует подходу А. И. Генералова.

Среди работ, касающихся вопросов гомологической алгебры, связанных с задачами функционального анализа, отметим также результаты А. Я. Хелемского и С. С. Акбарова о гомологиях банаховых и стереотипных алгебр и работы Н. Монода и Г. А. Носкова, где, в частности, исследована возможность построения спектральной последовательности Линдона – Хохшильда – Серра для ограниченных когомологий дискретных групп (Носков) и ограниченных непрерывных когомологий локально компактных групп, удовлетворяющих второй аксиоме счетности (Монод).

Цели и задачи. Работа посвящена исследованию некомпактных римановых многообразий и топологических групп с помощью методов пространств Лебега и Орлича, а также связанных с этим вопросов гомологической алгебры в различных классах аддитивных категорий, встречающихся в функциональном анализе.

Основными целями диссертационной работы являются разработка диаграммных и гомологических методов исследования предабелевых подкатегорий категории локально выпуклых пространств и получение новых условий нетривиальности $L_{p,q}$-когомологий различных важных модельных римановых многообразий и одномерных когомологий Орлича дискретных и топологических групп, а также установление основных свойств, связанных с двойственностью, пространств Орлича дифференциальных форм и когомологий Орлича римановых многообразий. Основное внимание уделяется категориям $\mathcal{B}an$ банаховых пространств и категория $\mathcal{F}re$ пространств Фреше (квазиабелев случай) и категориям $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$ не обязательно хаусдорфовых бочечных и борнологических локально выпуклых пространств соответственно (P-полуабелев случай).

В связи с этим решаются следующие задачи.

1. Изучить условия, обеспечивающие выполнение классических диаграммных теорем в категориях бочечных и борнологических локально выпуклых пространств, а также вывести обобщения этих теорем в категориях банаховых пространств и пространств Фреше.

2. Исследовать вопрос о связи $L_{p,q}$-когомологий искривленных и скрученных цилиндров со свойствами скручивающей функции и свойства одномерных $L_{p,q}$- и L_Φ-когомологий для групп Ли и топологических групп. Построить теорию двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и своевременно опубликованы.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер.

Полученные результаты о точности Ker-Coker-последовательности и когомологической последовательности в категории бочечных локально выпуклых пространств $\mathcal{B}ar$ и категории борнологических локально выпуклых пространств $\mathcal{B}or$ проясняют условия, необходимые для работы с гомологиями для случая общих комплексов таких пространств. Результаты о спектральной последовательности точной пары в категориях $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$ показывают, что возможность построения спектральной последовательности в этих и других категориях накладывает весьма жесткие ограничения на исходные данные. Использованные методы гомологической алгебры в P-полуабелевых категориях позволяют получить аналогичные результаты для других подкатегорий категории локально выпуклых пространств $\mathcal{LCS}$.

Искривленные цилиндры часто выступают в качестве «концов» многообразий на бесконечности, а тривиальность $L_{p,q}$-когомологий связана с выполнением неравенства Соболева для дифференциальных форм. Поэтому результаты об $L_{p,q}$-когомологиях искривленных и скрученных цилиндров, полученные в диссертации, демонстрируют причины выполнения или невыполнения неравенства Соболева в зависимости от поведения риманова многообразия на бесконечности.

Результаты о пространствах Орлича на дискретных группах показывают, что в случае выполнения для соответствующей N-функции Φ Δ_2 и ∇_2-условия (и тем самым ее не более чем степенного роста) одномерные ℓ_Φ-когомологии ведут себя, как ℓ_p-когомологии. Это подсказывает, что для различения бесконечных групп с тривиальными ℓ_p-когомологиями следует привлекать пространства Орлича ℓ^Φ с $\Phi \notin \Delta_2$.

Полученные теоремы двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и двойственность Гёльдера–Пуанкаре для редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае позволяют развить вычисления когомологий Орлича для различных классов многообразий. Результат об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве Морса–Трэнсю носит важный характер общего утверждения о двойственности в рамках пространств Орлича в нерефлексивном случае. Полученные условия тривиальности когомологий Орлича для гиперболической плоскости и шара означают выполнение теорем вложения для пространств дифференциальных форм.

Результаты работы могут быть использованы в спецкурсах для студентов университета, специализирующихся в области функционального анализа, анализа на многообразиях, гомологической алгебры.

Методология и методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования используют результаты и методы гомологической алгебры в аддитивных и предабелевых категориях, теории пространств Соболева на интервале вещественной оси, L^p-теории дифференциальных форм на римановых многообразиях, функционального анализа, теории представлений локально компактных топологических групп, теории интегрирования на таких группах, теории пространств Орлича.

Положения, выносимые на защиту, таковы.

1. Разработаны категорные методы исследования предабелевых и P-полуабелевых подкатегорий категории локально выпуклых пространств. Эти методы позволили установить для категорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств: достаточные условия точности Ker-Coker-последовательности и (ко)гомологической последовательности, соответствующей короткой строго точной последовательности комплексов; леммы о пяти и девяти гомоморфизмах; условия возможности построения спектральной последовательности точной пары. Для банаховых пространств и пространств Фреше исследованы некоторые обобщения Ker-Coker-последовательности.

2. Получены условия нетривиальности $L_{p,q}$-когомологий искривленного цилиндра в терминах двухвесового неравенства Харди на полуинтервале и, как приложение, необходимые условия нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на поверхности вращения в $\mathbb{R}^{n+2}$. Найдены условия тривиальности редуцированных и нередуцированных $L_{p,q}$-когомологий скрученного цилиндра. Доказано, что при $p < q$ одномерные $L_{p,q}$-когомологии общей группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ бесконечномерны.

3. Найден новый критерий аменабельности для замкнутой подгруппы локально компактной группы в терминах ее действия на пространстве Орлича самой группы, а также новый критерий аменабельности однородного пространства. Установлена связь одномерных когомологий Орлича дискретной группы с наличием неаменабельной подгруппы.

4. Развита теория двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае, а также в общем случае описаны линейные непрерывные функционалы на замыкании подпространства гладких форм с компактным носителем (пространстве Морса–Трэнсю) в пространстве Орлича. Изучены когомологии Орлича некоторых модельных многообразий.

Степень достоверности результатов проведенного исследования. Достоверность представленных результатов подтверждена подробными доказательствами.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы докладывались на всероссийских и международных конференциях: на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 2004), на Российской конференции «Математика в современном мире», посвященной 50-летию Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2007), на Конференции–школе по уравнениям в частных производных и анализу на сингулярных пространствах (Бонн, Германия, 2008), на Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008), Международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии» (Новосибирск, 2009), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2010, 2011), Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (2012, 2013, 2014, 2016, 2017, 2018, 2019), Международной конференции по геометрическому анализу в честь 90-летия Ю. Г. Решетняка (2019), а также докладывались в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН (рук. — акад. Ю. Г. Решетняк), на семинарах «Геометрия, топология и их приложения» (рук. — акад. РАН И. А. Тайманов), «Инварианты трехмерных многообразий» (рук. — чл.-корр. РАН А. Ю. Веснин, проф. А. Д. Медных), в Московском государственном университете на семинаре «Алгебры в анализе» (рук. — проф. А. Я. Хелемский и доц. А. Ю. Пирковский), в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» на семинаре «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия» (рук. — доц. А. Ю. Пирковский), на семинаре кафедры математического анализа и теории функций Российского университета дружбы народов (рук. — проф. В. И. Буренков), на семинаре в Национальном исследовательском Томском государственном университете, на семинарах университетов Лилля, Нанта, Сержи-Понтуаз, Париж-XI (Франция), университетов Бонна, Штутгарта, Потсдама, Падерборна (Германия), Свободного университета Брюсселя (VUB) (Бельгия), Федеральной политехнической школы Лозанны (Швейцария), Университета Бен-Гуриона (Беэр-Шева, Израиль).

Публикации по теме исследования. По теме диссертации автором опубликована 21 работа [1]– [21] в российских и иностранных журналах, рекомендованных ВАК. Работа [6] написана автором совместно с В. И. Кузьминовым, работы [11] и [15] — с С.-А. Вегнером, работы [17, 20, 21] — с В. М. Гольдштейном. Вклад соавторов в эти работы равен и неделим. Из статьи [16], совместной с Р. А. Паненко, автор включил в диссертацию только результаты, полученные им единолично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Она изложена на 281 странице текста, список литературы содержит 211 наименований.

Подробное описание результатов диссертации.

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые, в свою очередь, подразделяются на параграфы. Нумерация теорем, лемм, следствий, примеров, замечаний и формул сквозная в каждой главе и состоит из двух цифр: первая цифра — номер главы, вторая — порядковый номер внутри главы.

Во **введении** дается обзор современного состояния вопросов, изучаемых в диссертации и описываются результаты, составляющие ее основное содержание.

В **Главе 1** рассматриваются вопросы точности Ker-Coker-последовательности и длинной последовательности (ко)гомологий, соответствующей короткой строго точной последовательности комплексов в P-полуабелевых категориях бочечных и борнологических локально выпуклых пространств (ЛВП).

Результаты главы 1 опубликованы в [1, 3, 6, 7, 9–13, 15].

В § 1.1 вводятся определения и формулируются известные свойства предабелевых, P-полуабелевых и квазиабелевых категорий.

В. Румпу принадлежит понятие односторонней полуабелевости: предабелева категория называется *полуабелевой слева* (соответственно, *полуабелевой справа*, если для любого морфизма α соответствующий морфизм $\bar{\alpha}$ есть мономорфизм (соответственно, эпиморфизм). В § 1.1 представлена полученная совместно с С. А. Вегнером (при равнозначном вкладе соавторов) характеристика P-полуабелевости (Теорема 1.1).

