На правах рукописи

Авилович Анна Сергеевна

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СЕКТОРИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», на кафедре математического анализа.

Научный руководитель:	*Федоров Владимир Евгеньевич* доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	*Пятков Сергей Григорьевич* доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», профессор *Ситник Сергей Михайлович* доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», профессор
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «29» июня 2021 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «28» мая 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.015.04,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В последние десятилетия неизменно растет интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, систематизация различных свойств и применения дробных производных и интегралов представлены в ряде монографий А. М. Нахушева, А. А. Килбаса, I. Podlubny, K. S. Miller, B. Ross, А. В. Псху и др. Интерес к таким уравнениям обусловлен развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования с целью обобщения знаний и создания математических моделей таких процессов, для которых классическое дифференциальное исчисление не дает приемлемого результата, а также необходимостью исследовать приложения таких конструкций в различных областях науки. Математические модели, основанные на дробных производных и интегралах, находят свое применение в физике, математической биологии, гидрогеологии, при моделировании процессов тепло- и массопереноса в сильно неоднородных средах, в задачах вязкоупругости и др.

Степень разработанности темы исследования. История использования интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в математическом анализе начинается в XVII веке. Первые упоминания о производных дробного порядка связаны с именами Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, в XVIII веке — с именами Лагранжа и Эйлера. В XIX и начале XX века появляются публикации на данную тему таких знаменитых исследователей, как Лаплас, Фурье, Абель, Лиувилль, Риман, Грюнвальд, Летников, Хэвисайд, Зигмунд, Курант и др. Среди современных работ по дробному исчислению отметим работы K. B. Oldham, J. Spanier, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, I. Podlubny, А. В. Псху, K. Diethelm, M. Kostić, С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной и др. На сегодняшний день известно несколько десятков определений дробных производных, соответствующие уравнения исследуются в работах очень многих авторов.

Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной, как правило, по времени, изучались в работах А. Пуанкаре, C. W. Oseen, J. Leray, E. Hopf, О. А. Ладыженской в связи с исследованием системы уравнений Навье — Стокса. Работы С. Л. Соболева середины XX века, посвященные динамике идеальной равномерно вращающейся жидкости, привлекли повышенное внимание исследователей к не разрешенным относительно старшей производной по времени уравнениям, которые теперь часто называют уравнениями соболевского типа. В последние десятилетия отметим в этом направлении работы R. E. Showalter, Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, И. А. Шишмарева.

Один из подходов к исследованию вырожденных эволюционных уравнений первого порядка в банаховых пространствах, т. е. уравнений с вырожденным оператором при производной, предполагает применение методов теории полугрупп операторов. Он используется в работах различных авторов: A. Favini, A. Yagi, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой, М. В. Фалалеева, В. Е. Федорова. В последние десятилетия теория полугрупп операторов получила свое обобщение на случай уравнений дробного порядка, разрешенных относительно производной. При этом разрешающие семейства операторов уже не обладают полугрупповым свойством. Теория разрешающих семейств операторов уравнений дробного порядка, развиваемая в работах E. Bajlekova, M. Kostić и др., в свою очередь укладывается в рамки теории разрешающих семейств интегральных эволюционных уравнений Вольтерра, разрешенных относительно производной, развитой в монографии J. Prüss. Отметим в этом направлении также работы А. В. Глушака и его соавторов. В работах В. Е. Федорова и его учеников, М. В. Плехановой исследованы некоторые классы уравнений с вырожденным оператором при дробной производной в банаховых пространствах.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является исследование вопросов разрешимости для новых классов дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные. В задачи диссертационной работы входит исследование однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных неоднородных и полулинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, с неограниченным линейным оператором, порождающим аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, а также начальных задач для линейных неоднородных уравнений с вырожденным оператором при производной Римана — Лиувилля, с парой линейных операторов в уравнении (при дробной производной и при искомой функции), порождающей вырожденное аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, а также для полулинейных уравнений соответствующего класса.

Научная новизна. Получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейных неоднородных и полулинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, с оператором, порождающим аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, и полулинейных уравнений того же класса. Также исследована однозначная разрешимость задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных и полулинейных вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной Римана — Лиувилля и с парой линейных операторов, порождающей аналитическое в секторе семейство вырожденных разрешающих операторов. Абстрактные результаты использованы для исследования однозначной разрешимости ряда новых начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

Теоретическая и практическая значимость работы. Абстрактные результаты, полученные в работе, являются обобщением соответствующих результатов теории аналитических полугрупп операторов на случай уравнений дробного порядка. Тем самым они вносят вклад в развитие теории уравнений с дробными производными и соответствующего раздела функционального анализа. В диссертационной работе развиваются методы качественного анализа основанных на дробном дифференциальном исчислении математических моделей. Такие модели описывают широкий класс процессов и явлений, имеющих место в системах со степенной нелокальностью, со степенной памятью и фрактальностью. Найдены условия однозначной разрешимости некоторых классов начально-краевых задач для моделирующих такие процессы уравнений в частных производных дробного порядка по времени. Результаты работы можно использовать при исследовании конкретных прикладных задач.

Методология и методы исследования. При исследовании линейных дифференциальных уравнений с дробными производными в банаховых пространствах использованы методы теории преобразования Лапласа и теории разрешающих семейств операторов для эволюционных уравнений. Для исследования вырожденных эволюционных уравнений при этом используется метод пар инвариантных подпространств, когда два линейных оператора из уравнения определяют представление двух банаховых пространств (одно из них содержит области определения операторов, во второе они действуют) в виде прямых сумм двух подпространств, а действие каждого из операторов пары согласовано с этими представлениями. Как результат предложено условие принадлежности пары операторов (L, M) классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, которое оказалось достаточным и в определенном смысле необходимым для существования аналитического разрешающего семейства операторов линейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка $D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$ так же, как в невырожденном случае принадлежность операторов A классу $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ необходима и достаточна для существования аналитического разрешающего семейства для уравнения дробного порядка $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Здесь D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$, A — линейный замкнутый плотно определенный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, действующий в $\mathcal{Z}$, L, M — линейные замкнутые плотно определенные операторы в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, действующие в банахово пространство $\mathcal{Y}$.

