На правах рукописи

Горшков Илья Борисович

СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ДАННЫМИ РАЗМЕРАМИ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Васильев Андрей Викторович

Официальные оппоненты:

Журтов Арчил Хазешович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

Казарин Лев Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова», г. Ярославль, заведующий кафедрой алгебры и математической логики

Тимошенко Евгений Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры алгебры и математической логики

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Челябинский государственный университет», г. Челябинск

Защита состоится __ ноября 2020 года в __ : __ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан __ октября 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Задача описания конечных групп свойствами, представимыми в виде числовых характеристик, занимает видное место в теории групп. Наиболее часто используемыми числовыми характеристиками групп являются порядок группы, порядки ее элементов, порядки и индексы различных подгрупп, размеры классов сопряженных элементов.

На протяжении многих лет изучается структура конечных групп с ограничениями на размеры классов сопряженности. Так, еще в 1904 году в своей знаменитой работе [17] о разрешимости $\{p, q\}$-групп В. Бернсайд показал, что конечная группа непримарного порядка, имеющая класс сопряженности, размер которого является простое число, не может быть простой. Еще больше информации о строении группы G можно извлечь, зная множество всех размеров классов сопряженных элементов. В серии работ Н. Ито [29, 30, 31] было показано, что группа G нильпотентна, если мощность множества размеров классов сопряженности равна двум, группа G разрешима, если мощность данного множества равна трем, наконец, простая группа G изоморфна проективной специальной линейной группе степени 2, если его мощность равна четырем.

Введем некоторые обозначения. Для простых групп лиева типа (и классических, и исключительных) используется лиева нотация. Спорадические группы обозначаются в соответствии с «Атласом конечных групп» [25]. Знакопеременные и симметрические группы степени n обозначены через Alt_n и Sym_n соответственно.

Пусть g — элемент конечной группы G, будем обозначать g^G — класс сопряженности группы G содержащий элемент g, $|g^G|$ обозначает размер класса сопряженности g^G. Централизатор элемента g в группе G обозначается $C_G(g)$. В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathrm{Ind}_H(g) = |H|/|C_H(g)|$, где H — некоторая подгруппа группы G, а g — элемент группы G. Очевидно, что $\mathrm{Ind}_G(g) = |g^G|$. Одной из важнейших числовых характеристик конечных групп является множество размеров классов сопряженности. Поскольку конечная группа всегда содержит класс сопряженности размера 1, то удобно использовать следующее обозначение $N(G) = \{|g^G| | g \in G\} \setminus \{1\}$.

Будем говорить, что конечная группа L распознаваема по множеству размеров классов сопряженности среди конечных групп с тривиальным центром, кратко N-распознаваема, если равенство $N(L) = N(G)$, где G

— конечная группа с тривиальным центром, влечет изоморфизм $G \simeq L$. Заметим, что условие тривиальности центра группы G является естественным, поскольку $N(L) = N(L \times A)$, где A — абелева группа. Существуют разрешимые N-распознаваемые группы, например, симметрическая группа степени 3 является N-распознаваемой. Таким образом, простота или нетривиальность разрешимого радикала группы L не является необходимым условием N-распознаваемости группы L. Сформулируем следующий вопрос.

Вопрос. Когда конечная группа L распознаваема по множеству размеров классов сопряженности среди конечных групп с тривиальным центром?

Известно, что существуют две неизоморфные группы Фробениуса порядка 18, однако, множества размеров классов сопряженности этих групп совпадают. Таким образом, множество конечных групп с тривиальным центром и множество N-распознаваемых групп различны. Более того, Г. Наварро [37] нашел разрешимую и неразрешимую группы с тривиальными центрами, имеющие одинаковые множества размеров классов сопряженности. Вопрос о существовании бесконечного числа конечных групп с тривиальными центрами и одним и тем же множеством размеров классов сопряженности остается открытым.

После объявления о завершении классификации конечных простых групп возникла естественная гипотеза, которую впервые высказал Дж. Томпсон в письме к В. Ши в 1987 году, и которая в 1992 году была записана в «Коуровскую тетрадь» [34] под номером 12.38.

Гипотеза Томпсона. Если L — конечная неабелева простая группа, G — конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$, то $G \simeq L$.