В § 1.2 вводятся основные классы локально выпуклых пространств, о которых ведется речь в главе 1:

— категория $\mathcal{B}or$ борнологических ЛВП;
— категория $\mathcal{B}ar$ бочечных ЛВП;
— категория $\mathcal{B}an$ банаховых пространств;
— категория $\mathcal{F}re$ пространств Фреше.

§ 1.3 посвящен следующим вопросам.

Лемма о змее, являющаяся одним из ключевых утверждений гомологической алгебры в абелевых категориях, в более общем контексте предабелевых категорий (и, в частности, во многих важных категориях функционального анализа) не выполняется без дополнительных предположений о морфизмах исходной диаграммы. Причина состоит в том, что ядра (соответственно, коядра) в предабелевой категории вообще говоря не являются стабильными относительно универсальных (соответственно, коуниверсальных) квадратов.

Вопрос о точности Ker-Coker-последовательности рассматривался несколькими авторами в различных классах аддитивных категорий (Т.Бюлер, А.И.Генералов, Н.В.Глотко, В.И.Кузьминов, Я.А.Копылов), а также в некоторых классах неаддитивных категорий (Ф. Борсё и Д. Бурн, М. Грандис). Ключевыми для ее точности в различных членах свойствами морфизмов в исходной диаграмме являются строгость и стабильность некоторых мономорфизмов (эпиморфизмов) относительно универсальных (коуниверсальных) квадратов или их более слабые аналоги «точность» и «модулярность» в смысле М. Грандиса.

Даже существование связывающего морфизма в Ker -Coker -последовательности, имеющее место в абелевых категориях (и даже в квазиабелевых категориях (Копылов–Кузьминов) и их неаддитивном аналоге, гомологических категориях), не гарантировано в общих предабелевых категориях без дополнительных условий полустабильности (Генералов). Конструкция А. И. Генералова связывающего морфизма использует предабелеву версию леммы о двух квадратах Фэя–Харди–Хилтона.

Ядро g в предабелевой категории называется *полустабильным*, если во всяком универсальном квадрате вида (0.2) f также является ядром. *Полустабильное коядро* определяется двойственным образом.

Лемма о двух квадратах.[1]. *Пусть в следующей аддитивной диаграмме в предабелевой категории строки точны:*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' \end{array} \tag{1.4}$$

Пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{\sigma} & C \\ {\scriptstyle\sigma'}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' \end{array} \tag{1.5}$$

коуниверсален, и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{\tau'} & Q \end{array} \tag{1.6}$$

универсален. Тогда:

(i) существует единственный морфизм $\theta : Q \to B'$ такой, что $\theta\tau = \beta$, $\theta\tau' = \psi'$;

(ii) существует единственный морфизм $\rho : B \to Q'$ такой, что $\sigma\rho = \varphi$, $\sigma'\rho = \beta$;

(iii) существует единственный морфизм $\eta : Q \to Q'$ такой, что $\eta\tau = \rho$, $\sigma'\eta = \theta$, $\sigma\eta\tau' = 0$.

Доказательство этого факта дано Фэем, Харди и Хилтоном в ([1]) для абелевых категорий, но остается в силе в любой предабелевой категории. Лемма о двух квадратах Фэя–Харди–Хилтона утверждает также,

[1] Fay T.H., Hardie K.A., Hilton P.J. The two-square lemma // Publ. Mat. 1989. Vol. 33, № 1. P. 133–137.

что *если* ψ' *— мономорфизм, то* η *— мономорфизм* и *если* φ *— эпиморфизм, то* η *— эпиморфизм.*

В 1994 г. А. И. Генералов доказал, что если в диаграмме вида (1.4) в предабелевой категории ψ' — полустабильное ядро и φ — полустабильное коядро, то η — изоморфизм.

Мы исследуем вопрос о том, когда η является мономорфизмом, эпиморфизмом, ядром или коядром в предабелевой категории (в частности, в любой предабелевой подкатегории категории локально выпуклых пространств).

Теорема 1.4. *Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками вида* (1.4) *в предабелевой подкатегории категории локально выпуклых пространств. Сохраним обозначения леммы о двух квадратах. Справедливы следующие утверждения.*

(i) Если ψ' *— полустабильное ядро и в каноническом разложении* $\varphi = (\operatorname{im}\varphi)\bar{\varphi}\operatorname{coim}\varphi$ *морфизма* φ *морфизм* $\bar{\varphi}$ *есть мономорфизм, то* η *— мономорфизм.*

Если φ *— полустабильное коядро и в каноническом разложении* $\psi' = (\operatorname{im}\psi')\bar{\psi}'\operatorname{coim}\psi'$ *морфизма* ψ' *морфизм* $\bar{\psi}'$ *есть эпиморфизм, то* η *— эпиморфизм.*

(ii) Если ψ' *и* $\operatorname{im}\varphi$ *— полустабильные ядра и морфизм* φ *строгий, то* η *— полустабильное ядро.*

Если φ *и* $\operatorname{coim}\psi'$ *— полустабильные коядра и морфизм* ψ' *строгий, то* η *— полустабильное коядро.*

Также сформулировано следствие этой теоремы для P-полуабелевых подкатегорий категории $\mathcal{LCS}$ и, в частности, категорий $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$.

В § 1.4 исследуется вопрос о точности Ker-Coker-последовательности в категориях $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$. Рассматривается коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & & \end{array} \tag{1.18}$$

$\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$. Диаграмме (1.18) соответствуют две полуточные части Ker-Coker-последовательности

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma; \tag{1.19}$$

$$\operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{1.20}$$

Предположим теперь, что ψ_0 — полустабильное коядро или φ_1 — полустабильное ядро. Тогда определен связывающий морфизм (непрерывный оператор) $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, объединяющий (1.19) и (1.20) в Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{1.21}$$

В данном параграфе доказываются следующие теоремы о точности последовательностей (1.19), (1.20) и (1.21) в категориях $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$.

Теорема 1.6. *Для диаграммы* (1.18), *образованной борнологическими (или бочечными) локально выпуклыми пространствами и непрерывными линейными операторами, справедливы следующие утверждения*:

1) *если в диаграмме* (1.18) ψ_0 *и* $\operatorname{coker}\alpha$ *— полустабильные коядра и* β *— открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.21) *точна в члене* $\operatorname{Coker}\alpha$;

2) *если в* (1.18) φ_1 *и* $\ker\gamma$ *— полустабильные ядра и* β *— открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.21) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\gamma$.

Теорема 1.7. *Для категорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств справедливы следующие утверждения*:

1) *если в диаграмме* (1.18) φ_0 *— открытый оператор на свой образ,* $\ker\alpha$ *— полустабильное ядро, то последовательность* (1.19) *точна; если в* (1.18) α *— открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.19) *точна;*

2) *если в диаграмме* (1.18) ψ_1 *— открытый оператор на свой образ,* $\operatorname{coker}\gamma$ *— полустабильное коядро, то последовательность* (1.20) *точна; если в* (1.18) γ *— открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.20) *точна.*

Теорема 1.8. *Если в диаграмме* (1.18), *образованной борнологическими (или бочечными) локально выпуклыми пространствами и непрерывными линейными операторами,* α *— открытый оператор на свой образ и* $\ker\gamma$ *и* φ_1 *— полустабильные ядра, то последовательность* (1.21) *точна в членах* $\operatorname{Ker}\beta$ *и* $\operatorname{Ker}\gamma$. *Если* γ *— открытый оператор на свой образ и* $\operatorname{coker}\alpha$ *и* ψ_0 *— полустабильные коядра, то последовательность* (1.21) *точна в членах* $\operatorname{Coker}\beta$ *и* $\operatorname{Coker}\alpha$.

В § 1.5 обсуждается вопрос о существовании (ко)гомологий и точности длинной (ко)гомологической последовательности в категориях $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$.

Пусть $\mathcal{A}$ — предабелева категория.

Для последовательности вида
$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \tag{1.27}$$
со свойством $\psi\varphi = 0$ существуют естественный морфизм $\sigma : A \to \operatorname{Ker}\psi$ такой, что $\varphi = (\ker\psi)\sigma$, и естественный морфизм $\tau : \operatorname{Coker}\varphi \to C$ такой, что $\psi = \tau\operatorname{coker}\varphi$. Назовем объекты $H_-(B) = H_-(B, \varphi, \psi) = \operatorname{Coker}\sigma$ и $H_+(B) = H_+(B, \varphi, \psi) = \operatorname{Ker}\tau$ *левыми* и *правыми гомологиями последовательности* (1.27) *в члене* B.

Хорошо известно, что эти два вида гомологий совпадают для абелевых и квазиабелевых категорий категорий. Для P-полуабелевых категорий левые и правые гомологии оказываются изоморфными только при дополнительных условиях.

Существует единственный морфизм $m : H_-(B) \to H_+(B)$, такой, что
$$(\ker\tau)m\operatorname{coker}\sigma = (\operatorname{coker}\varphi)(\ker\psi).$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.14. *Пусть категория $\mathcal{A}$ P-полуабелева. Тогда морфизм $m : H_-(B) \to H_+(B)$ является биморфизмом. Если $\ker\psi$ — полустабильное ядро или $\operatorname{coker}\varphi$ — полустабильное коядро, то m — изоморфизм.*

Лемма 1.15. *Пусть категория предабелева. Если $\ker\psi$ — полустабильное ядро, то m — полустабильное ядро, и если $\operatorname{coker}\varphi$ — полустабильное коядро, то m — полустабильное коядро. Таким образом, если выполнены оба условия, то m — изоморфизм.*

Следствие 1.3. *Если категория $\mathcal{A}$ квазиабелева, то $m : H_-(B) \to H_+(B)$ — изоморфизм.*

Таким образом, в квазиабелевой категории для всякой последовательности (1.27) определен объект *гомологий* $H(B)$.