Отметим, что при исследовании линейных уравнений $D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t)$, а потому и при дальнейшем изучении полулинейных уравнений, как и в теории аналитических полугрупп операторов, естественным образом возникает условие непрерывности в норме графика оператора A неоднородности f, либо, как альтернатива, условие гельдеровости этой функции.

Однозначная локальная разрешимость задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots m-1$, либо задачи типа Шоуолтера — Сидорова (в вырожденном случае) для полулинейных уравнений

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}z(t)),$$

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}x(t)),$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, исследуется путем редукции этих задач к интегро-дифференциальным эволюционным уравнениям с последующим применением теоремы о неподвижной точке в пространстве $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций. При этом используется условие локальной липшицевости нелинейного оператора.

Уравнения и системы уравнений в частных производных с дробной производной Римана — Лиувилля по времени исследуются путем редукции различных начально-краевых задач для них к задаче типа Коши, либо к задаче типа Шоуолтера — Сидорова для соответствующего линейного или полулинейного уравнения дробного порядка в банаховом пространстве с последующим применением полученного в диссертационной работе абстрактного результата.

Положения, выносимые на защиту.

1. Исследована однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейных неоднородных уравнений, разрешенных относительно дробной производной Римана — Лиувилля, с неограниченным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

2. Получены условия локального существования единственного решения задачи типа Коши для разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля полулинейных уравнений, линейная часть которых обладает аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов.

3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для вырожденных линейных неоднородных эволюционных уравнений дробного порядка с парой операторов, порождающей аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

4. Получены условия однозначной локальной разрешимости задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для полулинейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при дробной производной Римана — Лиувилля, линейная часть которых обладает аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов.

5. Общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости ряда начально-краевых задач для встречающихся в приложениях уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно дробной производной Римана — Лиувилля по времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Междунар. науч. конф. «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX», посвящ. 90-летию академика РАН В. А. Ильина, Москва, 2018; Междунар. науч. конф. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2018, 2019, 2020, 2021; International Conference in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, Santiago de Compostela, Spain, 2018; Междунар. шк.-конф. «Соболевские чтения», посвящ. 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, 2018; Междунар. симпозиум «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование», посвящ. 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева, Иркутск, 2019; Российско-французский семинар «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019; International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19, Белгород, 2019; Междунар. науч. конф. по математическому моделированию, посвящ. 75-летию со дня рождения проф. В. Н. Врагова, Якутск, 2020.

Исследования по теме диссертации поддержаны грантом РФФИ конкурса на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»), код проекта 19-31-90008, тема «Исследование эволюционных уравнений дробного порядка, линейная часть которых порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов» под руководством В. Е. Федорова, 2019–2021.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах [1-14], из которых 3 статьи [1-3] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задачи и общее руководство. Из работ, выполненных в соавторстве с Д.М. Гордиевских[1] и Л.В. Борель[3], в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка обозначений и соглашений и списка литературы. Объем диссертации составляет 106 страниц. Библиографический список содержит 139 наименований.

Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановка задачи, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

В **первой главе** исследовалась однозначная разрешимость начальных задач для линейных уравнений

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

а также исследовалась однозначная локальная разрешимость начальных задач для полулинейных уравнений

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \dots, D_t^{\alpha-1}z(t)). \tag{2}$$

После введения во втором параграфе первой главы описаны свойства дробной производной Римана — Лиувилля: $D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная целого порядка, $J_t^{m-\alpha}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля, т. е. $J_t^{m-\alpha}h(t) = (g_{m-\alpha} * h)(t) = \int\limits_0^t g_{m-\alpha}(t-s)h(s)ds$, где $g_{m-\alpha}(t) = t^{m-\alpha-1}/\Gamma(m-\alpha)$ для $t>0$.

В третьем параграфе получены разрешающие семейства операторов для линейного однородного уравнения (1), описаны некоторые их свойства, доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи типа Коши для однородного уравнения. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ (замкнутого и плотно определенного в $\mathcal{Z}$, действующего в $\mathcal{Z}$), снабженную его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. Будем использовать обозначения $S_{\theta_0,a_0} := \{\lambda\in\mathbb{C} : |\arg(\lambda-a_0)|<\theta,\ \lambda\neq a_0\}$, $\Sigma_\varphi := \{\tau\in\mathbb{C} : |\arg\tau|<\varphi,\ \tau\neq 0\}$.

Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$ обозначим класс операторов $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ при $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\geq 0$, для которых выполняются следующие два условия:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$ $\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda-a)|}$.

Замечание 1. При $\alpha = 1$ оператор класса $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ часто называется секториальным. Для краткости иногда и операторы из $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha > 0$ будем называть секториальными, если это не может привести к недоразумению.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при* $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. *Тогда* Z_β *допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ *и при всех* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \geq 0,$$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau}|\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

Пусть $T \in (0, \infty]$. Функция $z \in C((0,T); D_A)$, для которой $J_t^{m-\alpha} z \in C^m((0,T); \mathcal{Z})$, называется решением уравнения (1), если при всех $t \in (0,T)$ справедливо равенство (1). Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

для уравнения (1) называется решение уравнения (1), для которого $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Z})$ и выполняются условия (3).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([0,T); D_A) \cup C^\gamma([0,T); \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. *Тогда при любых* $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ *функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t) z_k + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи типа Коши (3) *для уравнения* (1).