Обозначим через $\omega(G)$ множество порядков элементов (спектр) группы G, а через $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G. Множество $\omega(G)$ определяет граф $GK(G)$ простых чисел группы G (часто называемый графом Грюнберга — Кегеля). Множеством вершин этого графа является $\pi(G)$, вершины p и q соединены ребром, если $pq \in \omega(G)$. Наибольшая степень простого числа p, делящего число n, обозначается через n_p. Число p^n такое, что множество $N(G)$ содержит число α с условием $p^n = \alpha_p$ и не содержит числа, делящегося на p^{n+1}, обозначается как $|G||_p$. Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то будем обозначать $|G||_\pi = \prod_{p\in\pi} |G||_p$. Для сокращения записи введем понятие сопряженного порядка группы $|G|| = |G||_{\pi(G)}$. Заметим, что определение сопряженного порядка корректно и $(|G||)_p = |G||_p$. Легко видеть, что $|G||_p$ делит $|G|_p$ для любого $p \in \pi(G)$, а значит $|G||$ делит $|G|$.

Пусть L — группа с несвязным графом простых чисел. Тогда, как несложно заметить, центр группы L тривиален. В 1996 году Г. Чен [22] доказал, что в этом случае равенство $N(L) = N(G)$, где G — конечная группа с тривиальным центром, влечет равенства $|G| = |G|| = |L|$. В общем случае порядок конечной группы может не совпадать с сопряженным порядком. А. Камина [18] привел бесконечные серии конечных групп, в которых сопряженный порядок строго меньше порядка группы.

Пусть p и q — различные взаимно простые числа. Будем говорить, что группа G обладает свойством $\{p,q\}^*$ и писать $G \in \{p,q\}^*$, если $\alpha_{\{p,q\}} \in \{|G||_{\pi(p)}, |G||_{\pi(q)}, |G||_{\pi(p)\cup\pi(q)}\}$ для любого $\alpha \in N(G)$.

А. Камина [19] доказал, что конечная группа G нильпотентна, если $N(G) = \{1, p^n, q^m, p^nq^m\}$, где p и q — различные простые числа. В работе [16] А. Белтран и М. Фелипе обобщили теорему Камина следующим образом: пусть G — конечная разрешимая группа, множество размеров классов сопряженности которой равно $\{1, n, m, nm\}$, где n и m — взаимно простые числа, тогда G нильпотентна, n и m — степени различных простых чисел. В общем случае группа со свойством $\{p,q\}^*$ не обязана быть нильпотентной и даже разрешимой. Например, пусть $G \simeq A_n(k)$. Тогда $G \in \{p,q\}^*$, где p — примитивный простой делитель числа k^n-1, а q — примитивный простой делитель числа $k^{n-1}-1$. Более того, из описания максимальных торов конечных простых групп лиева типа следует, что любая конечная простая группа лиева типа, лиев ранг которой больше трех, обладает свойством $\{p,q\}^*$ для некоторых различных простых чисел p и q, зависящих от группы.

В диссертации исследованы конечные группы со свойством $\{p,q\}^*$, имеющие тривиальный центр. Доказано, что если $G \in \{p,q\}^*$, имеет тривиальный центр и $p > q > 5$, то $|G|_{\{p,q\}} = |G||_{\{p,q\}}$. Заметим, что данное утверждение в некотором смысле обобщает лемму Г. Чена [22, лемма 1.3]. Если $L \in \{p,q\}^*$, $N(G) = N(L)$ и центр группы G тривиален, то $G \in \{p,q\}^*$. Из результата, полученного в диссертации, следует, что $|G|_{\{p,q\}} = |G||_{\{p,q\}} = |L|_{\{p,q\}}$.

Одними из первых простых групп, для которых была доказана N-распознаваемость, стали спорадические простые, группы граф простых чисел которых имеет более двух компонент связности [24]. Позднее, используя предыдущие результаты, В. Ши [23] показал, что гипотеза

Томпсона справедлива для всех простых спорадических групп. В [46] было доказано, что группы автоморфизмов спорадических групп также N-распознаваемы.