Справедливо в некотором смысле обратное утверждение к лемме 1.14:

Теорема 1.9. *Предположим, что в P-полуабелевой подкатегории $\mathcal{A}$ категории локально выпуклых пространств для всякой последовательности $A \overset{\varphi}{\to} B \overset{\psi}{\to} C$ такой, что $\psi\varphi = 0$, канонический морфизм $m : H_-(B,\varphi,\psi) \to H_+(B,\varphi,\psi)$ является изоморфизмом. Тогда категория $\mathcal{A}$ квазиабелева.*

Под (*коцепным*) *комплексом* $\mathfrak{A} = (A^n, d^n_A)_{n\in\mathbb{Z}}$ в аддитивной категории будем понимать последовательность

$$\ldots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \xrightarrow{d_A^{n+1}} \ldots$$

такую, что $d_A^{n+1} d_A^n = 0$ для всех n.

Пусть $\mathfrak{A} = (A^n, d^n_A)_{n\in\mathbb{Z}}$ — коцепной комплекс в предабелевой категории. Как отметили Н. В. Глотко и В. И. Кузьминов, при каждом $n \in \mathbb{Z}$ соотношения $d_A^{n+1}d_A^n = 0$ и $d_A^n d_A^{n-1} = 0$ влекут существование единственного морфизма $a^n_A : \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \to \operatorname{Ker} d_A^{n+1}$ со свойством

$$(\ker d_A^{n+1}) a_A^n (\operatorname{coker} d_A^{n-1}) = d_A^n. \tag{1.33}$$

Обозначим $\lambda_A^n = (\ker d_A^{n+1}) a_A^n$, $\rho_A^{n+1} = a_A^n \operatorname{coker} d_A^{n-1}$.

Положим

$$H^n_-(\mathfrak{A}) = H_-(A^n, d_A^{n-1}, d_A^n); \quad H^n_+(\mathfrak{A}) = H_+(A^n, d_A^{n-1}, d_A^n).$$

Как следует из вышесказанного,

$$H^n_-(\mathfrak{A}) = \operatorname{Coker}\rho^n_A = \operatorname{Coker}(a_A^{n-1}\operatorname{coker} d_A^{n-2}) = \operatorname{Coker} a_A^{n-1};$$
$$H^n_+(\mathfrak{A}) = \operatorname{Ker}\lambda^n_A = \operatorname{Ker}((\ker d_A^{n+1})a_A^n) = \operatorname{Ker} a_A^n.$$

Как и ранее, мы называем объекты $H^n_-(\mathfrak{A})$ и $H^n_+(\mathfrak{A})$ *левыми* и *правыми n-мерными когомологиями* коцепного комплекса $\mathfrak{A}$.

Всюду в дальнейших утверждениях § 1.5 объемлющая категория предполагается P-полуабелевой.

Морфизмом двух комплексов $\mathfrak{A} = (A^n, d_A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\mathfrak{B} = (B^n, d_B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ будем называть семейство морфизмов $(\varphi^n : A^n \to B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ такое, что $\varphi^{n+1} d_A^n = d_B^n \varphi^n$ при всех n. Для трех комплексов $\mathfrak{A} = (A^n, d_A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{B} = (B^n, d_B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\mathfrak{C} = (C^n, d_C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и морфизмов $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ в P-полуабелевой категории будем называть последовательность

$$0 \to \mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{C} \to 0$$

строго точной, если $\varphi^n \mid \psi^n$ при всех n.

Морфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ комплексов индуцирует морфизмы $\hat{\varphi}^n : \operatorname{Ker} d_A^n \to \operatorname{Ker} d_B^n$ и $\tilde{\varphi}^n : \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \to \operatorname{Coker} d_B^{n-1}$. Эти морфизмы определяются равенствами

$$(\ker d_B^n)\hat{\varphi}^n = \varphi^n \ker d_A^n; \quad \tilde{\varphi}^n \operatorname{coker} d_A^{n-1} = (\operatorname{coker} d_B^{n-1} \varphi^n).$$

Как и в квазиабелевом случае (Глотко–Кузьминов), короткой строго точной последовательности комплексов

$$0 \to \mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{C} \to 0 \tag{1.37}$$

в P-полуабелевой категории соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \operatorname{Coker} d_A^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}^n} & \operatorname{Coker} d_B^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}^n} & \operatorname{Coker} d_C^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle a_A^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle a_B^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle a_C^n}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_A^{n+1} & \xrightarrow{\hat{\varphi}^{n+1}} & \operatorname{Ker} d_B^{n+1} & \xrightarrow{\hat{\psi}^{n+1}} & \operatorname{Ker} d_C^{n+1} & &
\end{array} \tag{1.38}$$

Здесь $\tilde{\varphi}^n$, $\tilde{\psi}^n$, $\hat{\varphi}^{n+1}$ и $\hat{\psi}^{n+1}$ определены согласно (1.36), $\tilde{\psi}^n = \operatorname{coker} \tilde{\varphi}^n$ и $\hat{\varphi}^{n+1} = \ker \hat{\psi}^{n+1}$. Диаграмма (1.38) дает две полуточные последовательности: Ker-последовательность

$$H_+^n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_+^n(\varphi)} H_+^n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H_+^n(\psi)} H_+^n(\mathfrak{C}) \tag{1.39}$$

и Coker-последовательность

$$H_-^{n+1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_-^{n+1}(\varphi)} H_-^{n+1}(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H_-^{n+1}(\psi)} H_-^{n+1}(\mathfrak{C}). \tag{1.40}$$

Для категорий $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.11. *Если для короткой строго точной последовательности*

$$0 \to \mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{C} \to 0, \tag{1.37}$$

комплексов борнологических (или бочечных) локально выпуклых пространств ψ^n, $\operatorname{coker} d_B^{n-1}$, $\operatorname{coker} d_C^{n-1}$ *— полустабильные коядра или* φ^{n+1}, $\ker d_A^{n+1}$, $\ker d_B^{n+1}$ *— полустабильные ядра, то последовательности* (1.37) *соответствует полуточная последовательность когомологий*

$$\begin{aligned} &H_+^n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_+^n(\varphi)} H_+^n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H_+^n(\psi)} H_+^n(\mathfrak{C}) \\ &\xrightarrow{\Delta^n} H_-^{n+1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{H_-^{n+1}(\varphi)} H_-^{n+1}(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H_-^{n+1}(\psi)} H_-^{n+1}(\mathfrak{C}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Теорема 1.12. *Для короткой строго точной последовательности*

$$0 \to \mathfrak{A} \overset{\varphi}{\to} \mathfrak{B} \overset{\psi}{\to} \mathfrak{C} \to 0, \tag{1.37}$$

образованной комплексами борнологических (или бочечных) локально выпуклых пространств, гомологические последовательности (1.39) *и* (1.40) *имеют следующие свойства точности:*

(i) *если d_A^n — открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.39) *точна*;

(ii) *если d_C^n — открытый оператор на свой образ, то последовательность* (1.40) *точна.*

Теорема 1.13. *Пусть дана короткая точная последовательность комплексов* (1.37) *борнологических (или бочечных) локально выпуклых пространств, причем морфизмы φ и ψ комплексов в каждой размерности — открытые операторы на свои образы. Тогда соответствующая последовательность гомологий* (1.41) *обладает следующими свойствами точности*:

(i) *Предположим, что d_B^n — открытый оператор на свой образ.*

Если φ^{n+1}, $\ker d_A^{n+1}$, $\ker d_B^{n+1}$, $\ker d_C^n$ — полустабильные ядра, то последовательность (1.41) *точна в члене $H_+^n(C)$.*

Если ψ^n, $\operatorname{coker} d_B^{n-1}$, $\operatorname{coker} d_C^{n-1}$, $\operatorname{coker} d_A^n$ — полустабильные коядра, то последовательность (1.41) *точна в члене $H_-^{n+1}(A)$.*

(ii) *Предположим, что d_A^n — открытый оператор на свой образ и φ^{n+1}, $\ker d_A^{n+1}$, $\ker d_B^{n+1}$, $\ker d_C^n$ — полустабильные ядра. Тогда последовательность* (1.41) *точна в членах $H_+^n(B)$ и $H_+^n(C)$.*

Предположим, что d_C^n — открытый оператор на свой образ и ψ^n, $\operatorname{coker} d_B^{n-1}$, $\operatorname{coker} d_C^{n-1}$, $\operatorname{coker} d_A^n$ — полустабильные коядра. Тогда последовательность (1.41) *точна в $H_-^{n+1}(A)$ и $H_-^{n+1}(B)$.*

В § 1.6 мы рассматриваем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1, \end{array}$$

где $\psi_0\varphi_0 = 0$ и $\psi_1\varphi_1 = 0$, в категориях $\mathcal{B}an$ и $\mathcal{F}re$.

Устанавливаются достаточные условия точности возникающих Ker- и Coker-последовательности в терминах гомологий строк диаграммы.

Результат является обобщением на банаховы пространства и пространств Фреше результата Номуры.[2]

В § 1.7 мы исследуем инварианты Ламбека Ker и Im для коммутативных квадратов в категориях $\mathcal{B}an$ и $\mathcal{F}re$, а также более общем контексте квазиабелевых категорий. В этом параграфе получен вариант для банаховых пространств и пространств Фреше связанных с инвариантами Ламбека результатов Ламбека–Лейхта и Номуры, обобщающих лемму о змее.

В § 1.8 мы обобщаем варианты лемм о пяти и девяти гомоморфизмах в квазиабелевых категориях, доказанные Н. В. Глотко, на категории $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$ (теоремы 1.19, 1.20, 1.21). Доказательства опираются на идеи Н. В. Глотко и теоремы о точности Ker-Coker-последовательности в P-полуабелевой категории из § 1.4.