Четвертый параграф посвящен полулинейным уравнениям, доказаны теоремы об однозначной локальной разрешимости задачи типа Коши. В этом параграфе рассматриваются дробные интегралы и дробные производные Римана — Лиувилля с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\alpha f(t) := \int\limits_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > t_0.$$

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m$, $B : Z \to \mathcal{Z}$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathcal{Z}$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полулинейное уравнение (2). Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4}$$

для уравнения (2) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такая, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, выполнены условия (4), при $t \in (t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)) \in Z$ и равенство (2) верно.

Лемма 2. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $B\in C(Z;D_A)$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in Z$. Тогда z является решением задачи (2), (4) на отрезке $[t_0,t_1]$, если и только если $J_t^{m-\alpha}z\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ и для всех $t\in[t_0,t_1]$*

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}Z_{1-\alpha}(t-s)B(s,D_t^{\alpha-m}z(s),D_t^{\alpha-m+1}z(s),\dots,D_t^{\alpha-1}z(s))ds.$$

Теорема 2. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in Z$, отображение $B\in C(Z;D_A)$ является локально липшицевым по фазовым переменным. Тогда существует такое $t_1>t_0$, что задача (2), (4) имеет единственное решение на отрезке $[t_0,t_1]$.*

Теорема 3. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m-1}$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-2})\in Z$, $B\in C(Z;\mathcal{Z})$ является локально гельдеровым отображением относительно t и локально липшицевым относительно фазовых переменных. Тогда существует такое $t_1>t_0$, что задача (4) для уравнения*

$$D_t^\alpha z(t)=Az(t)+B(t,D_t^{\alpha-m}z(t),D_t^{\alpha-m+1}z(t),\dots,D_t^{\alpha-2}z(t))\tag{5}$$

имеет единственное решение на отрезке $[t_0,t_1]$.

В пятом параграфе полученные результаты о начальных задачах для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах были использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

В разделе 1.5.1 рассмотрены уравнения с многочленами от самосопряженного оператора. Пусть $P_n(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\lambda^i$, $Q_\varrho(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{\varrho}d_j\lambda^j$, $c_i,d_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,\varrho$, $c_n\neq0$, $d_\varrho\neq0$, $n<\varrho$. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda,B_1,B_2,\dots,B_r$ регулярно эллиптический, где для $q=(q_1,q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $|q|=q_1+q_2+\dots+q_d$

$$(\Lambda z)(s)=\sum_{|q|\leq 2r}\frac{a_q(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d},\ \ a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_lz)(s)=\sum_{|q|\leq r_l}\frac{b_{lq}(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d},\ \ b_{lq}\in C^\infty(\partial\Omega),\ l=1,2,\dots,r.$$

Определим оператор $\Lambda_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1}=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{z\in H^{2r}(\Omega):B_lz(s)=0,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$$

равенством $\Lambda_1z=\Lambda z$. Предположим, что Λ_1 является самосопряженным оператором с ограниченным справа спектром. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 вещественный, дискретный и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0\notin\sigma(\Lambda_1)$,

$\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1, занумерованной в порядке неубывания собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Для $\alpha \in (1,2)$, рассмотрим задачу

$$D_t^{\alpha-2}v(s,0) = v_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{6}$$

$$D_t^{\alpha-1}v(s,0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{7}$$

$$B_l\Lambda^k v(s,t) = 0, \ k = 0,1,\dots,\varrho-1, \ l = 1,2,\dots,r, \ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{8}$$

$$D_t^{\alpha}P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + g\,(s,t)\,, \ (s,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{9}$$

Положим $\mathcal{Z} = \{z \in H^{2rn}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, \ k = 0,1,\dots,n-1, \ l = 1,2,\dots,r, \ s \in \partial\Omega\}$. Пусть оператор $P_n(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \to L_2(\Omega)$ непрерывно обратим, определим оператор $Az := [P_n(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varrho(\Lambda)z$ с областью определения $D_A = \{z \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, k = 0,\dots,\varrho-1, \ l = 1,\dots,r, \ s \in \partial\Omega\}$. Показано, что $A \in A_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in [1,2)$, если $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей полинома $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$. Если, кроме того, $\max_{k\in\mathbb{N}} \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} < 1$, то $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 4. *Пусть* $(-1)^{p-n}(d_r/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит нулей многочлена* $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ *при* $k = 0,1$, $g \in C^1([0,T);\mathcal{Z})$. *Тогда при* $\alpha \in (1,2)$ *задача* (6)–(9) *имеет единственное решение. При* $\alpha \in (0,1)$, $\max_{k\in\mathbb{N}} \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} < 1$ *задача* (7)–(9) *имеет единственное решение.*

Рассмотрим теперь полулинейное уравнение

$$D_t^{\alpha}P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right) \tag{10}$$

с краевыми условиями (8) и начальными условиями (6).

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\varrho > n > d/(4r)$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит нулей многочлена* $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ *при* $k = 0,1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R};\mathbb{R})$. *Тогда существует такое* $t_1 \in (0,T]$, *что задача* (6), (8), (10) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Пусть $n = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $\varrho = 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$, тогда получим уравнение

$$D_t^{\alpha}v(s,t) = \Lambda v(s,t) + F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right). \tag{11}$$

Если $r = 1$, $\Lambda = \Delta$ — оператор Лапласа, $B_1 = I$, то (11) — полулинейное уравнение супердиффузии.