Дж. Вильямс [47] и А. С. Кондратьев [4] получили классификацию конечных простых групп с несвязным графом простых чисел. Используя этот глубокий результат и утверждение о совпадение порядков групп, Г. Чен [22, 21] доказал справедливость гипотезы Томпсона для всех конечных простых групп, граф простых чисел которых имеет более чем две компоненты связности. На протяжении следующего десятилетия появилось большое количество результатов доказывающих гипотезу Томпсона для некоторых классов конечных простых групп с несвязным графом простых чисел. Впервые удалось показать справедливость гипотезы Томпсона для групп со связным графом простых чисел в 2009 году. А. В. Васильев [45] показал, что группы Alt_{10} и $A_3(4)$ N-распознаваемы. В работе Н. Аханджидех [9] была доказана N-распознаваемость всех простых групп лиева типа $A_n(q)$. В работе [48] М. Ху и В. Ши установили справедливость гипотезы Томпсона для исключительных групп лиева типа $E_7(q)$. Граф простых чисел простой группы типа ${}^3D_4(q)$ несвязен, N-распознаваемость групп данного типа была доказана в [20]. N-распознаваемость групп $F_4(q)$, где q нечетно, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ следует из OC-распознаваемости этих групп, полученной в [32], [35] и [36], соответственно. Позднее, используя вышеупомянутые результаты о группах со свойством $\{p,q\}^*$, автор диссертации, А. В. Кухарев, И. Б. Кайгородов и А. А. Шлепкин [58] дали унифицированное независимое доказательство N-распознаваемости тех же серий исключительных групп лиева типа. Таким образом, оказалось, что гипотеза Томпсона справедлива для всех исключительных групп лиева типа. N-распознаваемость простых групп лиева типа ${}^2A_n(q)$ была доказана Н. Аханджидех в [13]. В [12] и [1] она же доказала N-распознаваемость простых групп лиева типа $B_n(q)$ и $C_n(q)$. Граф простых чисел группы ${}^2B_2(q)$ имеет 4 компоненты связности, N-распознаваемость этих групп была доказана Г. Ченом [22]. В работе [26] было доказано, что простые группы лиева типа $D_{p+1}(2)$ и $D_{p+1}(3)$, где p — простое число, N-распознаваемы. Н. Аханджидех [11] доказала N-распознаваемость простых групп $D_n(q)$ при n, отличных от 4 и 8, и групп ${}^2D_n(q)$ при любых n в [10]. Таким образом, для завершения доказательства N-распознаваемости всех конечных простых групп лиева типа необходимо доказать N-распознаваемость групп $D_4(q)$ и $D_8(q)$, где $q > 3$. Следует отметить, что методы, разработанные Н.

Аханджидех, не работают для данных групп. Однако $D_n(q) \in \{p,r\}^*$ для некоторых простых чисел p и r. Применяя результаты о группах со свойством $\{p,r\}^*$, автору [57] удалось доказать, что простые группы $D_4(q)$ и $D_8(q)$, где $q > 3$, N-распознаваемы. Таким образом, гипотеза Томпсона справедлива для всех спорадических групп и групп лиева типа.

Используя результат Г. Чена о совпадении порядка и сопряженного порядка в группах с несвязным графом простых чисел, С. Алави и А. Данешкаш [14] доказали N-распознаваемость знакопеременных групп Alt_p, Alt_{p+1} и Alt_{p+2}, где p — простое число большее трех. Заметим, что знакопеременная группа степени n имеет несвязный граф простых чисел в том и только том случае, когда n представимо в виде $p+k$, где p — простое число и $0 \leq k \leq 2$. Также знакопеременные группы в общем случае не обладают свойством $\{p,q\}^*$ ни для каких пар взаимно простых чисел p и q. Таким образом, для доказательства N-распознаваемости знакопеременных групп требуются разработать особые методы. В статье [2] автор доказал N-распознаваемость группы Alt_{16}. В работе [49] было доказана N-распознаваемость группы Alt_{22}. В частности, для всех знакопеременных групп Alt_k, где $k \leq 25$, вопрос N-распознаваемости решен. В настоящей диссертации разработан метод, который позволяет доказать N-распознаваемость всех неабелевых простых знакопеременных групп (по модулю гипотезы Гольдбаха о представлении любого четного числа в виде суммы двух простых чисел). Таким образом, автором завершено доказательство гипотезы Томпсона.

Спектр $\omega(G)$ конечной группы G замкнут относительно делимости и однозначно определяется множеством $\mu(G)$ тех элементов из $\omega(G)$, которые являются максимальными относительно делимости. Будем говорить, что две группы изоспектральны, если они обладают одинаковыми спектрами.