Теорема 1.19 [лемма о пяти гомоморфизмах]**.** *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & C_1 & \xrightarrow{\varphi_3} & D_1 & \xrightarrow{\varphi_4} & E_1 \\
{\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_3}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_4}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_5}\downarrow \\
A_2 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & C_2 & \xrightarrow{\psi_3} & D_2 & \xrightarrow{\psi_4} & E_2,
\end{array}$$

образованной борнологическими (или бочечными) локально выпуклыми пространствами и непрерывными линейными операторами, верхняя и нижняя строки полуточны и точны в C_1, D_1, C_2, D_2. Пусть, дополнительно, α_2 сюръективен, φ_3 — открытый оператор на свой образ, α_5 инъективен и α_4 — полустабильное коядро. Тогда α_3 сюръективен.

Справедливо и двойственное утверждение.

Теорема 1.20 [1-я лемма о девяти гомоморфизмах]**.** *Пусть диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\psi_1} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_2}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varphi_3} & C_2 & \xrightarrow{\psi_3} & C_3 & \longrightarrow & 0,
\end{array} \tag{1.60}$$

образованная борнологическими (или бочечными) локально выпуклыми пространствами и непрерывными линейными операторами, коммутативна, все ее строки точны, а все операторы φ_i и ψ_i открытые на свои образы.

Имеют место следующие утверждения:

---

[2] Nomura Y. An exact sequence generalizing a theorem of Lambek // Arch. Math. 1971. Vol. 22. P. 467–478.

1) *если последовательности* $0 \to A_2 \overset{\alpha_2}{\to} B_2 \overset{\beta_2}{\to} C_2$ *и* $0 \to A_3 \overset{\alpha_3}{\to} B_3 \overset{\beta_3}{\to} C_3$ *точны, причем* α_2 *и* α_3 *— открытые операторы на свои образы, то последовательность* $0 \to A_1 \overset{\alpha_1}{\to} B_1 \overset{\beta_1}{\to} C_1$ *точна и* α_1 *— открытый оператор на свой образ*;

2) *если* $\beta_2\alpha_2 = 0$, *последовательности* $0 \to A_1 \overset{\alpha_1}{\to} B_1 \overset{\beta_1}{\to} C_1$ *и* $0 \to A_3 \overset{\alpha_3}{\to} B_3 \overset{\beta_3}{\to} C_3$ *точны, причем* α_1 *и* α_3 *— открытые операторы на свои образы и* ψ_1 *— полустабильное коядро, то последовательность* $0 \to A_2 \overset{\alpha_2}{\to} B_2 \overset{\beta_2}{\to} C_2$ *точна, а* α_2 *— открытый оператор на свой образ*;

3) *если последовательности* $0 \to A_1 \overset{\alpha_1}{\to} B_1 \overset{\beta_1}{\to} C_1 \to 0$ *и* $0 \to A_2 \overset{\alpha_2}{\to} B_2 \overset{\beta_2}{\to} C_2 \to 0$ *точны, причем* α_1, α_2 *и* β_2 *— открытые операторы на свои образы,* β_1, ψ_1 *и* ψ_2 *— полустабильные коядра, а* φ_2 *— полустабильное ядро, то последовательность* $0 \to A_3 \overset{\alpha_3}{\to} B_3 \overset{\beta_3}{\to} C_3 \to 0$ *точна, причем* α_3 *и* β_3 *— открытые операторы на свои образы.*

Справедливо и двойственное утверждение (Теорема 1.21).

В § 1.9 мы рассматриваем возможность построения спектральной последовательности (взятия производной пары) точной пары в категориях $\mathcal{B}ar$ и $\mathcal{B}or$. Возможность построения производной пары для точной пары в установлена автором в квазиабелевой категории и в более общем, неаддитивном контексте «гомологических» категорий, М. Грандисом.

Точная пара в категории $\mathcal{B}ar$ или категории $\mathcal{B}or$ — это точная последовательность вида

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd} \tag{1.61}$$

такая, что $\alpha(D) = \operatorname{Ker}\beta$, $\beta(D) = \operatorname{Ker}\gamma$ и $\gamma(E) = \operatorname{Ker}\alpha$.

В работе доказывается

Теорема 1.22. *Рассмотрим точную пару* (1.61) *в категории* $\mathcal{B}ar$ *или* $\mathcal{B}or$. *Предположим, что* α, β, γ *— открытые операторы на свой образ. Положим* $D_1 = \alpha(D)$, $\alpha_1 = \alpha|_{D_1}$. *Пусть также* $\partial = \beta\gamma$, $H^-(E,\partial) = E_1^-$ *и* $H^+(E,\partial) = E_1^+$. *Здесь* левые *и* правые когомологии *определены равенствами* $H^-(E,\partial) = \operatorname{Coker}(\theta\colon \operatorname{Im}\partial \to \operatorname{Ker}\partial)$ *и* $H^+(E,\partial) = \operatorname{Ker}(\tau\colon \operatorname{Coker}\partial \to \operatorname{Coim}\partial)$ *соответственно, где* θ *и* τ *— естественные отображения. Тогда определены естественные операторы* $\beta_1^- : E_1^- \to D_1$, $\gamma_1^- : E_1 \to D_1$ *и* $\beta_1^+ : E_1^+ \to D_1$, $\gamma_1^+ : E_1 \to D_1$, *причем точны следующие две диаграммы*:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1^-"] \\ & E_1^- \arrow[ul, "\gamma_1^-"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\beta_1^+"] \\ & E_1^+ \arrow[ul, "\gamma_1^+"] & \end{tikzcd} \tag{1.62}$$

которые мы назовем соответственно левой *и* правой производными парами *точной пары. Диаграммы* (1.62) *являются точными парами. Кроме того, существует канонический инъективный и сюръективный оператор* $\omega : E_1^- \to E_1^+$, *удовлетворяющий равенствам* $\omega\beta_1^- = \beta_1^+$, $\gamma_1^- = \gamma_1^+\omega$ *и* $(\ker\tau)\omega(\operatorname{coker}\theta) = (\operatorname{coker}\partial)(\ker\partial)$. *Оператор* ω *однозначно определяется третьим равенством и является изоморфизмом, если* $\ker\partial$ *— полустабильное ядро или* $\operatorname{coker}\partial$ *— полустабильное коядро.*

Теорема 1.23. *Предположим, что в точной паре* (1.61) *в категории борнологических (или бочечных) пространств* β *и* γ *— операторы, открытые на свой образ,* $\ker\gamma$ *— полустабильное ядро,* $\operatorname{coker}\beta$ *— полустабильное коядро. Если степени* α^k *являются операторами, открытыми на свой образ, для* $1 \leqslant k \leqslant n$, *то взятие производной пары в теореме* 1.22 *можно совершить* n *раз, что дает полное бинарное дерево глубины* n, *состоящее из точных пар.*

В § 1.10 обобщается одно утверждение, установленное В. И. Кузьминовым и И. А. Шведовым[3] для абелевых групп, на категории $\mathcal{B}an$ и $\mathcal{F}re$.

Глава 2 посвящена изучению $L_{p,q}$-когомологий римановых многообразий специального вида.

Результаты главы 2 опубликованы в [4, 5, 8, 17, 21].

В § 2.1 вводятся основные определения L^p-теории дифференциальных форм.

Пусть M — риманово многообразие. Для $1 \le p \le \infty$ и положительной непрерывной функции $\sigma : M \to \mathbb{R}$ обозначим символом $L^p(M, \Lambda^j, \sigma)$ банахово пространство измеримых форм степени j на M с конечной нормой

$$\|\omega\|_{L^p(M,\Lambda^j,\sigma)} = \begin{cases} \left\{\int_M |\omega(x)|^p \sigma^p(x)\,dx\right\}^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} |\omega(x)|\sigma(x), & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Здесь dx — элемент объема M и $|\omega(x)|$ — модуль внешней формы $\omega(x)$.

Обычным образом мы также определяем пространства $L^p_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^j)$.

Обозначим символом $D^j(M) = C_0^{\infty,j}(M)$ пространство гладких форм степени j на M, имеющих компактный носитель, содержащийся в $\operatorname{Int} M$. Дифференциальная форма $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^{j+1})$ называется (*обобщенным*) *дифференциалом* $d\omega$ формы $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^j)$, если

$$\int\limits_U \omega \wedge du = (-1)^{j+1} \int\limits_U \psi \wedge u$$

[3] Кузьминов В. И., Шведов И. А. Аддиционные формулы для редуцированных L_p-когомологий // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 380–388.

для всякой ориентируемой области $U \subset \operatorname{Int} M$ и всякой формы $u \in D^{\dim M-j-1}(M)$ с носителем в U.

Для двух весов σ_j, σ_{j+1} на M положим

$$\Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1}) = \{\omega \in L^p(M,\Lambda^j,\sigma_j) \mid d\omega \in L^q(M,\Lambda^{j+1},\sigma_{j+1})\}.$$

Пространство $\Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})$ снабдим нормой

$$\|\omega\|_{\Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})} = \|\omega\|_{L^p(M,\Lambda^j,\sigma_j)} + \|d\omega\|_{L^q(M,\Lambda^{j+1},\sigma_{j+1})}.$$

Если $p=q$, то часто более удобно рассматривать эквивалентную норму

$$\|\omega\|_{\Omega^j_p(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})} = \Big(\|\omega\|^p_{L^p(M,\Lambda^j,\sigma_j)} + \|d\omega\|^p_{L^p(M,\Lambda^{j+1},\sigma_{j+1})}\Big)^{1/p}.$$

Обозначим символом $\Omega^j_{p,q,0}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})$ замыкание пространства $D^j(M)$ в норме пространства $\Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})$.