В разделе 1.5.2 исследована разрешимость начально-краевой задачи

$$D_t^{\alpha-2}v(s,t_0) = v_0(s), \ D_t^{\alpha-1}v(s,t_0) = v_1(s), \ s \in (0,\pi), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^{2l}v}{\partial s^{2l}}(0,t) = \frac{\partial^{2l}v}{\partial s^{2l}}(\pi,t) = 0, \ l = 0,1,2, \ t > t_0, \tag{13}$$

$$D_t^{\alpha}\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v = \sum_{l=0}^{3} a_l\frac{\partial^{2l}v}{\partial s^{2l}} + b(t)\big(D_t^{\alpha-2}v\big)^\eta\left(D_t^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial s}\right)^\zeta \tag{14}$$

при $s \in (0,\pi)$, $t > t_0$. Здесь $\alpha \in (1,2)$, $\beta, a_l, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2,3$, $b : [t_0,T] \to \mathbb{R}$.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \neq -k^2$ *для любых* $k \in \mathbb{N}$, $a_3 > 0$ $\eta, \zeta \geq 1$, $b \in C([t_0, T]; \mathbb{R})$ *для некоторого* $T > t_0$, $v_k \in \{v \in H^6(0, \pi) : v^{(2l)}(0) = v^{(2l)}(\pi) = 0,\ l = 0, 1, 2\}$, $k = 0, 1$. *Тогда для некоторого* $t_1 \in (t_0, T]$ *задача* (12)–(14) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Система уравнений фазового поля дробного порядка по времени рассмотрена в разделе 1.5.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\beta, \gamma, \delta, \nu \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-2} u(s, 0) = u_0(s), \quad D_t^{\alpha-2} v(s, 0) = v_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{15}$$

$$D_t^{\alpha-1} u(s, 0) = u_1(s), \quad D_t^{\alpha-1} v(s, 0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{16}$$

$$(1 - \delta) u(s, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial n}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{17}$$

$$(1 - \delta) v(s, t) + \delta \frac{\partial v}{\partial n}(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{18}$$

для системы уравнений

$$D_t^\alpha u(s, t) = \Delta u(s, t) - \Delta v(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{19}$$

$$D_t^\alpha v(s, t) = \nu \Delta v(s, t) + \beta u(s, t) + \gamma v(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T). \tag{20}$$

При $\alpha = 1$ с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(s, t) = \widetilde{u}(s, t) + \frac{l}{2}\widetilde{v}(s, t)$, $v(s, t) = \frac{l}{2}\widetilde{v}(s, t)$, $l \in \mathbb{R}$, и растяжения по временно́й переменной эта система совпадает с линеаризацией системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. Положим $\mathcal{Z} = (L_2(\Omega))^2$, $A = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & \gamma I + \nu\Delta \end{pmatrix}$, $D_A = (H_\delta^2(\Omega))^2$,

$$H_\delta^2(\Omega) := \left\{ z \in H^2(\Omega) : \left(\delta \frac{\partial}{\partial n} + (1 - \delta) \right) z(s) = 0,\ s \in \partial\Omega \right\}.$$

Обозначим $\Lambda_1 z = \Delta z$, $D_{\Lambda_1} = H_\delta^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Занумеруем по невозрастанию с учетом кратности собственные значения $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ оператора Λ_1.

Теорема 7. *Пусть* $\alpha \in [1, 2)$, $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *тогда существуют такие* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, *что* $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$. *При* $\alpha \in (0, 1)$, $\nu > 0$ *это утверждение справедливо, если выполняются дополнительные условия* $\beta > 0$ *и*

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \left(\lambda_k (1 + \nu) + \gamma \pm \sqrt{(\gamma + \lambda_k(\nu - 1))^2 - 4\beta\lambda_k} \right) < 2. \tag{21}$$

Замечание 2. Если при некотором $j \in \mathbb{N}$ выбрать $\mathcal{Z} = (H^j(\Omega))^2$, взять оператор A того же вида с областью определения $D_A = (H_\delta^{2+j}(\Omega))^2$, где $H_\delta^{2+j}(\Omega) := \left\{ z \in H^{2+j}(\Omega) : \left(\delta \frac{\partial}{\partial n} + (1 - \delta) \right) z(s) = 0,\ s \in \partial\Omega \right\}$, то таким же образом можно доказать утверждение, аналогичное утверждению теоремы 7.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha \in (1, 2)$, $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. *Тогда для любых функций* $u_0, v_0, u_1, v_1 \in H_\delta^2(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (15)–(20).

Следствие 2. *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$, $\nu, \beta > 0$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *выполняется условие* (21). *Тогда для любых* $u_1, v_1 \in H_\delta^2(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (16)–(20).

При $\alpha \in (1,2)$ рассмотрена нелинейная система уравнений фазового поля

$$D_t^\alpha u(s,t) = \Delta u(s,t) - \Delta v(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{22}$$

$$D_t^\alpha v(s,t) = \nu\Delta v(s,t) + \beta u(s,t) + \gamma v(s,t) - \kappa v(s,t)^3 = 0, \ (s,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{23}$$

Возьмем $\mathcal{Z}$ и D_A из замечания 2.

Теорема 8. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, $j > d/2$. Тогда для любых $u_0, u_1, v_0, v_1 \in H_\delta^{2+j}(\Omega)$ существует единственное решение задачи* (15)–(18), (22), (23).

Во **второй главе** диссертации исследуется однозначная разрешимость задачи типа Коши и задачи типа Шоуолтера — Сидорова для линейного неоднородного уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + g(t), \tag{24}$$

где $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, а также вопросы существования единственного локального решения начальных задач для полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}x(t)) + f(t). \tag{25}$$

Решение, как и в первой главе, понимается в классическом смысле, операторы L, M предполагаются линейными, замкнутыми, плотно определенными в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, действующими в банахово пространство $\mathcal{Y}$, коротко $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. При этом предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, это условие вырожденности рассматриваемых уравнений.