Вопрос о связи между спектром конечной группы и ее строением изучается давно. Так Г. Хигман и М. Сузуки описали конечные группы, спектр которых содержат только степени простых чисел. В середине 80-х годов, обобщая результаты Г. Хигмана и М. Сузуки, В. Ши [42, 43] обнаружил, что знакопеременная группа Alt_5 и простая линейная группа $A_1(7)$ однозначно характеризуются своими спектрами в классе конечных групп.

Мы будем говорить, что конечная группа G распознаваема по спектру, если для любой конечной группы H равенство $\omega(H) = \omega(G)$ влечет изоморфизм $H \simeq G$. Конечноя группа G почти распознаваема по спектру, если существует конечное число групп с тем же спектром.

В. Д. Мазуров [6] доказал, что если группа L имеет нетривиальный разрешимый радикал, то существует бесконечное число конечных групп с тем же спектром, что и у группы L. Поэтому вопрос о распознаваемости конечных групп по спектру интересен для групп, цоколь которых представим в виде прямого произведения неабелевых простых групп, и в первую очередь — для конечных неабелевых простых групп.

В настоящее время вопрос распознаваемости решен для всех простых спорадических групп и исключительных групп лиева типа. В серии работ А. В. Васильева и М. А. Гречкосеевой было доказано, что классическая группа лиева типа, лиев ранг которой больше 43, почти распознаваема по спектру. Позднее эта оценка понижалась [39]. В работе автора [3] был решен вопрос распознаваемости по спектру для простых знакопеременных групп, степени большей 16. Для знакопеременных групп меньшей размерности данный вопрос был решен ранее. Таким образом, вопрос распознаваемости конечных простых групп остается открытым только для классических групп ограниченного лиева ранга.

Следующим важным классом групп для которых можно решать вопрос распознаваемости по спектру являются прямые произведения конечных простых групп. Методы, предложенные для решения вопроса распознаваемости по спектру конечных простых групп и групп их автоморфизмов, существенным образом опирались на свойства графа простых чисел. Граф простых чисел группы $L \times L$ полный и, следовательно, для доказательства распознаваемости по спектру необходимо разработать новый подход. В. Д. Мазуров [5] доказал, что группа $Sz(2^7) \times Sz(2^7)$ распознаваема по спектру. В диссертации доказано, что группа $J_4 \times J_4$ распознаваема по спектру.

Другим важным классом конечных групп, для которых вопрос распознаваемости по спектру может быть решен, являются группы автоморфизмов конечных простых групп. В работах [15, 38, 5, 27] было доказано, что если $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$, то симметрическая группа Sym_n распознаваема по спектру. А. В. Заварницин [8] доказал, что Sym_p, где p — простое число большее 3, распознаваемы по спектру. По модулю данных результатов в диссертации решен вопрос о распознаваемости всех симметрических групп за исключением группы Sym_{10}. В частности доказано, что если $n \neq 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$, то группа Sym_n распознаваема по спектру.

Ясно, что если $\omega(G) = \omega(H)$, то $GK(G) = GK(H)$. Однако обратное неверно. Например, $GK(Alt_5) = GK(Alt_6)$, но $4 \in \omega(Alt_6) \setminus \omega(Alt_5)$. А. М. Старолетов [40] показал, что знакопеременная группа степени n однозначно определяется своим графом простых чисел только том случае, если $n = p$ или $n = p + 1$, где простое число p таково, что $p - 2$ тоже простое число. И. А. Вакула [7] показал, что если спектр конечной группы G совпадает со спектром знакопеременной группы Alt_n, где $n > 21$, то G содержит главный фактор H такой, что $H \simeq Alt_t$ и интервал $(t, n]$ не содержит простых чисел. В диссертации доказано, что если $GK(G) = GK(Alt_n)$ или $GK(G) = GK(Sym_n)$, где $n \geq 19$, то G содержит нормальную подгруппу H такую, что $Alt_t \leq G/H \leq Sym_t$, где интервал $(t, n]$ не содержит простых чисел. Более того $\pi(H)$ содержит не более одного просто числа из интервала $[n/2 + 1, n]$.

Цель и основные результаты диссертации.

Цель диссертации состоит в изучении строения конечных групп с ограничениями на множество размеров классов сопряженности и спектр. Основные результаты диссертации таковы.