Пусть дано произвольное подмножество $A \subset M$. Символом $\Omega^j_{p,q}(M,A,\sigma_j,\sigma_{j+1})$ обозначим замыкание в $\Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})$ подпространства, образованного всеми теми формами $\omega \in \Omega^j_{p,q}(M,\sigma_j,\sigma_{j+1})$, которые равны нулю в некоторой окрестности множества A (зависящей от ω).

Пусть $Z^j_q(M,\sigma_j)$ — подпространство $L^q(M,\Lambda^j,\sigma_j)$, состоящее из всех форм ω таких, что $d\omega=0$, и пусть

$$B^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)=\{\theta\in L^q(M,\Omega^j,\sigma_j) \mid \theta=d\psi, \text{ где } \psi\in L^p(M,\Lambda^{j-1},\sigma_{j-1})\}.$$

Пространства

$$H^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j) = Z^j_q(M,\sigma_j)/B^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j) \quad \text{и}$$
$$\overline{H}^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j) = Z^j_q(M,\sigma_j)/\overline{B}^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j),$$

где $\overline{B}^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)$ — замыкание подпространства $B^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)$ в $L^q(M,\Lambda^j,\sigma_j)$, называются j-мерными *$L_{p,q}$-когомологиями* и j-мерными *редуцированными $L_{p,q}$-когомологиями* риманова многообразия M *с весами σ_{j-1} и σ_j*. Факторпространство

$$T^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j) = \overline{B}^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)/B^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)$$

называют *$L_{p,q}$-кручением* многообразия M с данными весами. Ясно, что пространство $T^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)$ изоморфно замыканию нуля в $H^j_{p,q}(M,\sigma_{j-1},\sigma_j)$.

Относительные варианты введенных выше пространств вводятся аналогично.

Для $p=q$ мы пишем нижний индекс p вместо p,p. Если веса, использованные в определении соответствующего пространства, равны 1, мы будем их опускать.

Пусть Γ — замкнутое подпространство $\Omega^j_{p,q}(M)$, содержащее $\Omega^j_{p,q,0}(M)$.

Обозначим символом d_Γ замкнутый линейный оператор из $L^p(M,\Lambda^j)$ в $L^q(M,\Lambda^{j+1})$, совпадающий с оператором внешнего дифференцирования d на Γ. Для формы $\varphi \in d\Gamma$ все решения уравнения $dx=\varphi$, принадлежащие Γ, лежат в одном и том же классе эквивалентности $d_\Gamma^{-1}\varphi \in \Gamma/\operatorname{Ker} d_\Gamma$. Оператор $d_\Gamma^{-1} : d\Gamma \to L^p(M,\Lambda^j)/\operatorname{Ker} d_\Gamma$, заданный на подпространстве $d\Gamma$ пространства $L_q(M,\Lambda^{j+1})$, непрерывен, если и только если $d\Gamma$ замкнут на $L^q(M,\Lambda^{j+1})$. В этом случае оператор $d_\Gamma : L^p(M,\Lambda^j) \to L^q(M,\Lambda^{j+1})$ называется *нормально разрешимым*. В терминах $L_{p,q}$-кручения нормальная разрешимость d_Γ означает, что $T^j_{p,q}(M)=0$.

Известно, что оператор d_Γ нормально разрешим на компактном многообразии при $\Gamma \in \{\Omega^j_{p,q,0}(M), \Omega^j_{p,q}(M)\}$ и $\frac{1}{q}-\frac{1}{p} < \dim M$.

Задача о нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на римановых многообразиях была рассмотрена В. М. Гольдштейном, В. И. Кузьминовым, И. А. Шведовым, Дж. Чигером, М. Громовым, А. Байдером.

В § 2.2 изучаются весовые $L_{p,q}$-когомологии полуинтервала $[a,b)$ и получены условия их тривиальности в терминах констант Харди.

Как известно[4], справедлива

Лемма 2.1. *Предположим, что* $1 \le p,q \le \infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $\alpha,\beta \in [-\infty,\infty]$, $I_{\alpha,\beta}$ *есть интервал с концами* α *и* β, v_0 *и* v_1 *— положительные непрерывные функции на* $I_{\alpha,\beta}$. *Тогда для существования глобальной константы* C *такой, что*

$$\left|\int_\alpha^\beta \left|v_0(t)\int_\alpha^\tau g(t)dt\right|^p d\tau\right|^{1/p} \le C\left|\int_\alpha^\beta |v_1(t)g(t)|^q dt\right|^{1/q}$$

для всякой функции $g \in L^q(I_{\alpha,\beta}, v_1)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\chi_{p,q}(\alpha,\beta,v_0,v_1) < \infty$.

Здесь

$$\chi_{p,q}(\alpha,\beta,v_0,v_1) = \sup_{\tau \in I_{\alpha,\beta}} \left\{ \left|\int_\tau^\beta |v_0(t)|^p dt\right|^{1/p} \left|\int_\alpha^\tau |v_1(t)|^{-q'} dt\right|^{1/q'} \right\},$$

если $p \ge q$;

$$\chi_{p,q}(\alpha,\beta,v_0,v_1) = \left|\int_\alpha^\beta \left(\left|\int_\alpha^\tau |v_1(t)|^{-q'}dt\right|^{p-1} \left|\int_\tau^\beta |v_0(t)|^p dt\right| \right)^{\frac{q}{q-p}} |v_1(\tau)|^{-q'} d\tau \right|^{\frac{q-p}{pq}},$$

если $p < q$.

Если $p=1$ $(q'=\infty)$, *то соответствующий интеграл следует заменить на* $\operatorname{ess\,sup}$.

Константу $\chi_{p,q}(\alpha,\beta,v_0,v_1)$ будем называть *константой Харди*.

---

[4] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 415 с.

В § 2.3 результаты § 2.2 о весовых L_p-когомологиях полуинтервала $[a,b)$ используются для изучения $L_{p,q}$-когомологий и $L_{p,q}$-кручения искривленного цилиндра $C^f_{a,b}$.

Под *искривленным произведением* $X \times_f Y$ двух римановых многообразий (X, g_X) и (Y, g_Y) *с искривляющей функцией* $f : X \to \mathbb{R}_+$ мы имеем в виду многообразие $X \times Y$, снабженное римановой метрикой $g_X + f^2(x) g_Y$. Если $X = [a,b)$ — полуинтервал вещественной оси, то $X \times_f Y$ называется *искривленным цилиндром.*

Пусть Y — ориентируемое многообразие размерности n, $C^f_{a,b}Y = [a,b) \times_f Y$. Положим $Y_a = \{a\} \times Y$. Вообще говоря, $C^f_{a,b}$ представляет собой липшицево риманово многообразие, но мы всюду для простоты будем предполагать, что $\partial Y = \varnothing$, чтобы многообразие $C^f_{a,b}$ было гладким. Этого будет достаточно для дальнейшего.

Теорема 2.3. *Пусть Y — ориентируемое n-мерное риманово многообразие, $\infty < a < b \leq \infty$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Предположим, что существует форма $\varphi \in Z^{j-1}_p(Y) \cap Z^{j-1}_q(Y)$ такая, что $\int_Y \varphi \wedge \gamma \neq 0$ для некоторой формы $\gamma \in D^{n-j+1}(Y)$, $d\gamma = 0$.*

Справедливы следующие утверждения:

1) *если $\chi_{p,q}(a, b, f^{\frac{n}{p}-j+1}, f^{\frac{n}{q}-j+1}) = \infty$, то $H^j_{p,q}(C^f_{a,b}Y, Y_a) \neq 0$;*

2) *если $\chi_{p,q}(a, b, f^{\frac{n}{p}-j+1}, f^{\frac{n}{q}-j+1}) = \infty$ и $\chi_{p,q}(b, a, f^{\frac{n}{p}-j+1}, f^{\frac{n}{q}-j+1}) = \infty$, то $T^j_{p,q}(C^f_{a,b}Y) \neq 0$ и, следовательно, $\dim H^j_{p,q}(C^f_{a,b}Y) = \infty$.*

В § 2.4 в качестве приложения результатов § 2.3 рассматривается вопрос о нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на поверхностях вращения.

Рассмотрим поверхность вращения M в $\mathbb{R}^{n+2}$, т. е. $(n+1)$-мерную поверхность, определенную уравнением

$$f^2(x_1) = x_2^2 + \dots + x_{n+2}^2, \quad (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}, \quad 0 \leq x_1 < b, \qquad (2.9)$$

где $0 < b \leq \infty$ и $f : [0,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ — положительная гладкая функция. Многообразие M представляет собой произведение $[0,b) \times \mathbb{S}^n$, снабженное метрикой $g_M = (1 + f'^2(x_1)) g_{[0,b)} + f^2(x_1) g_n$, индуцированной из $\mathbb{R}^{n+2}$, где $g_{[0,b)}$ и g_n — стандартные метрики на полуинтервале $[0,b)$ и сфере $\mathbb{S}^n$. Другими словами, многообразие M можно рассматривать как искривленное произведение $[0,B) \times_F \mathbb{S}^n$ многообразий $[0,B)$ и $\mathbb{S}^n$, снабженных их стандартными метриками. Здесь $B = \lim\limits_{x \to b} G(x)$ и $F = f \circ G^{-1}$, где $G(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt$.

Теорема 2.4. *Предположим, что функция f неограничена, $p, q \in [1, \infty[$, $1/q - 1/p < 1/(n+1)$, $0 \leq j \leq n$ и Γ — замкнутое подпространство пространства $\Omega^j_{p,q}(M)$, содержащее $\Omega^j_{p,q,0}(M)$. Тогда оператор*

$d = d_\Gamma : L^p(M,\Lambda^j) \longrightarrow L^q(M,\Lambda^{j+1})$ *не является нормально разрешимым.*

Рассмотрим теперь поверхность вращения (2.9), для которой $b=\infty$.