После введения во втором параграфе рассмотрены вырожденные линейные уравнения. Обозначим $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$. Через $\rho^L(M)$ обозначим множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathcal{Y}$ инъективно и при этом $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Будем говорить, что $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $a_0 \ge 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, такие, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\max\{\|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \le \tfrac{K(\theta,a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}.$$

Ранее В. Е. Федоровым, Е. А. Романовой и А. Дебушем[2] показано, что в случае $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ существует аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов уравнения $D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$, при условии рефлексивности банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют место их представления $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$, где $\mathcal{X}^0 := \ker R_\mu^L(M)$, $\mathcal{X}^1$ — замыкание образа $\mathrm{im} R_\mu^L(M)$, $\mathcal{Y}^0 := \ker L_\mu^L(M)$, $\mathcal{Y}^1$ — замыкание $\mathrm{im} L_\mu^L(M)$, при этом $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_0 = 0$, существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, где $L_k = L|_{D_L \cap \mathcal{X}^k}$, $M_k = M|_{D_M \cap \mathcal{X}^k}$, $k = 0, 1$. Обозначим через

[2] Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

P проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, Q — проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$, $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$, $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \mathrm{im}L_1\}$; $U := M_1L_1^{-1} : D_U \to \mathcal{Y}^1$, $D_U := \{y \in \mathrm{im}L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$. Показано, что если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, выполняется включение $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, при $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ — $U \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 3. В случае $(L, M) \in \mathcal{H}_1(\theta_0, a_0)$ в работах Г. А. Свиридюка и В. Е. Федорова оператор M называется $(L, 0)$-секториальным. Поэтому пара операторов из $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при произвольном $\alpha > 0$ для краткости иногда также будет называться секториальной, если из контекста ясно, о чем идет речь.

При $\alpha > 0$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$ построена система аналитических в секторе Σ_{θ_0} семейств операторов на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в данном случае вырождающихся на подпространстве $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{Y}^0$ соответственно

$$\left\{X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta}R^L_{\mu^\alpha}(M)e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \mathbb{R}_+\right\},$$

$$\left\{Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta}L^L_{\mu^\alpha}(M)e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) : t \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

Функция $x : \mathbb{R}_+ \to D_M \cap D_L$ называется решением уравнения (24), если $J_t^{m-\alpha}Lx \in C^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Y})$, $Mx \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Y})$ и выполняется (24). Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{26}$$

для уравнения (24) называется такое решение уравнения (24), для которого $J_t^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([0, T);\mathcal{X})$ и выполняются равенства (26).

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $x_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи типа Коши (26) для уравнения $D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$, при этом $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k$.*

Доказана аналогичная теорема в предположении, что $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, вместо условия $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, при этом решение имеет тот же вид.

Далее исследованы линейные неоднородные уравнения вида (26). Подобно невырожденному случаю изучены задачи с непрерывной в норме графика оператора S функцией g, а также с гельдеровой функцией g. Функция $x : (0, T) \to D_M \cap D_L$ называется решением уравнения (24), если $J_t^{m-\alpha}Lx \in C^m((0, T);\mathcal{Y})$, $Mx \in C((0, T);\mathcal{Y})$ и выполняется (24). Решением задачи типа Коши (26) для уравнения (24) называется такое решение уравнения (24), для которого $J_t^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([0, T);\mathcal{X})$ и выполняются равенства (26).

Теорема 10. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $g \in C((0, T);\mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qg \in C\big([0, T); D_{L_1^{-1}M_1}\big)$, $J_t^{m-\alpha}(I - Q)g \in C^{m-1}([0, T);\mathcal{Y})$, $x_k \in \mathcal{X}$, $Px_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$,*

$$D_t^{\alpha-m+k}M_0^{-1}(I - Q)g(0) = -(I - P)x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{27}$$

Тогда существует единственное решение задачи типа Коши (24), (26) *при этом оно имеет вид*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}X_{m-\alpha-k}(t)x_k+\int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qg(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)g(t). \quad (28)$$

Аналогичная теорема получена с условием $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ вместо предположения $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$. Кроме того, при исследовании случая повышенной гладкости функции g по временно́й переменной условие $L_1^{-1}Qg\in C\big([0,T);D_{L_1^{-1}M_1}\big)$ заменяется на $L_1^{-1}Qg\in C^\gamma\big([0,T);\mathcal{X}\big)$, $\gamma\in(0,1]$. Во всех ситуациях решение имеет вид (28).

Для вырожденного уравнения (24) рассмотрена также обобщенная задача типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Px(0)=x_k,\quad k=0,1,\dots,m-1. \quad (29)$$

Доказаны четыре теоремы о существовании и единственности решения, их отличие от аналогичных теорем для задачи типа Коши в том, что они не содержат условий согласования начальных данных и правой части уравнения (27), что обусловлено использованием проектора P в начальных условиях (29).

В третьем параграфе рассмотрены полулинейные вырожденные уравнения вида (25). Пусть $L,M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, X — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^m$, $N:X\to\mathcal{Y}$, $f:[t_0,T)\to\mathcal{Y}$, рассмотрена эквивалентная обобщенной задаче типа Шоуолтера — Сидорова (29) в случае $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ задача типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=y_k,\quad k=0,1,\dots,m-1, \quad (30)$$

для уравнения (25). Функция $x:(t_0,t_1]\to D_M\cap D_L$ называется решением задачи типа Шоуолтера — Сидорова (30) для уравнения (25) на отрезке $[t_0,t_1]$, если $J_t^{m-\alpha}Lx\in C^m((t_0,t_1];\mathcal{Y})\cap C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{X})$, $Mx\in C((t_0,t_1];\mathcal{Y})$, для всех $t\in(t_0,t_1]$ $(t,D_t^{\alpha-m}x(t),D_t^{\alpha-m+1}x(t),\dots,D_t^{\alpha-1}x(t))\in X$ и выполняются равенства (25), (30).

Теорема 11. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^m$, $N:X\to\mathcal{Y}^1$, *отображение* $L_1^{-1}N\in C\big(X;D_{L_1^{-1}M_1}\big)$ *локально липшицево по фазовым переменным,* $f\in C([t_0,T);\mathcal{Y})$ *при некотором* $T>t_0$, $L_1^{-1}Qf\in C([t_0,T);D_{L_1^{-1}M_1})$, $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f\in C^{m-1}([t_0,T);D_{L_1^{-1}M_1})$, $y_k\in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k=0,1,\dots,m-1$,

$$(t_0,L_1^{-1}y_0-D_t^{\alpha-m}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0),\dots,L_1^{-1}y_{m-1}-D_t^{\alpha-1}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0))\in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (25), (30) *на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1\in(t_0,T)$.