1. Доказана N-распознаваемость простых знакопеременных групп (по модулю гипотезы Гольдбаха о представлении любого четного числа в виде суммы двух простых чисел). Результат опубликован в статьях [51, 52, 54, 55].
2. Доказано совпадение $\{p, q\}$-части сопряженного порядка и порядка конечной группы со свойством $\{p, q\}^*$. Результат опубликован в [59].
3. Доказана N-распознаваемость групп лиева типа $D_4(q)$ и $D_8(q)$. Тем самым завершено доказательство справедливости гипотезы Томпсона (вопрос 12.38 [34]). Результат опубликован в [57].
4. Доказана распознаваемость по спектру всех симметрических групп степень которых больше 45. Результат опубликован в [50].

Результаты диссертации получены автором и опубликованы в [50–60] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Все основные результаты получены автором лично.

Новизна и научная значимость работы.

В диссертации изучаются конечные группы с данными множествами размеров классов сопряженности и множествами порядков элементов. Наиболее значительный результат диссертации — завершение проверки гипотезы Томпсона, вопрос о справедливости которой был поставлен более 30 лет назад в 1987 году. Важным инструментом этой работы стал результат о совпадении $\{p,q\}^*$-части сопряженного порядка и порядка группы со свойством $\{p,q\}^*$, обобщающий и усиливающий теоремы А. Камины 1972 года и Г. Чена 1996 года. В диссертации внесен существенный вклад в теорию конечных симметрических групп подстановок, а именно показано, что всякая такая группа степени, большей 10, однозначно характеризуется в классе всех конечных групп своим спектром.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Апробация работы. По результатам диссертации в период с 2014 по 2020 год были сделаны доклады на конференциях в Новосибирске и Казани, Лиме (Перу), Минске (Беларусь), Диамантине (Бразилия), Малаге (Испания). Результаты работы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и НГУ, семинаре «Алгебры Ли и Йордана», Университета Сан-Паулу.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав и списка литературы. Она изложена на 147 страницах, библиография содержит 105 наименований.

Перейдем к более подробному изложению работы.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Точные формулировки всех теорем приведены во введении. Вспомогательные утверждения — леммы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер параграфа в текущей главе, третье — номер утверждения в текущем параграфе.

Глава 1. Глава посвящена основным определениям и предварительным результатам. Формулируются основные определения, использующиеся на протяжении всей диссертации. Излагаются общие аспекты проблемы N-распознавания и распознавания по спектру конечных групп. Приводятся необходимые результаты из теории чисел, комбинаторики и линейной алгебры.

Глава 2. Глава посвящена изучению N-распознаваемости знакопеременных групп и симметрических групп. Глава содержит 5 параграфов. В § 1 сформулированы вспомогательные леммы и вспомогательные утверждения которые будут использоваться на протяжении данной главы. В § 2 доказывается теорема из [51].

Теорема 2.2. *Пусть G — конечная группа такая, что $N(G) = N(Alt_n)$, где $n > 4$, или $N(G) = N(Sym_n)$, где $n > 22$. Тогда G не разрешима.*

Заметим, что в теореме 2.2 не предполагается тривиальность центра группы G. В § 3 доказывается теорема из [52].

Теорема 2.3. *Если $N(G) = N(Alt_n)$ или $N(G) = N(Sym_n)$, где $n > 1361$, то G содержит композиционный фактор изоморфный группе Alt_m, где $m \leq n$ и интервал $(m, n]$ не содержит простых чисел.*

В § 4 доказывается N-распознаваемость знакопеременных групп степени большей 1361.

Теорема 2.4. *Группы Alt_n, где $n > 1361$, N-распознаваемы.*

Доказательство теоремы 2.4 получено по модулю гипотезы Гольдбаха в следующей формулировке: для любого четного числа $n > 6$ найдется пара простых чисел, сумма которых равна n. Данный результат опубликован в [54]. В § 5 доказана гипотеза Томпсона для знакопеременных групп ограниченной степени. Результаты §5 опубликованы в [55].

Теорема 2.5. *Гипотеза Томпсона справедлива для групп Alt_n, где $25 < n < 1361$.*

Основным результатом главы два является следующее утверждение.

Следствие 2.5. *Гипотеза Томпсона справедлива для всех простых знакопеременных групп.*

Все результаты главы два получены автором лично.

Глава 3. Глава посвящена изучению конечных групп со свойством $\{p, q\}^*$, где p и q — различные простые числа. Глава содержит два параграфа.