В 1996 г. В. И. Кузьминов и И. А. Шведов показали, что в случае ограниченной (сверху) функции f оператор $d = d_{\Omega^j_p(M)} : L^p(M,\Lambda^j) \to L^p(M,\Lambda^{j+1})$ нормально разрешим для всех j, $1 \le j \le n-1$, и что для $j=1,n+1$ нормальная разрешимость оператора d зависит от конечности некоторых констант Харди. Это происходит в силу связи L_p-когомологий искривленного цилиндра $C^f_{a,b}Y$ и весовых L_p-когомологий полуинтервала $[a,b)$, указанной в 1990 г. В. М. Гольдштейном, В. И. Кузьминовым и И. А. Шведовым. В § 2.3 (теорема 2.3) показано, что имеется связь подобного типа для $L_{p,q}$-когомологий. Именно, в силу теоремы 2.3, так как сфера $\mathbb{S}^n$ компактна и когомологии де Рама $H^{j-1}(\mathbb{S}^n)$ многообразия $\mathbb{S}^n$ нетривиальны при $j=1,n+1$, для нормальной разрешимости оператора $d = d_{\Omega^j_p(M)} : L^p(M,\Lambda^j) \longrightarrow L^q(M,\Lambda^{j+1})$ $(j=0,n)$ необходимо, чтобы $\chi_{p,q}(0,\infty,F^{\frac{n}{p}-j+1},F^{\frac{n}{q}-j+1})<\infty$ или $\chi_{p,q}(\infty,0,F^{\frac{n}{p}-j+1},F^{\frac{n}{q}-j+1})<\infty$. При этом функция f не обязана быть ограниченной сверху a priori.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть M — поверхность вращения* (2.9)*, причем $b=\infty$. Предположим, что $1<p<\infty$, $1<q<\infty$, $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}<\frac{1}{n+1}$, $j\in\{0,n\}$. Если $T^{j+1}_{p,q}(M)=0$ (т. е. оператор $d = d_{\Omega^j_p(M)} : L^p(M,\Lambda^j) \to L^q(M,\Lambda^{j+1})$ нормально разрешим), то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ и $\operatorname{vol} M<\infty$.*

§ 2.5 посвящен исследованию редуцированных $L_{q,p}$-когомологий скрученных цилиндров.

Скрученный цилиндр (*twisted cylinder*) $C^h_{a,b}Y=[a,b)\times_h Y$, где (Y,g_Y) — риманово многообразие, — это произведение $[a,b)\times_g Y$, снабженное римановой метрикой вида $g := dt^2 + h^2(t,y)g_Y$, где $h:[a,b)\times Y\to\mathbb{R}$ — гладкая положительная функция. Понятие скрученного произведения восходит к работе Чена (1981). В случае, когда h зависит только от t, получаем известное определение искривленного цилиндра (warped product). В данном параграфе обобщены на $L_{q,p}$-когомологии скрученных цилиндров результаты В. М. Гольдштейна, В. И. Кузьминова и И. А. Шведова о редуцированных L_p-когомологиях искривленных цилиндров.

Положим $f_{k,p}(t)=\min\limits_{x\in N}\bigl\{h^{\frac{n}{p}-k}(t,x)\bigr\}$ и $F_{k,p}(t)=\max\limits_{x\in N}\bigl\{h^{\frac{n}{p}-k}(t,x)\bigr\}$.

Теорема 2.6. *Пусть N — замкнутое n-мерное риманово многообразие, и пусть $p\ge q>1$. Если*

$$I_{a,b} := \int_a^b F^p_{k,p}(t)dt=\infty; \quad J_{\delta_0,b} := \int_{\delta_0}^b f^p_{k,p}(\tau)\left(\int_a^\tau F^p_{k,p}(t)dt\right)^{-1}d\tau=\infty$$

для некоторого $\delta_0 \in [a,b)$, *то* $\overline{H}^k_{q,p}(C^h_{a,b}N) = 0$.

Теорема 2.8. *Пусть* N *— замкнутое гладкое* n*-мерное риманово многообразие,* $N_a = \{a\} \times N$. *Предположим, что* $p \geq q > 1$,

$$\tilde{I}_{a,b} := \int_a^b f^{-p'}_{k-1,p}(t)dt = \infty$$

и интеграл

$$A_{\delta_0,b} := \int_{\delta_0}^b \frac{F^p_{k-1,p}(\tau)}{f^{pp'}_{k-1,p}(\tau)} \biggl(\int_a^\tau f^{-p'}_{k-1,p}(t)dt\biggr)^{-1} \biggl|\log\biggl(\int_a^\tau f^{-p'}_{k-1,p}(t)\,dt\biggr)\biggr|^{-p} d\tau$$

существует для некоторого $\delta_0 \in [a,b)$. *Тогда* $\overline{H}^k_{q,p}(C^h_{a,b}N, N_a) = 0$.

В § 2.6, с использованием развитой Л. Шарцером техники, исследуются неравенства Соболева–Пуанкаре на цилиндрах над замкнутым многообразием, из которых выводятся условия тривиальности нередуцированных $L_{q,p}$-когомологий скрученного цилиндра. Именно, справедлива

Теорема 2.16. *Пусть* N *— замкнутое многообразие размерности* n, $H^k_{\mathrm{DR}}(N) = 0$, $q \geq p \geq 1$ *и* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{q-1}{q(n+1)}$. *Если*

$$\|\max(F_{k-2,q}, F_{k-1,q})\|_{L^q([a,b))} < \infty,\ \|t\max(F_{k-2,q}, F_{k-1,q})(t))\|_{L^q([a,b))} < \infty,$$

$$\|\{\min(f_{k-1,p}, f_{k,p})\}^{-1}\|_{L^{\frac{p\overline{p}}{p-\overline{p}}}([a,b))} < \infty$$

для некоторого $\overline{p}$, $1 \leq \overline{p} \leq p$ *(для* $\overline{p} = p$ *полагаем* $\frac{p\overline{p}}{p-\overline{p}} = \infty$*), то* $H^k_{q,p}(C^h_{a,b}N) = 0$.

В § 2.7 изучаются условия нетривиальности одномерных $L_{p,q}$-когомологий группы Гейзенберга.

Доказывается следующий результат для одномерных $L_{p,q}$-когомологий группы $\mathbb{H}_n$ (справедливый для $p = q$ в силу результатов П. Пансю[5]):

Теорема 2.18. *Если* $p < q$, *то* $\dim H^1_{p,q}(\mathbb{H}_n) = \infty$.

Глава 3 посвящена исследованию одномерных L_Φ-когомологий локально компактных топологических (в частности, дискретных) групп.

Результаты главы 3 опубликованы в [2, 14, 16, 19].

В § 3.1 получен некоторый критерий аменабельности замкнутой подгруппы локально компактной топологической группы, удовлетворяющей второй аксиоме счетности.

Ниже все топологические группы предполагаются отделимыми.

Локально компактная топологическая группа называется *аменабельной*, если на $L^\infty(G)$ существует G-инвариантное среднее или, эквивалентно, группа G обладает *свойством неподвижной точки*: для любого

[5] Pansu P. Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement // Preprint, Orsay, 1999. 77 p.

действия G непрерывными аффинными преобразованиями на непустом выпуклом компактном подмножестве Q в локально выпуклом пространстве W существует неподвижная точка для G в Q.

Пусть V — вещественное или комплексное банахово пространство, снабженное непрерывным линейным представлением $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{B}(V)$, где $\mathcal{B}(V)$ — пространство всех ограниченных линейных эндоморфизмов банахова пространства V. Если G действует на V изометриями банахова пространства V, то V называют *банаховым G-модулем.* Мы говорим, что банахов модуль V *имеет почти инвариантные векторы*, если для каждого компактного подмножества $F \subset G$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует единичный вектор $v \in V$ такой, что $\|\alpha(g)v - v\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in F$.

Пусть V — нормированное пространство функций $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f : G \longrightarrow \mathbb{C}$) такое, что если $f \in V$ то для каждого $g \in G$ функция

$$\lambda_G(g)f(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in G,$$

лежит в V и $\|\lambda_G(g)f\|_V = \|f\|_V$. Тогда $\lambda_G : G \longrightarrow B(V)$ называется *левым регулярным представлением* группы G в V.

Примеры таких функциональных пространств V даются пространством $L^p(G)$ всех вещественнозначных функций на G, интегрируемых в степени p по G относительно некоторой левоинвариантной меры Хаара μ_G. Вместо пространств L_p можно рассмотреть более общие пространства Орлича $L^\Phi(G)$ вещественнозначных функций на G с конечной «калибровочной» нормой (Φ — N-функция):

$$\|f\|_{(\Phi)} = \inf\left\{k > 0 \,:\, \int\limits_G \Phi\left(\frac{f(x)}{k}\right) d\mu_G(x) \leq 1\right\}.$$

В 1965 г. Й. Стегеман доказал, что для локально компактной группы следующие условия (P_p) (называемые *условиями Райтера*) эквивалентны для всех $p \geq 1$:

(P_p) для любого компактного множества $F \subset G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in L^p(G)$ со свойствами $f \geq 0$ и $\|f\|_{L^p(G)} = 1$ такая, что $\|\lambda_G(z)f - f\|_{L^p(G)} < \varepsilon$ для всех $z \in F$.

В 1968 г. П. Эймар обобщил эту эквивалентность на однородные пространства G/H локально компактных групп по замкнутым подгруппам и показал, что условия (P_p) равносильны аменабельности пространства G/H. В 2004 г. М. М. Рао показал, что локально компактная группа G аменабельна тогда и только тогда, когда для Δ_2-регулярной N-функции Φ группа G удовлетворяет следующему свойству:

(P_Φ) для любого компактного множества $F \subset G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in L^\Phi(G)$ со свойствами $f \geq 0$ и $\|f\|_{L^{(\Phi)}(G)} = 1$ такая, что $\|\lambda_G(z)f - f\|_{L^{(\Phi)}(G)} < \varepsilon$ для всех $z \in F$.