Особенностью рассмотренного в данной теореме класса задач является принадлежность образа нелинейного оператора $\mathrm{im}N$ подпространству $\mathcal{Y}^1$. При этом рассмотрены также ситуации с условием $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ вместо условия $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, а также с условиями гельдеровости правой части уравнения вместо ее непрерывности в норме графика оператора S.

Теорема 12. *Пусть* $\alpha > 1$, *банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$, $N : X \to \mathcal{Y}^1$, *отображение* $L_1^{-1}N \in C(X; \mathcal{X})$ *локально гельдерово по* t *и локально липшицево по фазовым переменным,* $f : [t_0, T] \to \mathcal{Y}^0 \dot{+} \mathrm{im} L_1$ *для некоторого* $T > t_0$, $L_1^{-1}Qf \in C^\gamma([t_0, T); \mathcal{Y})$, $\gamma \in (0, 1]$, $J_t^{m-\alpha} M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$ *при* $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}y_0 - D_t^{\alpha-m} M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \ldots, L_1^{-1}y_{m-2} - D_t^{\alpha-2} M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (30) *для уравнения*

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x(t)) + f(t) \quad (31)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T)$.

Изучена однозначная разрешимость задачи типа Коши для уравнений (25), (31) при $\mathrm{im} N \subset \mathcal{Y}^1$. В этом случае возникают необходимые для разрешимости условия согласования исходных данных и функции f:

$$(I - P)x_k = -D_t^{\alpha-m+k}|_{t=t_0} M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

В четвертом параграфе рассмотрена та же задача, что и в предыдущем параграфе, без условия $\mathrm{im} N \subset \mathcal{Y}^1$, но в предположении, что N не зависит от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $f \equiv 0$:

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x(t)). \quad (32)$$

Обозначим $V := X \cap \mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^{m-1}$.

Теорема 13. *Пусть* $\alpha > 1$, *банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$, $N : X \to \mathcal{Y}$, *для любых* $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in X$, *таких, что* $(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2}) \in X$, *выполняется* $N(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) = N_1(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2})$ *при некотором* $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$, $QN_1 \subset \mathrm{im} L$, *отображение* $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; \mathcal{Y})$ *локально гельдерово по* t *и локально липшицево по фазовым переменным,* $y_0, \ldots, y_{m-1} \in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $(t_0, L_1^{-1}y_0, \ldots, L_1^{-1}y_{m-2}) \in V$. *Тогда существует единственное решение задачи* (30), (32) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T)$.

Обозначим через $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^{m-1} \to \mathcal{Y}$ отображение, при котором для любого элемента $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^{m-1}$ выполнено

$$QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) := QN_1(t, L_1^{-1}z_0, L_1^{-1}z_1, \ldots, L_1^{-1}z_{m-2}).$$

Теорема 14. *Пусть* $\alpha > 1$, *банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$. *Предположим, что* $N : X \to \mathcal{Y}$, *для любых* $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in X$ *таких, что* $(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2}) \in X$, *выполняется* $N(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) = N_1(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2})$ *при некотором* $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$, *отображение*

$$QN_1 \circ L_1^{-1} : \{(t, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Y}^m : u_k = Lz_k,$$

$$k=0,1,\dots,m-1,\ (t,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in X\}\to\mathcal{Y}$$

локально гельдерово по t *и локально липшицево по фазовым переменным,* $y_k\in L[D_M]$, $k=0,1,\dots,m-1$, $(t_0,L_1^{-1}y_0,L_1^{-1}y_1,\dots,L_1^{-1}y_{m-2})\in X$. *Тогда существует единственное решение задачи* (30), (32) *на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1\in(t_0,T)$.

В пятом параграфе полученные результаты при исследовании абстрактных задач для вырожденных уравнений дробного порядка были использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной Римана — Лиувилля по времени.

Как и в первой главе, в разделе 2.5.1 введены в рассмотрение многочлены $P_n(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i\lambda^i$, $Q_\varrho(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{\varrho}d_j\lambda^j$, $c_i,d_j\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,\varrho$, $c_n\neq 0$, $d_\varrho\neq 0$, $n<\varrho$, и при $\alpha\in(1,2)$, рассмотрим задачу

$$D_t^{\alpha-2}P_n(\Lambda)v(s,0)=v_0(s),\quad D_t^{\alpha-1}P_n(\Lambda)v(s,0)=v_1(s),\quad s\in\Omega,\tag{33}$$

$$B_l\Lambda^k v(s,t)=0,\ k=0,1,\dots,\varrho-1,\ l=1,2,\dots,r,\ (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\tag{34}$$

$$D_t^{\alpha}P_n(\Lambda)v(s,t)=Q_\varrho(\Lambda)v(s,t)+g\,(s,t)\,,\ (s,t)\in\Omega\times(0,T).\tag{35}$$

Положим $\mathcal{X}=\{z\in H^{2rn}(\Omega):B_l\Lambda^k z(s)=0,\ k=0,1,\dots,n-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}=L_2(\Omega)$, $L=P_n(\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M=Q_\varrho(\Lambda)\in\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $D_M=\{z\in H^{2r\varrho}(\Omega):B_l\Lambda^k z(s)=0,\ k=0,1,\dots,\varrho-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$, где операторы Λ, B_l, $l=1,2,\dots,r$, описаны в первой главе в разделе 1.5.1. Пусть, в отличие от первой главы, при некотором $k_0\in\mathbb{N}$ $P_n(\lambda_{k_0})=0$, где $\{\lambda_k\}$ — спектр оператора Λ_1 (см. там же).