Основной результат данной главы опубликован в [59]. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть G — конечная группа с тривиальным центром. Если $G \in \{p,q\}^*$, тогда $|G|_{\{p,q\}} = |G||_{\{p,q\}}$.*

Данная теорема играет ключевую роль при доказательстве N-распознаваемости ортогональных групп $D_4(q)$ и $D_8(q)$, поскольку влечет сильные ограничения на структуру централизаторов p- и q-элементов группы со свойством $\{p,q\}^*$. Как следствие теоремы 3.1 доказано следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть G, p и q как в теореме 3.1. Тогда $C_G(g) \cap C_G(h) = 1$ для любых p- и q-элементов g и h соответственно.*

Глава 4. Глава посвящена изучению N-распознаваемости групп лиева типа. Глава содержит два параграфа. Основной результат данной главы опубликован в [57]. В § 1 сформулированы вспомогательные леммы и вспомогательные утверждения которые будут использоваться на протяжении данной главы. В § 2 доказывается основная теорема из [57].

Теорема 4.1. *Простые группы лиева типа $D_4(q)$ и $D_8(q)$, где $q > 3$, N-распознаваемы.*

Итогом глав 2 и 4 является следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Гипотеза Томпсона справедлива.*

Таким образом дан положительный ответ на вопрос 12.38 из «Коуровской тетради».

Глава 5. Глава посвящена изучению распознаваемости конечных групп по спектру.

В § 1 сформулированы вспомогательные леммы и вспомогательные утверждения которые будут использоваться на протяжении данной главы. В § 2 доказывается распознаваемость по спектру симметрических групп большой степени.

Теорема 5.2. *Группа Sym_n, где $n \notin \{2,3,4,5,6,8,10,15,16,18,21,27,33,35,39,45\}$, распознаваема по спектру.*

Доказательство теоремы 5.2. индукционное. Рспознаваемость по спектру групп $Sym_{33}, Sym_{35}, Sym_{39}, Sym_{45}$ следует из распознаваемости по спектру группы Sym_{16}

Теорема 5.2*. *Если группа Sym_{16} распознаваема по спектру, то группы $Sym_{33}, Sym_{35}, Sym_{39}, Sym_{45}$ распознаваемы по спектру.*

Результаты параграфа два получены автором лично и опубликованы в [50]. В параграфе 3 доказана распознаваемость по спектру симметрических групп малых степеней.

Теорема 5.3. *Группы Sym_n, где $n \in \{15, 16, 18, 21, 27\}$ распознаваемы по спектру.*

Как следствие теорем 5.2, 5.2*, и 5.3 можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 5.3. *Если $n \neq 10$, тогда вопрос распознаваемости по спектру для групп Sym_n решен.*

Результат § 3 получен совместно с А. Н. Гришковым, опубликован в [53], при этом вклад автора диссертации решающий. В § 4 доказана распознаваемость по спектру прямого произведения двух спорадических групп Янко J_4.

Теорема 5.4. *Группа $J_4 \times J_4$ распознаваема по спектру.*

Результат получен в совместной работе с Н. В. Масловой, опубликован в [60], при этом вклад автора диссертации решающий.

Глава 6. Глава посвящена характеризации конечных групп графом простых чисел. В § 1 сформулированы вспомогательные леммы и вспомогательные утверждения которые будут использоваться на протяжении данной главы. В § 2 доказана следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть $L \simeq Alt_n$ или $L \simeq Sym_n$, где $n \geq 19$, p — наибольшее простое число не превосходящее n. Если G — конечная группа такая, что $GK(G) = GK(L)$, тогда существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $A_t \leq G/K \leq S_t$, где $t \geq p$. Более того, порядок группы K не делится на p, и не более чем одно простое число большее $n/2$ делит $|K|$.*

Теорема 6.2 получена совместно с А. М. Старолетовым в неразделимом соавторстве и опубликована в [56].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору Андрею Викторовичу Васильеву. Автор также выражает свою признательность кандидатам физико-математических наук Александру Александровичу Бутурлакину и Алексею Михайловичу Старолетову за поддержку в процессе работы над диссертацией.

Литература

[1] Н. Аханджиде, О гипотезе Томпсона для некоторых простых групп со связным графом простых чисел. Алгебра и логика 51:6 (2012), 683–721.

[2] И. Б. Горшков, О гипотезе Томпсона для простых групп со связным графом простых чисел. Алгебра и логика 51:2 (2012), 168–192.

[3] И. Б. Горшков, Распознаваемость знакопеременных групп по спектру. Алгебра и логика 52:1 (2013), 57–63.