Здесь символом $\|\cdot\|_{L^{(\Phi)}(G)}$ обозначена калибровочная норма в пространстве $L^\Phi(G)$.

Мы рассматриваем обобщение одного критерия М. Бурдона, Ф. Мартена и А. Валетта (2005) об аменабельности счетной группы, действующей свободно на счетном множестве, на случай действия замкнутой подгруппы H локально компактной группы G, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, на пространстве Орлича $L^{\Phi}(G)$.

Теорема 3.1. *Пусть G — локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, H — замкнутая подгруппа в G, Φ — Δ_2-регулярная N-функция для G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *левое регулярное представление H на $L^{\Phi}(G)$ имеет почти инвариантные векторы;*

(ii) *H аменабельна.*

В § 3.2 получено доказательство эквивалентности аменабельности однородного пространства G/H и соответствующего свойства Рао–Рейтера (P_Φ) для пространства Орлича, построенного с помощью N-функции класса Δ_2.

В § 3.3 изучаются достаточные условия тривиальности первой группы когомологий $H^1(G, \ell^{\Phi}(G))$ счетной дискретной группы G для Δ_2-регулярной N-функции Φ. Следует отметить, что пространства Орлича в контексте дискретных групп были предметом изучения таких авторов, как А. Каминьска и Й. Муселяк.

Теорема 3.3. *Предположим, что Φ — N-функция класса $\Delta_2(0)$. Пусть $N \leq H \leq G$ — цепочка счетных дискретных групп такая, что N — бесконечная нормальная подгруппа G, а H неаменабельна. Если $\overline{H}^1(H, \ell^{\Phi}(H)) = 0$, то $H^1(G, \ell^{\Phi}(G)) = 0$.*

Далее мы устанавливаем достаточные условия тривиальности первой группы когомологий $\overline{H}(G, \ell^{\Phi}(G))$ сплетения дискретных групп. Получен аналог результата Ф.Мартена и А.Валетта 2007 г. для случая ℓ_Φ-когомологий.

Теорема 3.4. *Пусть G_1, G_2 — нетривиальные счетные дискретные группы, $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ и $G = G_1 \wr G_2$. Если G_1 неаменабельна, то $H^1(G, \ell^{\Phi}(G)) = 0$.*

Здесь символ $\wr$ обозначает сплетение групп.

Глава 4 посвящена проблемам, касающимся пространств Орлича дифференциальных форм на римановых многобразиях.

Результаты данной главы опубликованы в [18, 20].

В § 4.1 напоминаются некоторые известные факты из теории банаховых комплексов, используемые в дальнейшем.

В § 4.2 устанавливается теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах Морса–Трэнсю дифференциальных форм на ориентированном римановом n-мерном многообразии M.

Пусть X — риманово многообразие размерности n. Для $x \in X$ обозначим символом $(\omega(x), \theta(x))$ скалярное произведение внешних форм $\omega(x)$ и $\theta(x)$ на касательном пространстве T_xX. Это дает отображение $x \mapsto (\omega(x), \theta(x))$ on X.

Пусть $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — две взаимно дополнительные N-функции. Для измеримой k-формы ω положим

$$\rho_\Phi(\omega) := \int_X \Phi(|\omega(x)|)dx.$$

Здесь dx — элемент объема риманова многообразия X. Будем отождествлять k-формы, отличающиеся не более, чем на множестве меры нуль.

На римановом многообразии X введем пространство $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ как класс всех измеримых k-форм ω таких, что $\rho_\Phi(\alpha\omega)<\infty$ для некоторого $\alpha>0$. Соответствующее пространство Морса–Трэнсю $M^\Phi(X,\Lambda^k)$ определяется как класс всех измеримых k-форм ω таких, что $\rho_\Phi(\alpha\omega)<\infty$ для всех $\alpha>0$.

Как и в случае функциональных пространств Орлича, пространство $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ снабжено двумя эквивалентными нормами: *калибровочной нормой*

$$\|\omega\|_{(\Phi)} = \inf\left\{K>0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{\omega}{K}\right)\le 1\right\}$$

и *нормой Орлича*

$$\|\omega\|_\Phi = \sup\left\{\left|\int_X (\omega(x),\theta(x))\,dx\right| : \rho_\Psi(\theta)\le 1\right\}$$

Пространство $L^\Phi(X,\Lambda^k)$, снабженное одной из этих (эквивалентных) норм, является банаховым. В зависимости от выбранной нормы будем писать L^Φ или $L^{(\Phi)}$ (M^Φ или $M^{(\Phi)}$).

Каждой форме $\theta\in L^\Psi(X,\Lambda^{n-k})$ сопоставим функционал $F_\theta(\omega)=\int_X \omega\wedge\theta$.

Теорема 4.1. *Если Φ — N-функция, то соответствие $\theta\mapsto F_\theta$ дает изометрические изоморфизмы*

$$L^{(\Psi)}(X,\Lambda^{n-k}) \overset{\cong}{\to} (M^\Phi(X,\Lambda^k))'; \quad L^\Psi(X,\Lambda^{n-k}) \overset{\cong}{\to} (M^{(\Phi)}(X,\Lambda^k))'.$$

В § 4.3 описываются сопряженные пространства к некоторым пространствам дифференциальных форм, связанным с пространствами Орлича.

В § 4.4 вводятся когомологии Орлича риманова многообразия и обсуждаются некоторые их свойства в контексте банаховых комплексов.

Пусть X — ориентированное риманово многообразие размерности n.

Если Φ — N-функция, то $\langle\Phi\rangle$ означает один из символов Φ или (Φ).

Пусть даны N-функции Φ_I и Φ_{II}.

Положим $\Omega^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X)=\left\{\omega\in L^{\langle\Phi_I\rangle}(X,\Lambda^k) \,:\, d\omega\in L^{\langle\Phi_{II}\rangle}(X,\Lambda^{k+1})\right\}$.

Это банахово пространство относительно нормы

$$\|\omega\|_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle} = \|\omega\|_{\langle\Phi_I\rangle} + \|d\omega\|_{\langle\Phi_{II}\rangle}.$$

Рассмотрим пространства

$$Z^k_{\langle\Phi_{II}\rangle}(X) = \{\omega\in L^{\langle\Phi_{II}\rangle}(X,\Lambda^k) \,:\, d\omega=0\};$$

$$B^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X) = \{\omega \in L^{\langle\Phi_{II}\rangle}(X,\Lambda^k) \,:\, \omega = d\beta, \text{ где } \beta \in L^{\langle\Phi_I\rangle}(X,\Lambda^{k-1})\}.$$

Символом $\overline{B}^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X)$ обозначим замыкание подпространства $B^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X)$ в $L^{\langle\Phi_{II}\rangle}(X,\Lambda^k)$. Факторпространства

$$H^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X) := Z^k_{\langle\Phi_{II}\rangle}(X)/B^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X) \quad \text{и}$$
$$\overline{H}^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X) := Z^k_{\langle\Phi_{II}\rangle}(X)/\overline{B}^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}(X)$$

называются пространствами k-мерных $L_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}$-*когомологий* и k-мерных *редуцированных* $L_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}$-*когомологий* риманова многообразия X. Последнее пространство является банаховым.

Внутренние k-мерные редуцированные $L_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}$-*когомологии* риманова многообразия X — банахово пространство

$$\overline{H}^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle,0}(X) = Z^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle,0}(X) \Big/ \overline{d\mathcal{D}^{k-1}(X)}\,,$$

где $\overline{d\mathcal{D}^{k-1}(X)}$ — замыкание $d\mathcal{D}^k(X)$ в $L^{\langle\Phi_{II}\rangle}(X,\Lambda^k)$ и

$$Z^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle,0}(X) = \operatorname{Ker}\left\{d : \Omega^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle} \to \Omega^{k+1}_{\langle\Phi_{II}\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}\right\} \cap \overline{\mathcal{D}^k(X)}^{\Omega^k_{\langle\Phi_I\rangle,\langle\Phi_{II}\rangle}}.$$

Естественная (полу)норма на каждом из введенных пространств когомологий зависит от выбора нормы на L^{Φ_I} и $L^{\Phi_{II}}$, но получающаяся топология не зависит.

В § 4.5 устанавливается двойственность Гёльдера–Пуанкаре для редуцированных $L_{\Phi_I,\Phi_{II}}$-когомологий ориентированного риманова многообразия.

Теорема 4.7. *Пусть X — гладкое n-мерное ориентированное риманово многообразие. Если Φ_I, Φ_{II} — N-функции, принадлежащие $\Delta_2 \cap \nabla_2$, и Ψ_I и Ψ_{II} — их дополнительные N-функции, то пространство $\overline{H}^k_{\Phi_I,\Phi_{II}}(X)$ изоморфно пространству, двойственному пространству $\overline{H}^{n-k}_{(\Psi_{II}),(\Psi_I),0}(X)$, а пространство $\overline{H}^k_{(\Phi_I),(\Phi_{II})}(X)$ изоморфно пространству, сопряженному к $\overline{H}^{n-k}_{\Psi_{II},\Psi_I,0}(X)$. Эти двойственности получаются с помощью спаривания*

$$\langle[\omega],[\theta]\rangle = \int_X \omega\wedge\theta.$$

В § 4.6 вычисляются когомологии Орлича для некоторых модельных многообразий: вещественной прямой, плоскости Лобачевского и шара.

Заключение

В диссертации решены следующие актуальные задачи гомологической алгебры в Р-полуабелевых и квазиабелевых подкатегориях категории $\mathcal{LVS}$ локально выпуклых пространств и L_{pq}-теории дифференциальных форм на римановых многообразиях и теории банаховозначных когомологий локально компактных групп.