Теорема 15. *Пусть* $\varrho>n$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n)<0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* P_n *и* Q_ϱ, $0\notin\sigma(\Lambda_1)$. *Тогда при* $\alpha\in[1,2)$ *существуют такие* $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$, $a_0\geq 0$, *что* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$. *Если, кроме того,* $\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}<1$, *то* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ *при* $\alpha\in(0,1)$. *В обоих случаях* $P=\sum\limits_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $Q=\sum\limits_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $\mathcal{X}^0=\mathcal{Y}^0=\mathrm{span}\{\varphi_k:P_n(\lambda_k)=0\}$, $\mathcal{X}^1$ *— замыкание линеала* $\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k:P_n(\lambda_k)\neq 0\}$ *в пространстве* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}^1$ *— его замыкание в пространстве* $\mathcal{Y}$.

Замечание 4. При тех же операторах и при выборе пространств $\mathcal{X}=\{z\in H^{2rn+j}(\Omega):B_l\Lambda^k z(s)=0,\ k=0,1,\dots,n-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}=H^j(\Omega)$, и области определения $D_M=\{z\in H^{2r\varrho+j}(\Omega):B_l\Lambda^k z(s)=0,k=0,1,\dots,\varrho-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$ для некоторого $j\in\mathbb{N}$ теорема остается справедливой.

Теорема 16. *Пусть* $\alpha\in(1,2)$, $(-1)^{p-n}(d_r/c_n)<0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* P_n *и* Q_ϱ, $0\notin\sigma(\Lambda_1)$, $v_k\in P_n(\Lambda_1)[D_M]$, $k=0,1$, $g\in C^1([0,T);\mathcal{Z})$. *Тогда задача* (33)–(35) *имеет единственное решение.*

Рассмотрены также полулинейные уравнения

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + P_n(\Lambda)F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right), \tag{36}$$

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + F\left(s, P_n(\Lambda)D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right) \tag{37}$$

с начальными условиями (33) и краевыми условиями (34).

Теорема 17. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\varrho > n > d/(4r)$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* $P_n(\lambda)$ *и* Q_ϱ, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $v_k \in P_n(\Lambda)[D_M]$ *при* $k = 0, 1$. *Тогда существует такое* $t_1 \in (0, T]$ *, что задача* (33), (34), (36) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Для уравнения (37) пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и D_M выбраны как в замечании 4.

Теорема 18. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $j > d/2$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* $P_n(\lambda)$ *и* Q_ϱ, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $v_k \in P_n(\Lambda)[D_M]$ *при* $k = 0, 1$. *Тогда существует такое* $t_1 \in (0, T]$ *, что задача* (33), (34), (37) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Условие непрерывности нелинейного оператора в норме графика использовано в разделе 2.5.2 при исследовании начально-краевой задачи

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t) = \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s,t) +$$

$$+ \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t), D_t^{\alpha-1}v(s,t)\right), \ (s,t) \in (0,\pi) \times (t_0, t_1], \tag{38}$$

$$\frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(0,t) = \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(\pi,t) = 0, \ l = 0,1,2, \ t \in (t_0, t_1], \tag{39}$$

$$D_t^{\alpha-m+k} \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t_0) = v_k(s), \ k = 0,1, \ s \in (0,\pi), \tag{40}$$

Здесь $\alpha \in (1,2]$, $\beta, a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2,3$, $F : (0,\pi) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 19. *Пусть* $\alpha \in [1,2)$, $\beta = -k_1^2$ *для некоторого* $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_3 > 0$,

$$\sum_{l=0}^{3} a_l \beta^l \neq 0, \ v_k \in \left\{x \in H^2(0,\pi) : x(0) = x(\pi) = 0\right\}, \ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ *задача* (38)–(40) *имеет единственное решение на* $[t_0, t_1]$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. В разделе 2.5.3 рассмотрена начально-краевая задача

$$D_t^{\alpha-2} u(s,0) = u_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{41}$$

$$D_t^{\alpha-1} u(s,0) = u_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{42}$$

$$(1-\delta)u(s,t)+\delta\frac{\partial u}{\partial n}(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{43}$$

$$(1-\delta)v(s,t)+\delta\frac{\partial v}{\partial n}(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{44}$$

для системы уравнений

$$D_t^\alpha u(s,t)=\Delta u(s,t)-\Delta v(s,t), \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{45}$$

$$\Delta v(s,t)+\beta u(s,t)+\gamma v(s,t)=0, \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{46}$$

которая при $\alpha=1$ с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(s,t)=\widetilde{u}(s,t)+\frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $v(s,t)=\frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $l\in\mathbb{R}$, совпадает с линеаризацией квазистационарной (в предположении, что время релаксации равно 0) системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода в случае одномерной фазовой функции[2].

Положим $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=(L_2(\Omega))^2$,

$$L=\begin{pmatrix} I & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad M=\begin{pmatrix} \Delta & -\Delta\\ \beta I & \gamma I+\Delta\end{pmatrix}\in\mathcal{C}l(\mathcal{X}), \quad D_M=(H_\delta^2(\Omega))^2,$$

$$H_\delta^2(\Omega):=\left\{z\in H^2(\Omega):\left(\delta\frac{\partial}{\partial n}+(1-\delta)\right)z(s)=0,\ s\in\partial\Omega\right\}.$$

Тем самым $\ker L=\{0\}\times L_2(\Omega)$. Обозначим $\Lambda_1 z=\Delta z$, $D_{\Lambda_1}=H_\delta^2(\Omega)\subset L_2(\Omega)$. Через $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ обозначим собственные функции оператора Λ_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений с учетом их кратности.

Показано, что при $\alpha\in[1,2)$, $\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $-\gamma\in\mathbb{R}\setminus\sigma(\Lambda_1)$ выполнено включение $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, более того, при $\alpha\in(0,1)$ это же утверждение справедливо при дополнительном условии $\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\beta+\gamma+\lambda_k)\lambda_k}{\gamma+\lambda_k}<1$.