[4] А. С. Кондратьев, О компонентах графа простых чисел конечных простых групп. Матем. сб. 180:6 (1989), 787–797.

[5] В. Д. Мазуров, Распознавание непростых групп по множеству порядков их элементов. Алгебра и Логика 36:3 (1997), 304–322.

[6] В. Д. Мазуров, Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов. Алгебра и логика 37:6 (1998) 651–666.

[7] И. А. Вакула, О строении конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе. Тр. ИММ УрО РАН 16:3 (2010), 45–60.

[8] А. В. Заварницин, Распознавание по множеству порядков элементов симметрических групп степени r и $r+1$ для простого r. Сиб. матем. журн. 43:5 (2002), 1002–1006.

[9] N. Ahanjideh, On Thompson's conjecture for some finite simple groups. J. Algebra 344:1 (2011), 205–228.

[10] N. Ahanjideh, M. Ahanjideh, On the validity of Thompson's conjecture for finite simple groups. Comm. Algebra 41:11 (2013), 4116–4145.

[11] N. Ahanjideh, On the Thompson's conjecture on conjugacy classes sizes. Internat. J. Algebra Comput. 23:1 (2013), 37–68.

[12] N. Ahanjideh, Thompson's conjecture for finite simple groups of Lie type B_n and C_n. J. Group Theory 19:4 (2016), 713–733.

[13] N. Ahanjideh, Thompson's conjecture on conjugacy class sizes for the simple group $PSU_n(q)$. Internat. J. Algebra Comput. 27:6 (2017), 769–792.

[14] S. H. Alavi, A. Daneshkhah, A new characterization of alternating and symmetric groups. Journal of Applied Mathematics and Computing 17:1 (2005), 245–258.

[15] R. Brandl, W. Shi, Finite groups whose element orders are consecutive integers. J. Algebra 143:2 (1991), 388–400.

[16] A. Beltran, M. Felipe, On the solvability of groups with four class sizes. J. Algebra Appl. 11:2 (2012), 1–7.

[17] W. Burnside, On Groups of Order $p^\alpha q^\beta$. Proc. London Math. 2:1 (1904), 388–392.

[18] A. R. Camina, R. Camina, A Note on Some Properties of the Least Common Multiple of Conjugacy Class Sizes. Proceedings of the International Conference on Algebra (2010), 103–108, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[19] A. R. Camina, Arithmetical conditions on the conjugacy class numbers of a finite group. J. London Math. Soc. 5:2 (1972), 127–132.

[20] G. Y. Chen, Characterization of ${}^3D_4(q)$. Southeast Asian Bull. Math. 25:3 (2001), 389–401.

[21] G. Y. Chen, Further reflections on Thompson's conjecture. J. Algebra 218:1 (1999), 276–285.

[22] G. Y. Chen, On Thompson's conjecture. J. Algebra 185:1 (1996), 184–193.

[23] G. Y. Chen, A new characterization of sporadic simple groups. Algebra Colloq. 3:1 (1996), 49–58.

[24] G. Y. Chen, On Thompson's Conjecture For sporadic groups. Proc. China Assoc. Sci. and Tech. First Academic Annual Meeting of Youths, 1–6, Chinese Sci. and Tech. Press, Beijing, 1992.

[25] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press (1985).

[26] M. R. Darafsheh, Characterization of the groups $D_{p+1}(2)$ and $D_{p+1}(3)$ using order components. J. Korean Math. Soc. 47:2 (2010), 311–329.

[27] M. R. Darafsheh, A. R. Modhaddamfar, A characterization of some finite groups by their element orders. Algebra Colloq 7:4 (2000), 467–476.

[28] D. Gorenstein, Finite groups, New York-London (1968).

[29] N. Ito, On finite groups with given conjugate types I. Nagoya Math. 6 (1953), 17–28.

[30] N. Ito, On finite groups with given conjugate types II. Osaka J. Math. 7 (1970), 231–251.

[31] N. Ito, On finite groups with given conjugate types III. Math. Z. 117 (1970), 267–271.

[32] A. Iranmanesh and B. Khosravi, A characterization of $F_4(q)$ where q is an odd prime power. Lecture Notes London Math. Soc. 304 (2003), 277–283.

[33] G. Higman, Finite groups in which every element has prime power order. J. London Math. Soc. 32 (1957), 335–342.