1. Разработаны категорные методы исследования предабелевых и P-полуабелевых подкатегорий категории локально выпуклых пространств. Эти методы позволили установить для категорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств: достаточные условия точности Ker-Coker-последовательности и (ко)гомологической последовательности, соответствующей короткой строго точной последовательности комплексов; леммы о пяти и девяти гомоморфизмах; условия возможности построения спектральной последовательности точной пары. Для банаховых пространств и пространств Фреше исследованы некоторые обобщения Ker-Coker-последовательности.

2. Получены условия нетривиальности $L_{p,q}$-когомологий искривленного цилиндра в терминах двухвесового неравенства Харди на полуинтервале и, как приложение, необходимые условия нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на поверхности вращения в $\mathbb{R}^{n+2}$. Найдены условия тривиальности редуцированных и нередуцированных $L_{p,q}$-когомологий скрученного цилиндра. Доказано, что при $p < q$ одномерные $L_{p,q}$-когомологии общей группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ бесконечномерны.

3. Найден новый критерий аменабельности для замкнутой подгруппы локально компактной группы в терминах ее действия на пространстве Орлича самой группы, а также новый критерий аменабельности однородного пространства. Установлена связь одномерных когомологий Орлича дискретной группы с наличием неаменабельной подгруппы.

4. Развита теория двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае, а также в общем случае описаны линейные непрерывные функционалы на замыкании подпространства гладких форм с компактным носителем (пространстве Морса–Трэнсю) в пространстве Орлича. Изучены когомологии Орлича некоторых модельных многообразий.

Полученные результаты о точности Ker-Coker-последовательности и (ко)гомологической последовательности в категориях бочечных и борнологических локально выпуклых пространств весьма полезны при изучении комплексов таких пространств. Результаты о спектральной последовательности точной пары в P-полуабелевой категории показывают, что построение спектральной последовательности в таких категориях накладывает весьма жесткие ограничения на исходные данные.

Искривленные цилиндры часто выступают в качестве «концов» многообразий на бесконечности, а тривиальность $L_{p,q}$-когомологий связана с выполнением неравенства Соболева для дифференциальных форм. Поэтому результаты об $L_{p,q}$-когомологиях искривленных и скрученных цилиндров, полученные в диссертации, демонстрируют причины выполнения или невыполнения неравенства Соболева в зависимости от поведения риманова многообразия на бесконечности.

Результаты о пространствах Орлича на дискретных группах показывают, что в случае выполнения для соответствующей N-функции Φ Δ_2- и ∇_2-условия (и тем самым ее не более чем степенного роста) одномерные ℓ_Φ-когомологии ведут себя, как ℓ_p-когомологии. Это подсказывает, что для различения бесконечных групп с тривиальными ℓ_p-когомологиями следует привлекать пространства Орлича ℓ^Φ с $\Phi \notin \Delta_2$.

Полученные теоремы двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и двойственность Гёльдера–Пуанкаре для редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае позволяют развить вычисления когомологий Орлича для различных классов многообразий. Результат об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве Морса–Трэнсю носит важный характер общего утверждения о двойственности в рамках пространств Орлича в нерефлексивном случае. Полученные условия тривиальности когомологий Орлича для гиперболической плоскости и шара означают выполнение теорем вложения для пространств дифференциальных форм.

Рекомендации дальнейшего развития результатов диссертации:

1. Полученные в работе результаты о гомологиях в категориях бочечных и борнологческих пространств и развитые методы исследования можно использовать для дальнейшего изучения неабелевых аддитивных подкатегорий категории локально выпуклых топологических векторных пространств.

2. Разработанные в диссертации методы доказательства тривиальности или нетривиальности $L_{p,q}$-когомологий искривленных и скрученных цилиндров могут быть использованы для исследования многообразий более общего вида с «цилиндрическими» концами.

Полученная в работе двойственность Гёльдера–Пуанкаре для редуцированных когомологий Орлича должна позволить более гибко и детально изучить поведение различных классов некомпактных римановых многообразий «на бесконечности».

Было бы интересно получить как достаточные, так и необходимые условия для тривиальности когомологий Орлича $H^k_{\Phi_1,\Phi_2}(\mathbb{B}^n)$ для различных функций Φ_1 и Φ_2 — новые теоремы вложения для дифференциальных форм.

3. Представляется, что развитые в работе методы работы с когомологиями Орлича дискретных групп позволят доказать следующую гипотезу: если Φ — N-функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, а G — группа полиномиального роста, то одномерные редуцированные когомологии $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G))$ тривиальны (доказано М. Пулсом для случая ℓ^p).

Благодарности.

Я выражаю глубокую благодарность (к сожалению, ушедшему из жизни) профессору В. И. Кузьминову. Его вклад в мое развитие как математика и постоянная поддержка неоценимы. Я также очень благодарен моим соавторам С.-А. Вегнеру, В. М. Гольдштейну и Р. А. Паненко за сотрудничество и плодотворные дискуссии. В разное время я обсуждал результаты, вошедшие в диссертационную работу, также с Я. В. Базайкиным, В. В. Вершининым, А. Ю. Весниным, А. Д. Медных, П. Пансю, Ю. Г. Решетняком, А. С. Романовым, В. Румпом, К. В. Сторожуком, М. Трояновым, И. А. Шведовым. Всем указанным лицам я

благодарен за высказанные замечания и точки зрения на рассматриваемую в диссертации проблематику, а коллегам из Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН — за творческую атмосферу.

Работы автора по теме диссертации

[1] Kopylov, Ya.A. Exact couples in a Raikov semi-abelian category / Ya.A.Kopylov // Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques. – 2004. – Vol. 45, № 3. – P. 162–178.

[2] Kopylov, Ya.A. An L_p-criterion of amenability for a locally compact group / Ya.A.Kopylov // Сибирские электронные математические известия. – 2005. – Т. 2. – С. 186–189.

[3] Kopylov, Ya.A. On the Lambek invariants Ker and Im of commutative squares in a quasi-abelian category / Ya.A. Kopylov // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 11. – P. 57–67.

[4] Kopylov, Ya.A. $L_{p,q}$-cohomology and normal solvability / Ya.A.Kopylov // Archiv der Mathematik (Basel) – 2007. – Vol. 89, № 1. – P. 87–96.

[5] Копылов, Я.А. $L_{p,q}$-когомологии некоторых искривленных цилиндров / Я.А.Копылов // Доклады Российской академии наук. – 2008. – Т. 419, № 2. – С. 55–59.

[6] Копылов, Я.А. Ker -Coker -последовательность и ее обобщение в некоторых классах аддитивных категорий / Я.А.Копылов, В.И.Кузьминов // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 1. – С. 107–117.

[7] Копылов, Я.А. Леммы о гомоморфизмах в P-полуабелевых категориях / Я.А.Копылов // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 5. – С. 1097–1104.

[8] Kopylov, Ya.A. $L_{p,q}$-cohomology of warped cylinders / Ya.A. Kopylov // Annales Mathématiques Blaise Pascal. – 2009. – Vol. 16, № 2. – P. 321-238.

[9] Kopylov, Ya.A. Homology in P-semi-abelian categories / Ya.A. Kopylov // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 17. – P. 105–114.

[10] Копылов, Я.А. Аддиционная лемма Кузьминова–Шведова в квазиабелевой категории / Я.А.Копылов // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, № 3. – С. 63–75.

[11] Kopylov, Ya.A. On the notion of a semi-abelian category in the sense of Palamodov / Ya.A.Kopylov, S.-A.Wegner // Applied Categorical Structures. – 2012. – Vol. 20, № 5. – P. 531–541.

[12] Kopylov, Ya.A. The Two-Square Lemma and the connecting morphism in a preabelian category / Ya.A.Kopylov // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 316–225.

[13] Kopylov, Ya.A. On the homology sequence in a P-semi-abelian category / Ya.A.Kopylov // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – С. 190–200.

[14] Kopylov, Ya.A. Amenability of closed subgroups and Orlicz spaces / Ya.A.Kopylov // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 583–590.

[15] Kopylov, Ya.A. Exact couples in semiabelian categories revisited / Ya.A.Kopylov, S.-A.Wegner // Journal of Algebra. – 2014. – Vol. 414. – P. 264–270.

[16] Копылов, Я.А. Ф-гармонические функции на дискретных группах и первые ℓ^Φ-когомологии / Я.А.Копылов, Р.А.Паненко // Сибирский математический журнал. – 2014. – Т. 55, № 5. – С. 1104–1117.

[17] Gol′dshtein, V. Reduced $L_{q,p}$-cohomology of some twisted products / V.Gol′dshtein, Ya.A.Kopylov // Annales Mathématiques Blaise Pascal. – 2016. – Vol. 23, № 2. – P. 151–169.

[18] Kopylov, Ya.A. Orlicz spaces of differential forms on Riemannian manifolds: duality and cohomology / Ya.A.Kopylov // Problemy Analiza Issues of Analysis. – 2017. – Vol. 6 (24), № 2. – P. 57–80.

[19] Копылов, Я.А. Критерий Рао — Райтера аменабельности однородных пространств / Я.А.Копылов // Сибирский математический журнал. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 1385–1382.

[20] Gol′dshtein, V. Some calculations of Orlicz cohomology and Poincaré–Sobolev–Orlicz inequalities / V.Gol′dshtein, Ya.A.Kopylov // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1079–1090.

[21] Gol′dshtein, V. The Sobolev–Poincaré inequality and the $L_{q,p}$-cohomology of twisted cylinders / V.Gol′dshtein, Ya.A.Kopylov // Сибирские электронные математические известия. – 2020. – Т. 17. – С. 566–584.