Теорема 20. *Пусть $\alpha\in(1,2)$, $\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $-\gamma\in\mathbb{R}\setminus\sigma(\Lambda_1)$. Тогда для любых $u_0,u_1\in H_\delta^2(\Omega)$ существует единственное решение задачи* (41)–(46).

Пусть $\alpha\in(0,1)$, $\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $-\gamma\in\mathbb{R}\setminus\sigma(\Lambda_1)$, $\max\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\beta+\gamma+\lambda_k)\lambda_k}{\gamma+\lambda_k}<1$. Тогда для любого $u_1\in H_\delta^2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (42)–(46).

В разделе 2.5.4 исследована начально-краевая задача для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени

$$D_t^{\alpha-m+k}v(s,0)=v_k(s), \quad s\in\Omega, \quad k=0,1,\dots,m-1, \tag{47}$$

$$v(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{48}$$

$$D_t^\alpha v(s,t)=\nu\Delta v(s,t)-r(s,t)+g(s,t), \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{49}$$

$$\nabla\cdot v(s,t)=0, \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{50}$$

в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu>0$. Редуцируем ее к вырожденному эволюционному уравнению, считая неизвестными не только вектор-функцию скорости $v=(v_1,v_2,\dots,v_d)$, но и вектор-функцию градиента давления $r=(r_1,r_2,\dots,r_d)$. Введем ряд обозначений: $\mathbb{L}_2:=(L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1:=(W_2^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2:=(W_2^2(\Omega))^d$, замыкание линеала $\mathfrak{L}:=\{z\in(C_0^\infty(\Omega))^d:\nabla\cdot z=0\}$

[2]Плотников П. И., Клепачева А. В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.

в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначено через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — символом $\mathbb{H}^1_\sigma$, $\mathbb{H}^2_\sigma := \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Обозначим через $A := \Sigma\Delta$ оператор, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$. Учитывая уравнение несжимаемости (50), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \Sigma g(\cdot, t) \\ \Pi g(\cdot, t) \end{pmatrix}, \, t \in [0, T), \tag{51}$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{52}$$

Имеем при фиксированном $t \geq 0$ $x(t) \in \mathcal{X}$, где $x(t) = (v(\cdot, t), r(\cdot, t))$. Показано, что если $\nu > 0$, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют вид (51), а операторы L и M определены формулами (52), то $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.

Теорема 21. *Пусть $\nu > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$ при $\alpha \in (0, 1]$, $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$ при $\alpha \in (1, 2)$, $g \in C((0, T); \mathbb{L}_2)$, $\Sigma g \in C\big([0, T); \mathbb{H}^2_\sigma\big)$. Тогда существует единственное решение задачи* (47)–(50).

Заключение

В диссертационной работе исследована однозначная разрешимость задачи типа Коши и задачи типа Шоуолтера — Сидорова (в вырожденном случае) для линейных неоднородных и полулинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной, а также для вырожденных уравнений — имеющих при производной Римана — Лиувилля вырожденный линейный оператор. Для полулинейных уравнений решение понимается в локальном смысле.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности решения для ряда начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно дробной производной по времени: для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, для классической и квазистационарной системы уравнений фазового поля дробного порядка по времени, для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Авилович, А. С. Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью / А. С. Авилович, Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 1. — С. 5–21. (Scopus).

2. Федоров, В. Е. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С.461–477. (Web of Science, Scopus).

3. Fedorov, V. E. Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, L. V. Borel // Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 41–62. (Scopus).

Другие публикации автора

4. Авилович, А. С. Задача Шоуолтера — Сидорова для уравнения, не разрешимого относительно производной Римана – Лиувилля /А. С. Авилович // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: сб. тез. росс.-франц. семинара. — Ханты-Мансийск: Югорский формат, 2019. — С. 7.

5. Авилович, А. С. Начальные задачи для вырожденных полулинейных эволюционных уравнений с производной Римана – Лиувилля /А. С. Авилович // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 11.

6. Авилович, А. С. Полулинейные уравнения с производной Римана – Лиувилля в секториальном случае /А. С. Авилович // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: материалы Междунар. симпозиума, посвящ. 100-летию мат. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О.В.Васильева. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2019. — С. 106–107.

7. Авилович, А. С. Задача типа Шоуолтера — Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения с производной Римана – Лиувилля /А. С. Авилович // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. — С. 10.

8. Авилович, А. С. Задача Коши для вырожденного эволюционного уравнения с производной Римана — Лиувилля /А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Соболевские чтения: тез. докл. Междунар. шк.-конф., посвящ. 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева, 2018. — С. 47.

9. Авилович, А. С. Задача типа Коши для линейного уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Римана — Лиувилля /А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. — С. 12.

10. Авилович, А. С. Существование и единственность решения задачи типа Коши для невырожденного полулинейного уравнения /А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. — С. 10.

11. Федоров, В. Е. Один класс вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка /В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX: материалы Междунар. конф., посвящ. 90-летию В. А. Ильина. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 224–225.

12. Федоров, В. Е. Порождение аналитического разрешающего семейства операторов уравнения распределенного порядка /В. Е. Федоров, А. С. Авилович // IX Междунар. конф. по мат. моделированию, посвященная 75-летию В. Н. Врагова: тез. докл. — Якутск: Издат. дом СВФУ, 2020. — С. 10–11.

13. Fedorov, V. E. Degenerate fractional order differential equations in Banach spaces and applications / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19, Belgorod, Russia. — Belgorod: Belgorod State University, 2019. — P. 34–35.

14. Fedorov, V. E. On solvability of fractional order degenerate evolution equations in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // Book of Abstracts of International Analysis and Boundary Value Problems. — Santiago de Compostela, Spain, 2018. — P. 110.