[34] Unsolved Problems in Group Theory: the Kourovka Notebook. eds. E. I. Khukhro and V. D. Mazurov, 19th edition, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. 2018.

[35] B. Khosravi, B. Khosravi, A characterization of $E_6(q)$. Algebras, Groups and Geom. 19 (2002), 225–243.

[36] B. Khosravi, B. Khosravi, A characterization of ${}^2E_6(q)$. Kumamoto J. Math. 16 (2003), 1–11.

[37] G. Navarro, The set of conjugacy class sizes of a finite group does not determine its solvability. J. Algebra 411 (2014), 47–49.

[38] C. E. Praeger, W. Shi, A characterization of some alternating and symmetric groups. Comm. Algebra 22:5 (1994), 1507–1530.

[39] A. Staroletov, On almost recognizability by spectrum of simple classical groups. International Journal of Group Theory 6:4 (2017), 7–33.

[40] A. Staroletov, On recognition of alternating groups by prime graph. Сиб. электрон. матем. изв. 14 (2017), 994–1010.

[41] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups. Ann. Math. 75 (1962), 105–145.

[42] W. Shi, A characteristic property of A_5. J. Southwest-Chine Teachers Univ. 3 (1986), 11–14 (in Chinese).

[43] W. Shi, A characteristic property of $PSL_2(7)$. J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 36:3 (1984), 354–356.

[44] A. V. Vasil'ev, On finite groups isospectral to simple classical groups. J. Algebra 42:3 (2015), 318–374.

[45] A. V. Vasil'ev, On Thompson's conjecture, Сиб. электрон. матем. изв. 6 (2009), 457–464.

[46] L. Wang, W. Shi, On Thompson's conjecture for almost simple sporadic groups. J. Algebra Appl. 13:2 (2014), 1350089, 10 pp.

[47] J. Williams, Prime graph components of finite groups. J. Algebra 69:2 (1981), 487–513.

[48] M. Xu, W. Shi, Thompson's conjecture for Lie type groups $E_7(q)$. Sci. China Math. 57:3 (2014), 499–514.

[49] M. Xu, Thompson's conjecture for alternating group of degree 22. Frontiers of Mathematics in China 8:5 (2013), 1227–1236.

Работы автора по теме диссертации

[50] И. Б. Горшков, Распознаваемость симметрических групп по спектру. Алгебра и логика 53:6 (2014), 693–703.

[51] I. B. Gorshkov, Towards Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups. J. Group Theory 19:2 (2016), 331–336.

[52] И. Б. Горшков, О гипотезе Томпсона для знакопеременных и симметрических групп степени, большей 1361. Тр. ИММ УрО РАН 22:1 (2016), 44–51.

[53] I. B. Gorshkov, A. N. Grishkov, On recognition by spectrum of symmetric groups. Сиб. электрон. матем. изв. 13 (2016), 111–121.

[54] I. B. Gorshkov, On Thompson's conjecture for alternating groups of large degree. J. Group Theory 20:4 (2017), 719-–728.

[55] I. B. Gorshkov, Thompson's conjecture for alternating groups. Comm. Algebra 47:1 (2019), 30-–36.

[56] I. B. Gorshkov, A. M. Staroletov, On groups having the prime graph as alternating and symmetric groups. Comm. Algebra 47:9 (2019), 3905–3914.

[57] I. B. Gorshkov, On Thompson's conjecture for finite simple groups. Comm. Algebra 47:12 (2019), 5192–5206.

[58] I. B. Gorshkov, I. B. Kaygorodov, A. V. Kukharev, A. A. Shlepkin, On Thompson's conjecture for finite simple exceptional groups of Lie type. Зап. научн. сем. ПОМИ 478 (2019), 100–107.

[59] I. B. Gorshkov, On a Finite Group with Restriction on Set of Conjugacy Classes Size, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 43:4 (2020), 2995–3005.

[60] I. B. Gorshkov, N. V. Maslova, The group $J_4 \times J_4$ is recognizable by spectrum. Journal of Algebra and its Applications (2020) https://doi.org/10.1142/S0219498821500614.

Горшков Илья Борисович

СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ДАННЫМИ РАЗМЕРАМИ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктор физико-математических наук

Подписано в печать 27.09.2020 Формат 60 x 84 1/16
Усл. печ. л. 1.0. Уг.-изд.п. 1,0.
Заказ №100 Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6